F.X. EDER

MODERNE MESSMETHODEN DER PHYSIK

TEIL 1

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

F. X. EDER

MODERNE MESSMETHODEN DER PHYSIK

TEIL 1

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

DR.-ING. FRANZ X. EDER · MODERNE MESSMETHODEN DER PHYSIK

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON FRANZ X. EDER UND ROBERT ROMPE

BAND 1

MODERNE MESSMETHODEN DER PHYSIK

VON FRANZ X. EDER

Professor für Physik an der Humboldt-Universität, Berlin

TEIL I

MECHANIK · AKUSTIK

1952

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN

MEINEM VEREHRTEN LEHRER

HERRN PROF. DR. W. MEISSNER

ZUGEEIGNET

Bestell-Nr. 22011

Erschienen im Deutschen Verlag der Wissenschaften Berlin C 2, Oberwasserstraße 11/12
Lizenz Nr. 205 · 435/2/52
Satz und Druck VEB Offizin Haag-Drugulin in Leipzig III/18/38
Printed in Germany

Vorwort

Angesichts der heute in der neuzeitlichen Literatur vorliegenden ausgezeichneten Lehr- und Handbücher der Experimentalphysik bedarf es einer kurzen Begründung für das Erscheinen eines Werkes über moderne physikalische Meßverfahren. Stellt doch das Ausführen physikalischer Messungen und die Beschreibung der dabei benutzten Apparate nur einen, wenn auch wesentlichen Teil der experimentellen Physik dar, dem in den ausführlicheren Lehrbüchern ein breiter Raum zugebilligt wird. Beim näheren Zusehen zeigt sich allerdings, daß aus didaktischen und räumlichen Gründen oft nur prinzipielle Meßverfahren erläutert und aus denselben Gründen in ihrer Wirkungsweise leichter verständliche und einschlägige Meßgeräte bevorzugt beschrieben werden. Wie die moderne Entwicklung der experimentellen Physik gezeigt hat, genügen diese dem heute forschenden Physiker keineswegs mehr, denn viele wichtige Probleme sind heute nur mit den empfindlichsten Methoden zu lösen, wie das Beispiel der Kernphysik beweist. Äußerlich wird diese Entwicklungsrichtung durch die ständig zunehmende Einführung und Verbreitung elektrischer Meßmethoden auf allen Gebieten der Experimentalphysik gekennzeichnet, die gegenüber anderen Verfahren meist einfacher, anpassungsfähiger und oft wesentlich genauer sind. Diesem charakteristischen Zug der Entwicklung hat sich die vorliegende Darstellung weitgehend angeschlossen.

Auf der anderen Seite soll das Buch als Hochschullehrbuch nicht nur eine Übersicht über die zahlreichen experimentellen Verfahren bieten, sondern auch deren Grundlagen eingehend behandeln. Der Leser soll in den Stand versetzt werden, das für eine vorgegebene Aufgabe geeignetste Verfahren auswählen und es hinsichtlich seiner Leistungsfähigkeit beurteilen zu können.

Diese beiden Gründe ließen es mich als eine lockende Aufgabe erscheinen, trotz des vortrefflichen Lehrbuches von Kohlrausch, das eine fast lückenlose Aufzählung der verschiedenen Meßmethoden enthält, den mir vorschwebenden Plan zu verwirklichen. Der vorliegende Band ist der erste des Gesamtwerkes, dem die Bände

II. Thermodynamik
III. Elektrophysik
IV. Optik und Atomphysik

folgen werden. Die Darstellung ist im wesentlichen Inhalt einer viersemestrigen Vorlesung, die ich in den Jahren 1947–51 an der Humboldt-Universität gehalten

habe. Sie ist an Umfang und mathematischen Voraussetzungen den Kenntnissen der Physikstudenten mittlerer Semester angepaßt. Das Buch soll aber auch dem jungen Physiker in Forschung und Industrie, dem Ingenieur im Laboratorium ohne zeitraubendes Literaturstudium ein genaues Bild geben über die sich ihm bietenden Möglichkeiten, eine physikalische Größe zu messen. Auch war beabsichtigt, Studenten und Naturwissenschaftlern der Nachbargebiete das Buch mit Nutzen in die Hand geben zu können.

Die Raumbeschränkung machte es natürlich erforderlich, die Auswahl der behandelten Meßverfahren und Geräte einschneidend zu begrenzen, ohne dabei dem Benutzer Wichtiges vorenthalten zu müssen. Durch die bereits erwähnte verbreitete Anwendung rein elektrischer Meßverfahren auf nichtelektrische Meßgrößen ließ es sich nicht umgehen, auf die wichtigsten Grundlagen der elektrischen Meßtechnik vorgreifen zu müssen, so daß die Darstellung einer klaren, progressiven Linie zwangsläufig entbehren mußte. Veraltete Verfahren und Meßgeräte, die heute meist durch einfachere und oft genauere ersetzt werden können, wurden weggelassen. Dasselbe trifft auch auf die rein technischen Methoden zu, deren physikalische Wirkungsweise jedoch aus dem Inhalt verständlich wird. An verschiedenen Stellen wurde der gesteckte Rahmen vorsätzlich durchbrochen und auch Gebiete der technischen Physik gestreift, die mir im Zusammenhang wichtig genug erschienen. Die Kenntnis der modernen Meßverfahren soll vertieft und erweitert werden durch zahlreiche bis unmittelbar an den heutigen Stand herangeführte Literaturhinweise, die jedoch nicht immer in den Text verarbeitet werden konnten.

Zu großem Dank bin ich Herrn Dr. W. Stein verpflichtet, der den Anstoß zur Niederschrift des Buches gab und mich später durch wertvolle Ratschläge unterstützte. Meinem verehrten Kollegen, Prof. Dr. R. Rompe, bin ich für einige wertvolle Hinweise verbunden. Für die sorgfältige Anfertigung der Zeichnungen sage ich Frau A. Meyer, für die genaue Durchsicht des Manuskriptes Frl. cand. rer. nat. I. Scholz, dem Verlag für die sorgfältige Ausstattung des Werkes aufrichtigen Dank.

Ich hoffe, daß im Hinblick auf den zeitnahen Charakter des Buches die noch vorhandenen Mängel durch die Hinweise meiner Fachkollegen ausgeglichen werden.

Berlin-Grünau, Oktober 1951 Franz X. Eder

Inhaltsverzeichnis

TEIL I · MECHANIK

§ 3 Zeitmessung

§ 4 Messung von Massen

§ 5 Raummessung

§ 6 Dichte

§ 7 Niedrige und hohe Drucke

§ 8 Messung der Geschwindigkeit

§ 9 Kraftmessung

§ 10 Messung mechanischer Schwingungen

§ 11 Messung der Elastizität und Festigkeit

§ 12 Herstellung und Eigenschaften von Einkristallen

§ 13 Zähigkeit

§ 3 Schallgeber

§ 4 Schallempfänger

§ 5 Messung der Schallfeldgrößen

§ 6 Messung der Schallausbreitungsgrößen

§ 7 Klanganalyse

ERSTER TEIL

Mechanik

§ 1 ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

1,1 Begriff des Messens

Messen heißt, eine Größe mit einer anderen gleicher Art, der Maßeinheit, zu vergleichen, also zahlenmäßig festzustellen, wie oft die Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist.

Bedeutet A die zu messende physikalische Größe, (a) ihre Einheit und a die sogenannte *Maßzahl*, die angibt, wie oft (a) in A enthalten ist, so gilt die Gleichung

$$A = a\,(a). \qquad (1/1)$$

Geht man zu einer anderen Einheit über, die mit der ersten durch die Beziehung

$$\frac{(a)}{(a')} = n$$

verknüpft ist, so wird aus Gleichung (1/1)

$$A = a\,n\,(a') = a'\,(a'),$$

wenn man im neuen Maßsystem die Maßzahl

$$a' = a\,n \quad \text{oder} \quad \frac{a}{a'} = \frac{1}{n}$$

einführt. Daraus folgt, daß sich beim Übergang von einem Maßsystem in ein anderes die Maßzahlen umgekehrt wie die Einheiten verhalten, also

$$\frac{(a)}{(a')} = \frac{a'}{a}. \qquad (1/2)$$

Will man also z. B. eine Länge in einer tausendmal größeren Einheit ausdrücken (in m an Stelle von mm), so wird die Maßzahl tausendmal kleiner.

1,2 Leistungsfähigkeit der Sinnesorgane (*362*)

Eine physikalische Messung wird im allgemeinen mit Hilfe der menschlichen Sinnesorgane Auge und Ohr durchgeführt. Es wird hierbei beim Auge Gebrauch von der Sehschärfe, Empfindlichkeit und Unterscheidungsvermögen für Farbe und Flächenhelligkeit gemacht, beim Ohr von der Empfindlichkeit und dem Frequenzunterscheidungsvermögen. Im folgenden sollen einige Angaben über die Leistungsfähigkeit des menschlichen Auges und Ohres gemacht werden.

1,21 *Sehschärfe des Auges*

Die Maßzahl, die bei sehr vielen Messungen (Maßstab, elektrische Meßgeräte usw.) festgestellt werden muß, wird in der Regel keine ganze Zahl sein, so daß Bruchteile einer Einheit geschätzt werden müssen. Dasselbe gilt auch, wenn zur Erhöhung der Meßgenauigkeit Hilfsgeräte, z.B. ein Mikroskop, verwendet werden. Bei einer zweiten Art der Messung wird das Zusammenfallen zweier Strichmarken oder Markierungen beobachtet, wie das bei der Nonienablesung oder bei der Beobachtung des Durchganges eines Sternes durch das Fadenkreuz eines Fernrohres der Fall ist.

Bei der visuellen Beobachtung gehen die optischen und physiologischen Eigenschaften des Auges und der Netzhaut in das Meßergebnis ein. Die hierbei auftretenden Fehler, wie Unvollkommenheit der optischen Abbildung, Netzhautstruktur und psychische Einflüsse (Ermüdungserscheinungen), bestimmen zusammen den (zufälligen) Beobachtungsfehler.

Die Leistungsfähigkeit des Auges, d.h. die Fähigkeit, zwei unter einem sehr kleinen Sehwinkel erscheinende Objekte noch unterscheiden zu können, ist durch die Struktur der Netzhaut bestimmt. Diese besteht bekanntlich (Abb. 1) aus Stäbchen und Zäpfchen, die etwa wie die Zellen einer Honigwabe angeordnet sind und im Mittel rund $4 \cdot 10^{-3}$ mm Durchmesser besitzen. Um also Einzelheiten eines ausgedehnten Gegenstandes wahrnehmen zu können, muß dieser ein Bild größer als 4 μ ($1\ \mu = 10^{-3}$ mm) auf der Netzhaut entwerfen. Die Öffnung dieses Lichtbündels beträgt bei einem Abstand Linse-Netzhaut von 15 mm 55″. In Übereinstimmung hiermit hat man beobachtet, daß zwei Linien oder Punkte nur dann getrennt wahrzunehmen sind, wenn sie mindestens unter einem Sehwinkel von 50″ erscheinen, was in der deutlichen Sehweite von 25 cm einem gegenseitigen Abstand von 0,006 cm entspricht.

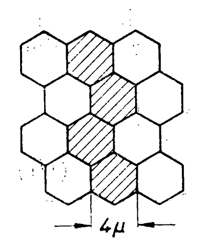


Abb. 1
Struktur der Netzhaut des menschlichen Auges

Erhöht man die Leistungsfähigkeit des Auges dadurch, daß man ein optisches Instrument benutzt, wie Lupe, Mikroskop oder Fernrohr, das die Vergrößerung V besitzen soll, so kann die Sehschärfe auf $0{,}006/V$ cm erhöht werden, solange nicht Abbildungsfehler die Leistung beeinträchtigen. Als obere Grenze des Unterscheidungsvermögens für das „bewaffnete“ Auge gilt etwa 0,1 μ.

Wenn man das Zusammenfallen zweier Strichmarken, die sog. *Noniensehschärfe*, erkennen will, gelten diese Angaben nicht. Ein Lagenunterschied zweier Striche kann nach Abb. 1 noch erkannt werden, wenn der Abstand ihrer Bilder auf der Netzhaut kleiner als der Zäpfchendurchmesser ist. Unter günstigsten Verhältnissen läßt sich ein Sehwinkel von 3″, im allgemeinen jedoch 10″ bis 12″ trennen, was einem Abstand von 10 μ entspricht.

Zwei zeitlich aufeinanderfolgende Lichteindrücke werden noch getrennt wahrgenommen, wenn sie bei geringer Lichtstärke in einem zeitlichen Abstand von mindestens $^1/_{10}$ bis $^1/_{25}$ s auftreten, während die Verschmelzungsfrequenz bei guter Beleuchtung erst bei 50 bis 70 Hz liegt.

Die kleinste wahrnehmbare Winkelgeschwindigkeit eines Gegenstandes beträgt etwa 10 Winkelsekunden je Zeiteinheit; sie steigt mit wachsendem Beobachtungsabstand.

1,22 *Empfindlichkeit des Auges*

Die *Reizschwelle* des Auges, d. h. die kleinste Lichtenergie, die von diesem gerade noch wahrgenommen werden kann, beträgt etwa 1,3 bis $3 \cdot 10^{-10}$ erg = 1,3 bis

$3 \cdot 10^{-17}$ Ws. Das entspricht dem Licht eines Sternes sechster Größe oder einer Kerze in 250 m Entfernung. Diese Angabe gilt für die optimale Lichtwellenlänge von etwa 550 $m\mu$, für die die Augenempfindlichkeit, wie in Abb. 2 dargestellt ist, ein Maximum wird. Beim dunkeladaptierten Auge tritt eine Verschiebung der Empfindlichkeitskurve nach kürzeren Wellenlängen ein (Dämmerungssehen) (*288*).

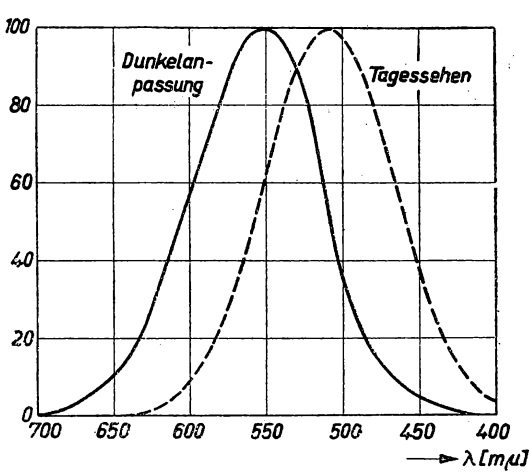


Abb. 2 Empfindlichkeit des menschlichen Auges

Bei photometrischen Messungen handelt es sich in der Regel um den Vergleich der Helligkeit zweier Gesichtsfelder. Unter günstigsten Bedingungen (ohne Trennungslinie aneinandergrenzende Felder, gleichzeitige Beobachtung, mittlere Intensität, gleiche Farbe) beträgt die noch wahrnehmbare Unterschiedsschwelle etwa 1% der Intensität, in Flimmeranordnung ist sie etwas größer (siehe Bd. IV).

Hierbei gilt das auch bei anderen Reizvorgängen bestätigte WEBER-FECHNERsche Gesetz der Konstanz der Unterschiedsempfindlichkeit, das gewöhnlich in der Form

$$d\,E = k \cdot \frac{dR}{R} \qquad (1/3)$$

angegeben wird. Mit dE ist die Änderung der Empfindung, die durch die Änderung dR des Reizes R hervorgerufen wird, bezeichnet, während k eine Konstante ist. Durch Integration der Beziehung (1/3) gelangt man zu dem *psycho-physischen Grundgesetz*

$$E = k \log \frac{R}{S}, \qquad (1/4)$$

welches besagt, daß sich die Empfindungen wie die Logarithmen der Reize verhalten. Die Integrationskonstante S stellt das Maß für die Reizschwelle dar.

Die Gültigkeit dieses Gesetzes ist bei Licht auf mittlere Beleuchtungsstärken (50 bis 1000 Lux) beschränkt. Während, wie bereits erwähnt, die Unterschiedsschwelle für mittlere Beleuchtungsstärken etwa 1% beträgt, steigt sie bei großen Flächenhelligkeiten auf 3 bis 4%, bei sehr schwachen sogar auf 70%. Ebenso ist eine Abhängigkeit der Unterschiedsschwelle von der Wellenlänge des Lichts vorhanden, die etwa wie die Empfindlichkeitskurve in Abb. 2 verläuft.

1,23 *Empfindlichkeit des Ohres*

Im Vergleich zum Auge wird das Ohr nur verhältnismäßig selten zu Messungen herangezogen, z. B. beim Abgleich von Tonfrequenzbrückenschaltungen und bei akustischen Messungen.

Wie das Auge, vermag auch das Ohr nur einen bestimmten Frequenzbereich als Schall wahrzunehmen, und zwar liegen die Grenzen, wie aus der Abb. 3 hervorgeht,

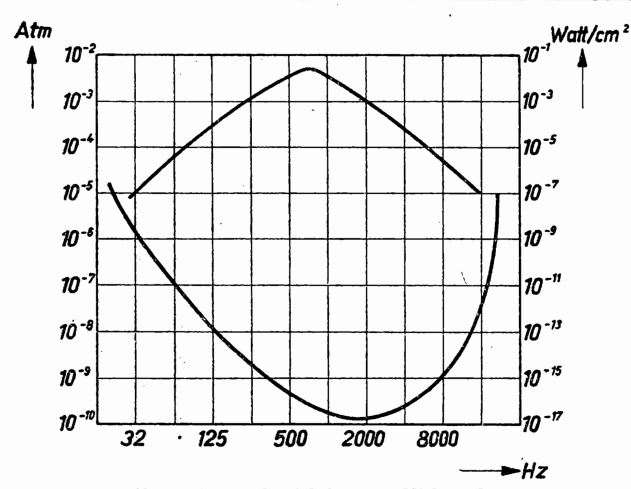


Abb. 3 Frequenzbereich des menschlichen Ohres

etwa zwischen 20 und 16000 Hz, schließen also einen wesentlich größeren Frequenzbereich ein als das Auge. Das Hörfeld wird nach unten durch die Reizschwelle begrenzt, d.h. durch die im Ohr gerade noch wahrnehmbare Energie, die von der Frequenz abhängig ist. Nach hohen Energiewerten ist das Hörfeld durch die Schmerzschwelle abgegrenzt, bei deren Überschreiten Schmerzempfindung auftritt. Die Reizschwelle schwankt, abhängig von der Frequenz, im Verhältnis $1:10^8$ und erreicht bei etwa 3 bis 3,5 kHz die Stelle der größten Empfindlichkeit. Bei dieser Frequenz beträgt der Schwellenwert etwa 10^{-16} erg, bei 12 kHz bzw. 400 Hz dagegen nur 10^{-14} bzw. 10^{-15} erg. Die Unterschiedsschwelle erfaßt für mittlere und größere Lautstärken etwa 10% und ist zwischen 100 und 3200 Hz nahezu unabhängig von der Frequenz. Nach Seidel (*321*) läßt sich die Messung der Hörschwelle besonders einfach und genau mit Hilfe des Thermophons durchführen, da hierbei Eichung und Bezugnahme auf bekannte Schalldrucke nicht erforderlich sind. Das Thermophon (siehe 2. Teil: Akustik) besteht aus einem sehr dünnen, elektrisch mit Wechselstrom bekannter Frequenz beheizten Draht, der in dem abgeschlossenen Hohlraum des Außenrohres einen berechenbaren Schalldruck erzeugt.

Die Unterscheidungsschwelle für Tonhöhen beträgt bei tiefen Tönen (50 Hz) etwa 1%, für mittlere Frequenzen (600 bis 3200 Hz) ungefähr 0,3%. Die Genauigkeit, mit welcher die Frequenz eines Tones absolut angegeben werden kann, ist im allgemeinen ein halber Ton.

1,3 Meßfehler

1,31 *Beobachtungs- und systematische Fehler*

Die ungenaue Wahrnehmung des Meßvorganges durch unsere Sinnesorgane, die zudem noch vom Beobachter und von äußeren Einflüssen abhängt, bringt grundsätzlich Meßfehler mit sich. Da diese zufälligen Fehler sowohl positiv als auch negativ sein können, müßte das arithmetische Mittel einer genügend großen Zahl von Einzelmessungen dem wahren Wert beliebig nahekommen. Dabei sind allerdings sog. *systematische Fehler* ausgeschlossen. Es ist also z. B. vorausgesetzt, daß der zur Vergleichsmessung benutzte Maßstab die richtige Länge aufweist oder das verwendete elektrische Meßgerät innerhalb der Meßgenauigkeit fehlerfrei anzeigt. Derartige systematische Fehler lassen sich durch eine große Anzahl von Einzelmessungen nicht eliminieren, sondern treten als Korrektion der Meßgeräte in Erscheinung. Die Korrektur eines Gerätes ist nur durch Ausführung der Messung nach verschiedenen, grundsätzlich

andersgearteten Verfahren bestimmbar und wird im allgemeinen dem Meßgerät in Form einer Tabelle beigegeben.

Als die Fehler δ der *einzelnen Beobachtungen* bezeichnet man die positiven und negativen Abweichungen von dem arithmetischen Mittelwert, wobei der größte vorkommende Fehler, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, ein Maß für die Güte und Gleichmäßigkeit der Messung darstellt. Den mittleren Fehler φ einer einzelnen Beobachtung erhält man nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, indem man die quadrierten Fehler addiert ($S = \Sigma\, \delta^2$), durch die um 1 verminderte Zahl n der Beobachtungen dividiert und schließlich aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht. Es wird also

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{S}{n-1}}\,. \qquad (1/5)$$

Als Beispiel sei die Messung einer Länge mit einem Mikrometer, unter Schätzung der $^1/_{100}$ mm, in Tabelle I wiedergegeben.

Beobachtung mm	δ mm	δ^2 mm²	
12,54	– 0,026	0,00068	Mittel: 12,514 mm
12,51	+ 0,004	02	größter Fehler: 0,056 mm
12,47	+ 0,044	194	mittlerer Fehler ± 0,0280 mm
12,57	– *0,056*	314	
12,49	+ 0,024	58	
12,52	– 0,006	04	
12,50	+ 0,014	19	
12,51	+ 0,004	02	
12,53	– 0,016	25	
12,50	+ 0,014	19	
Mittel: 12,514		$S = 0{,}00705$	

Tabelle I

Den mittleren Fehler ψ des *Ergebnisses* erhält man, indem man den mittleren Fehler φ der einzelnen Beobachtung durch $\sqrt{n}$ dividiert, es ist daher

$$\psi = \pm \sqrt{\frac{S}{n\,(n-1)}}\,. \qquad (1/6)$$

Für das obige Beispiel wird $\psi = \pm\, 0{,}009$ mm, womit sich das Ergebnis der Längenmessung in der Form schreiben läßt: $L = 12{,}514 \pm 0{,}009$ mm.

Eine derartige Rechnung hat natürlich nur dann Sinn, wenn der systematische Fehler kleiner als der Beobachtungsfehler ist. Im anderen Fall ist dieser zu berücksichtigen und das Meßergebnis mit der Dezimale abzubrechen, auf welche der Fehler bereits einen Einfluß hat.

In vielen Fällen wird der sog. *prozentuale Fehler* angegeben, der sich aus

$$\psi_{\text{Proz.}} = \pm \frac{\psi \cdot 100}{\text{Ergebnis}}$$

berechnet, wofür sich im obigen Beispiel $\psi_{\text{Proz.}} = 100 \cdot 0{,}009/12{,}514 = \pm\, 0{,}072\%$ ergäbe.

Nach den obigen Formeln hat es den Anschein, als ob man durch eine größere Zahl von Beobachtungen den mittleren Fehler weitgehend verringern könnte. Das gilt jedoch nur für die zufälligen Beobachtungsfehler, nicht dagegen für die übrigen systematischen Fehler. Mit einem Meßgerät läßt sich, auch durch noch so viele Beobachtungen, keine größere Genauigkeit erzielen, als es selbst besitzt bzw. mit der seine Korrektionen bekannt sind. Es ist daher richtiger und vor allem wirtschaftlicher, eine geringere Zahl sorgfältiger Beobachtungen zu machen, als eine große Anzahl flüchtiger und deshalb mit großen zufälligen Fehlern behafteter Versuche durchzuführen.

1,32 *Einfluß der Fehler auf ein zusammengesetztes Ergebnis*

In den meisten Fällen liefert die Beobachtung nicht unmittelbar das Ergebnis R, sondern hängt etwa durch die Funktion φ mit der beobachteten Größe x zusammen, also

$$R = \varphi\,(x).$$

Wird nun bei der Beobachtung von x ein Fehler $\pm\, f$ begangen (das ist im allgemeinen der oben mit ψ bezeichnete mittlere Fehler), so bewirkt dieser im Ergebnis R einen Fehler F, der durch die Beziehung

$$R + F = \varphi\,(x \pm f)$$

bestimmt ist. Da f im Vergleich zu x eine kleine Größe sein soll, kann die Funktion φ in eine TAYLORsche Reihe entwickelt werden, worin die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden können. Man kann daher setzen

$$R + F = \varphi\,(x) \pm f\,\frac{d\,\varphi\,(x)}{d\,x}\,.$$

Durch Subtraktion der ersten Gleichung, von dieser bekommt man für den Fehler F

$$F = \pm\, f \cdot \frac{d\,R}{d\,x}\,. \tag{1/7}$$

Man erhält somit den Fehler F des Ergebnisses R durch Multiplikation des Fehlers f der Beobachtung von x mit dem Differentialquotienten von R nach x. Je nachdem, ob man für f den maximalen, mittleren oder wahrscheinlichen Fehler einsetzt, bekommt man für R den entsprechenden Fehler.

Am Beispiel der Neigungswaage (§ 4,22), bei der sich die zu wägende Masse M aus dem Neigungswinkel α entsprechend $M = C \operatorname{tg} \alpha$ berechnet (C ist eine die Balkendaten enthaltende Apparatekonstante), läßt sich der Fehler F aus

$$F = \pm\, f \cdot C\,\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \pm\, f \cdot \frac{2\,R}{\sin 2\,\alpha}$$

bestimmen. Die Bestimmung des Fehlers F läßt also nicht nur den Einfluß des Beobachtungsfehlers auf das Ergebnis erkennen, sondern zeigt auch, wie man beobachten muß, um den Meßfehler möglichst gering zu halten.

1,33 *Gausssches Fehlerfortpflanzungsgesetz*

Hängt das Meßergebnis von mehreren zu beobachtenden Größen x_1, x_2, x_3 usw. ab, ist also

$$R = \varphi\,(x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

so bestimmt man zunächst die Fehler F_1, F_2, F_3, ..., die durch die Beobachtungsfehler f_1, f_2, f_3, ... der Größen x_1, x_2, x_3, ... einzeln im Gesamtergebnis R hervorgerufen werden, wobei die übrigen Größen als konstant zu betrachten sind. Es handelt sich folglich um die partiellen Differentiationen

$$F_\nu = \pm f_\nu \frac{\partial R}{\partial x_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Im ungünstigsten Fall addieren sich alle Fehler, und man erhält

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots = \pm \left(f_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial R}{\partial x_2} + \ldots\right),$$

während der mittlere Fehler sich zu

$$F = \pm \sqrt{F_1{}^2 + F_2{}^2 + F_3{}^2 + \ldots} = \pm \sqrt{\left(f_1 \frac{\partial R}{\partial x_1}\right)^2 + \left(f_2 \frac{\partial R}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots} \qquad (1/8)$$

berechnet.

Beispiel: Bestimmung der elektrischen Leistung N aus der an einem Ohmschen Widerstand R liegenden Spannung U entsprechend der Gleichung

$$N = \frac{U^2}{R}.$$

Sind f_u und f_r die bei der Bestimmung von U und R begangenen Fehler, so ist die Leistung mit dem Fehler

$$F = \pm f_u \frac{2\,U}{R} \mp f_r \frac{U^2}{R^2} = \pm N\left(2\frac{f_u}{U} - \frac{f_r}{R}\right)$$

behaftet. Der bei der Messung von U gemachte Fehler geht also in das Gesamtergebnis mit doppeltem Gewicht ein. Die Beziehung (1/8) gestattet zu entscheiden, welche Meßgrößen mit besonderer Sorgfalt beobachtet werden müssen und bei welchen eine angenäherte Bestimmung ohne merklichen Einfluß auf die Gesamtgenauigkeit ist.

1,34 *Fehler und Korrektion*

Der Fehler ist eine Größe, um die das Ergebnis zu groß oder zu klein ausfallen kann. Im Gegensatz hierzu können eindeutig positive oder negative Abweichungen der Anzeige eines Meßgerätes von seinem Sollwert auftreten; man spricht in diesem Fall nicht von einem Fehler, sondern von einer *Korrektion.* Das Vorzeichen der Korrektion bestimmt sich aus folgender Beziehung:

Istwert + Korrektion = wirklicher Wert.

Bei elektrischen Meßgeräten z. B. ist der Istwert der vom Zeiger auf der Instrumentenskala angezeigte Zahlenwert. Der Sollwert von Maßstäben ist für eine bestimmte

Temperatur, z. B. 15° C, durch die aufgedruckten Zahlenangaben gekennzeichnet. Genauen, amtlich geprüften Meßgeräten, wie z. B. Thermometern, Präzisionsmeßgeräten, Endmaßen, Normalelementen usw., werden Korrektionstabellen beigegeben.

1,4 Empfindlichkeit und Genauigkeit

Bei der Durchführung der meisten physikalischen Meßverfahren werden Anzeigegeräte mit beweglichen Teilen verwendet, wie z. B. Zeigerinstrumente oder die Waage, deren Stellung subjektiv ermittelt werden muß. Die Messung wird um so ungenauer, je mehr man die zu messende Größe, die Meßgröße, ändern muß, um eine gerade mit Auge oder Ohr noch wahrnehmbare Änderung des Ausschlages zu bekommen. Den reziproken Wert dieser Änderung der festzustellenden Meßgröße bezeichnet man als *Empfindlichkeit* des Meßinstrumentes; diese ist vor allem für die Genauigkeit der Messung maßgebend. Es gilt also

$$\textit{Empfindlichkeit} = \frac{\textit{Änderung der Anzeige}}{\textit{Änderung der Meßgröße}}.$$

Ruft z. B. der Strom von 10^{-9} A in einem Galvanometer einen Ausschlag an der Skala von 5 Skalenteilen hervor, so wird man dem Galvanometer die Empfindlichkeit von 1 Skt/2 · 10^{-10} A zuschreiben.

An Stelle von Empfindlichkeit wird häufig (aber fälschlich) der Ausdruck *Genauigkeit* gebraucht. Die beiden für eine Meßmethode gleicherweise wichtigen Kennzeichnungen sind scharf voneinander zu unterscheiden. Die Genauigkeit eines Anzeigeinstrumentes ist, unabhängig von dessen Empfindlichkeit, ausschließlich von den für die Anzeige in Betracht kommenden systematischen Fehlern bestimmt. Im weiteren Sinne umfaßt der Ausdruck Genauigkeit einer Meßanordnung alle Einflüsse, die eine fehlerhafte Anzeige der Ableseinstrumente ohne Berücksichtigung des Ablesefehlers zur Folge haben können. Darunter sollen auch die Fehler verstanden werden, die durch mangelhafte Beobachtung oder Berücksichtigung der Meßparameter entstehen, die in erster Näherung ohne Einfluß auf das Meßergebnis sein sollten. Dazu gehören z. B. der Barometerstand, die Temperatur, die Feuchtigkeit bei elektrischen Messungen. Die Fehlerabschätzung wird in diesen Fällen nach § 1,32 durchgeführt. Es ist empfehlenswert, sich derartige Fehlerabschätzungen schon beim Entwurf einer Meßanordnung zu überlegen, da man z. B. bei elektrischen Schaltungen durch geeignete Maßnahmen viele der systematischen Fehler vermeiden kann.

Zu den Begriffen Genauigkeit und Empfindlichkeit tritt nun noch der wenig glücklich gewählte Ausdruck *Ablesegenauigkeit* eines Meßgerätes, worunter die kleinste an der Teilung bzw. Skala noch abzulesende bzw. abzuschätzende Meßgröße verstanden wird. Diese hängt von der Beleuchtung, der Ausführung des Zeigers und der Skala ab. Da, wie in § 1,21 angegeben wurde, der kleinste vom unbewaffneten Auge noch trennbare Abstand 0,06 mm beträgt, soll man eine Teilung nicht enger als 10 · 0,06 = 0,6 mm machen, einen sehr dünnen Zeiger bzw. Faden vorausgesetzt. Andernfalls empfiehlt es sich, die Teilung etwa 10 Zeigerbreiten weit zu machen. Engere Teilungen als 0,6 mm können nur mit Hilfe einer Lupe oder eines Fernrohres voll ausgenutzt werden.

Für die Meßgenauigkeit eines Anzeigegerätes sind die Umstände bedeutungsvoll, die neben der sog. Ablesegenauigkeit die systematischen Fehler verursachen, d. h. die Güte der Ausführung ist von ausschlaggebender Bedeutung. Die elektrischen Meßgeräte

hat man unter diesem Gesichtspunkt in vier Güteklassen eingeteilt, für die der systematische Fehler im allgemeinen in Prozenten des Endausschlages angegeben wird. Nähere Einzelheiten und zahlreiche Beispiele sind in dem Buch von KEINATH (*194*) angegeben. Den Kehrwert der systematischen Instrumentenfehler bezeichnet man auch oft als *Güte* des Gerätes. Zweckmäßig sollen Empfindlichkeit, Ablesegenauigkeit und Instrumentengenauigkeit bei einem Gerät aufeinander abgestimmt sein, da eine hohe Ablesegenauigkeit bei relativ großen systematischen Fehlern überflüssig ist, während eine ungenügende Ablesegenauigkeit bei einem Instrument großer Genauigkeit diese nicht voll auszunutzen gestattet. Durch optische Mittel oder Veränderung an Zeigerwerk und Skala lassen sich in den meisten Fällen die Mängel beseitigen, die sich aus einer ungenügenden Ablesegenauigkeit ergeben. Für die Wahl eines Instrumentes zu einem bestimmten Zweck sind demnach in erster Linie seine Empfindlichkeit und Genauigkeit, in zweiter Linie die Ablesegenauigkeit ausschlaggebend.

§ 2 LÄNGEN- UND WINKELMESSUNG (*28, 135*)

Die Bestimmung der Länge als eine der Fundamentalgrößen des physikalischen Maßsystems bildet eine der wichtigsten Voraussetzungen bei der Durchführung der absoluten Messungen im Sinne von GAUSS. Dabei wurden die Bemühungen um ein exaktes Längenmaß besonders dadurch vorwärtsgetrieben, daß Geodäsie und Astronomie, vor allem aber die Präzisionstechnik (Austauschbau, optische Instrumente) dringend eine unveränderliche und genaue Längeneinheit erforderten.

2,1 **Maßeinheit** (*336*)

Von einer Einheit der Länge werden vor allem gefordert: leichte Reproduzierbarkeit und sichere Herstellung.

HUYGENS, der Erfinder der Pendeluhr, schlug bereits 1664 vor, die Länge des Sekundenpendels als Längeneinheit zu verwenden. Wegen des zu erwartenden Einflusses der Erdbeschleunigung auf die Maßeinheit ließ man den Vorschlag zugunsten einer geodätischen Grundmessung fallen. Auf Anregung TALLEYRANDS wurde 1790 eine Kommission beauftragt, die Frage zu prüfen, ob als natürliche Längeneinheit der zehnmillionste Teil eines Erdquadranten genau genug festzulegen sei. Durch eine genaue und umfangreiche Gradmessung, die innerhalb von sieben Jahren durch MÉCHAIN und DELAMBRE ausgeführt wurde, ist die Längeneinheit festgelegt worden. Diese war ein von FORTIN hergestelltes Platinendmaß, das bei der Temperatur des schmelzenden Eises genau 1 Meter messen sollte, und als mètre des archives im Jahre 1799 für gesetzlich erklärt wurde.

Seit 1889 ist das mètre des archives ersetzt durch ein genau mit diesem übereinstimmendes Strichmeter aus Platin-Iridium, dessen Strichabstand bei 0° C das *Urmeter* darstellt. Als Querschnittsform wählte man die in der Abb. 4 dargestellte X-Form, bei der sich die Teilung, bestehend aus drei Querstrichen und zwei diese eingrenzenden Längsstrichen an jedem Stabende auf der neutralen Schicht (siehe § 11,31) befindet. Da bei einem nur wenig gebogenen Stab sich die neutrale Faser in ihrer Länge nicht verändert, bleibt der Abstand der Striche auch bei unvollkommen ebener Unterlage derselbe. Die Striche besitzen etwa 7 μ Stärke und 0,5 mm gegenseitigen Abstand. Der mittlere Strich dient als Hauptstrich.

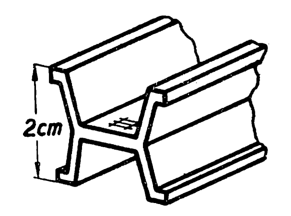


Abb. 4 Querschnittsform des Urmeters

Das Urmeter ist nach Kontrollmessungen mit einer absoluten Genauigkeit von etwa 0,2 μ, d. h. $2 \cdot 10^{-7}$ seiner Länge bekannt, so daß sich Längen grundsätzlich nur mit dieser relativen Genauigkeit angeben lassen. Durch die in § 2,4 besprochenen Interferenzverfahren ist eine Längenmessung mit größerer Genauigkeit möglich. In bezug auf das Urmeter ist diese Tatsache ohne Wert, da sich die Länge der an das Urmeter angeschlossenen Kopien um einige Zehntel μ gegenüber dem Urmaß durch irreversible Strukturänderungen geändert hat. Diese unkontrollierbaren Veränderungen zwingen dazu, sich von der körperlichen Darstellung des Meters unabhängig zu machen und auf ein natürliches Maß, eine in der Natur unveränderlich vorkommende Länge, zurückzugreifen. Diese Aufgabe ist durch den Anschluß des Meters an die Lichtwellenlänge mit einer sehr großen Genauigkeit gelöst worden (§ 2,4).

2,2 **Maßstäbe**

2,21 *Einfluß der Temperatur*

Die in Abb. 4 dargestellten Prototype dienen ausschließlich dazu, das metrische System zu sichern. An die einzelnen Kopien, die unter die meisten Länder verteilt sind, werden Gebrauchs- und Kontrollmaßstäbe hoher Genauigkeit angeschlossen, die zur Messung in Laboratorium und Werkstatt bestimmt sind.

Für die Längenmessung an festen Körpern stellt die Wärmeausdehnung des Maßstabes die größte Fehlerquelle dar. Bezeichnen t_0 die Temperatur, bei der Soll- und Istwert übereinstimmen, L_0 die Länge bei dieser Temperatur, β den linearen Ausdehnungskoeffizienten und L die Länge bei $t°$, so ist

$$L = L_0 [1 + \beta (t - t_0)]. \qquad (2/1)$$

Für Messungen großer Genauigkeit ist also die Kenntnis der Temperatur des Maßstabes erforderlich, wobei Maßnahmen zu treffen sind, daß der Maßstab als ganzer dieselbe Temperatur besitzt.

Die für die Herstellung von Präzisionsmaßstäben geeigneten Werkstoffe sind in der Tabelle II, nach abnehmenden Temperaturkoeffizienten geordnet, zusammengestellt.

Werkstoff	β	Werkstoff	β
Silber	0,0000197	Stahl	0,0000115
Messing	185	Platin-Iridium	088
Neusilber	180	Jenaer Glas 16^{III}	081
Quarz ⊥ Achse	144	Invar	020
‖ Achse	080	Quarzglas	006

Tabelle II

Es ist vorteilhaft, sich vor Ausführung einer sehr genauen Längenmessung an Hand der Werte in Tabelle II zu überlegen, welche Temperaturänderungen des Maßstabes bei einer bestimmten Meßgenauigkeit zulässig sind. Soll z. B. eine Länge von 20 cm auf $\pm$ 1 μ genau gemessen werden, so muß die Temperatur bei Stahl auf

$$\delta t = \pm \frac{\delta L}{\beta L_0} = \pm \frac{1}{11{,}5 \cdot 0{,}20} \,°\,\mathrm{C} = \pm\, 0{,}44°\,\mathrm{C},$$

bei Messing auf $\pm$ 0,27° C und bei Invar auf $\pm$ 2,5° C konstant sein.

Für praktische Messungen ist die für den Prototyp festgelegte Temperatur des schmelzenden Eises unbequem, weshalb man in den weitaus meisten Fällen eine Bezugstemperatur von 20° C vereinbart hat. Bei dieser Temperatur sollen die technischen Maßstäbe ihren Nennwert haben.

2,22 *Strichmaßstäbe*

Strichmaßstäbe besitzen meistens die biegungssteife X- oder H-Form, wobei die Teilung in die neutrale Schicht gelegt wird. Gibt man ihnen nicht diesen, sondern etwa einen rechteckigen Querschnitt, so ist es bei genaueren Messungen und größeren Meßlängen vorteilhaft, den Maßstab an den sog. *Besselschen Punkten* zu unterstützen. Diese liegen im Abstand 0,22 L von den Stabenden entfernt. Als Auflager eignen sich Nadeln, die bei Änderung der Umgebungstemperatur auch eine Längenänderung ohne Reibung zulassen. Auch die Aufbewahrung geschieht am besten auf diese Weise.

Da bereits bei der Anfertigung der Urmeterkopien systematische Fehler begangen werden, andererseits durch die „Alterung“ des Materials irreversible Längenänderungen im Laufe der Zeit eintreten, gibt man genauen Maßstäben Korrektionstabellen bei. So hat z. B. die in Deutschland aufbewahrte Kopie des Pariser Urmeters die Länge

$$L = 1\,\text{m} - (1{,}72 - 8{,}642\,t - 0{,}001\,t^2)\,\mu,$$

wenn t die Temperatur ist. Bei 0° C ist also das Maß um 1,72 μ zu klein; das zweite Glied gibt die lineare Wärmeausdehnung des Stabes wieder. Für sehr hohe Genauigkeitsansprüche ist die gesonderte Bestimmung des Wärmeausdehnungskoeffizienten erforderlich. Bei Strichmaßstäben müssen die Korrektionen für jeden einzelnen Strich gesondert ermittelt werden (*334*).

Bei allen visuellen Strichablesungen, auch solchen mit optischen Hilfsmitteln, ist die Messung der relativen Lage zweier Meßmarken nur dann eindeutig, wenn diese in einer gemeinsamen Ebene liegen. Ist das nicht der Fall, kann der sog. *Parallaxenfehler* eintreten, d. h. daß sich bei Änderung der Visierrichtung die Marken gegeneinander verschieben. Zur Abhilfe verwendet man die Spiegelglasskala, bei der dann abgelesen wird, wenn sich das Spiegelbild der Pupille mit dem abgelesenen Index oder Teilstrich deckt.

2,23 *Endmaße*

Durch die sich steigernden Ansprüche an Genauigkeit in der Technik sind die Endmaße zu so hoher Vollkommenheit entwickelt worden, daß ihre Verwendung auch bei physikalischen Messungen große Vorteile bietet. Der früher gegen sie erhobene Haupteinwand, daß sie nicht wie die Strichmaßstäbe beliebig unterteilbar wären, ist durch die Arbeiten des schwedischen Waffeninspektors Johansson behoben worden. In den Jahren 1887 bis 1911 gelang es, ihre Herstellung so zu vervollkommnen, namentlich die Meßflächen außerordentlich genau und parallel herzustellen, daß sich die einzelnen Maße fest aneinandersprengen lassen.

Die im Handel befindlichen Endmaße sind rechteckige Stahlklötze von meist $9 \cdot 30\,\text{mm}^2$ Querschnitt; die kleineren Maße sind durchgehend gehärtet, die größeren nur an ihren Enden. Die maßgebenden Endflächen sind planparallel geschliffen und lassen sich aneinandersprengen, so daß mehrere Maße zu einer bestimmten Länge

zusammengesetzt werden können. Nach den bisherigen Untersuchungen wirken dabei die Adhäsionskräfte der dünnen Flüssigkeitshäutchen auf den Endflächen vereinigend. Vollkommen gereinigte und trockene Endmaße adhärieren nicht. Die molekulare Anziehung kann bis zu 30 kg/cm² betragen. Die Endmaße kommen in bestimmten Sätzen in den Handel, die von 1,000 mm an zunächst um $^1/_{1000}$ mm, dann um je $^1/_{100}$, $^1/_{10}$, 1 und 25 mm abgestuft sind. Dazu kommen noch die einzelnen Zentimetermaße bis 100 mm. Es ist auf diese Weise unter Hinzunahme eines Stückes von 0,500 mm möglich, jedes gewünschte Maß bis auf $^1/_{100}$ mm durch Benutzung von höchstens drei und bis $^1/_{1000}$ mm genau durch Benutzung von höchstens vier Meßklötzen zusammenzustellen.

Als Werkstoff für die Endmaße wird ausschließlich gehärteter Stahl benutzt, da er ziemlich alle Forderungen, die zu stellen sind, erfüllt: geeignete Ausdehnung (möglichst $11{,}5 \cdot 10^{-6}$, da die meisten technischen Geräte und Werkstücke aus Stahl bestehen), große Härte, Widerstandsfähigkeit gegen Abnutzung und Korrosion, gute Polierfähigkeit, von der die Adhäsion abhängt, sowie Unveränderlichkeit. Die Unveränderlichkeit wird praktisch nie erreicht, da das beim Härten des Stahles entstehende Gefüge (Martensit) unbeständig ist und sich umzuwandeln bestrebt, wozu noch der allmähliche Ausgleich der inneren Härtespannungen kommt. Obgleich die einzelnen Stücke künstlich gealtert werden (12stündiges Erwärmen auf 150° C und $^1/_2$ jähriges Ablagern), muß man doch im Durchschnitt mit einer Längenänderung von etwa 1,5 μ im ersten Jahr und von 2 μ in sechs Jahren auf 100 mm Länge rechnen. Die Endmaße müssen daher von Zeit zu Zeit neu bestimmt werden. Quarz, der bei geeigneter Schnittrichtung den Ausdehnungskoeffizienten von Stahl hat, ist von diesen Veränderungen frei.

Die Genauigkeit für das Mittenmaß der besten Parallelendmaße beträgt etwa 10^{-5} der Länge, jedoch nicht unter 0,3 μ; für die Abweichung von der Ebenheit wird 0,2 μ zugelassen. Die genaue Längenbestimmung und Prüfung der Ebenheit geschieht ausschließlich mit Hilfe der Interferenz-Komparatoren (§ 2,42).

2,3 **Längenmeßvorrichtungen**

Um die Länge als begrenzte Gerade zu bestimmen, erfordert sie von dem gebrauchten Meßgerät eine Geradführung. Im strengsten Sinne läßt sich diese durch optische Hilfsmittel erreichen. Mit Hilfe von zwei auf Unendlich eingestellten Fernrohren, die mit einem Fadenkreuz ausgerüstet sind, kann man eine mathematische Gerade erzeugen, wenn man die beiden Fadenkreuze zur Deckung bringt.

Als mechanische Geradführungen werden im allgemeinen Kreiszylinder und Prismen verwendet, auf denen die Meßwerkzeuge bei der Messung verschoben werden.

Die sich bei der Verwendung von Geradführungen ergebenden Fehler lassen sich vermeiden, wenn man sich das zuerst von Abbe (1890) ausgesprochene und benutzte Prinzip zunutze macht: „*Die Meßapparate sind so anzuordnen, daß die zu messende Strecke die geradlinige Fortsetzung der als Maßstab dienenden Teilung bildet.*“ Liegen Prüfling und Maßstab nebeneinander, müssen sie abwechselnd durch einen sich parallel verschiebenden Schlitten unter die Ablesemikroskope gebracht werden. Dabei sind durch eine unvollkommene Geradführung Kippungsfehler erster Ordnung nur schwer zu vermeiden. Bei Beachtung des Abbeschen Komparatorprinzips werden diese Fehler wesentlich verringert.

2,31 *Meßmikroskop*

Von besonderer Bedeutung für genaue Längenmessungen ist das Meßmikroskop, das sowohl bei den Komparatoren als auch für die Ausmessung kleiner Abstände verwendet wird. Im allgemeinen arbeitet man mit einer nicht zu starken Vergrößerung, etwa 20- bis 100fach, um das Auffinden einzelner Strichstücke zu erleichtern. Auf gute Beleuchtung der Meßobjekte ist zu achten. Der Mikroskoptubus soll Zylindergestalt haben, um die optische Achse genau mit der mechanischen einrichten zu können.

Um die Lage einer Meßmarke zwischen zwei Teilstrichen der Skala bestimmen zu können, werden zwei Verfahren angewandt: die Meßschraube und das Okularmikrometer. Mit Hilfe der *Meßschraube* wird das Mikroskop, das auf einem Schlitten montiert ist, längs einer Geradführung verschoben und werden die Einstellungen der Marke und der dieser benachbarten Striche der Teilung beobachtet. Wegen des unvermeidlichen toten Ganges der Schraube stellt man in jedem Fall von einer Seite her ein.

Viel verbreiteter und genauer ist das *Okularmikrometer*, bei dem zur Messung kleiner Längendifferenzen das Mikroskop feststeht und in der Bildebene mit Hilfe einer Meßschraube ein Fadenkreuz um meßbare Beträge verschoben werden kann. Das Fadenkreuz ist auf einem kleinen Schlitten gespannt und wird durch die Meßschraube, die gewöhnlich 0,2 mm Ganghöhe besitzt und an einer hundertteiligen Meßtrommel abgelesen wird, außerhalb des RAMSDEN-Okulars verschoben.

Eine zweite Art von Okularmikrometer besteht aus einer Kreisscheibe aus Glas in der Bildebene des Mikroskopobjektives, die eine eingeätzte archimedische Spirale aufweist. Bringt man die auszumessende Strichmarke durch Drehen des Spiralmikrometers mit der Spirallinie in Berührung, so kann an einer hundertteiligen Kreisskala am Umfang der Scheibe der genaue Abstand abgelesen werden.

2,32 *ABBEscher Dickenmesser*

Bei diesem vom VEB CARL ZEISS, Jena, hergestellten Dickenmesser ist das ABBEsche Komparatorprinzip streng verwirklicht worden. Meßlänge und Skala liegen auf einer Geraden. Der eigentliche Meßstempel B (Abb. 5) und die in $^1/_{10}$ mm geteilte Glasskala S werden durch sorgfältig eingeschliffene Führungen am Ständer A genau senkrecht verschiebbar eingerichtet. Das an B befestigte Gegengewicht G vermindert den Meßdruck. Der auszumessende Gegenstand wird zwischen B und die genau ausgerichtete Meßplatte P gebracht. Mit Hilfe des Mikroskopes M und des hundertteiligen Okularmikrometers O läßt sich die Dicke auf $\pm 1\,\mu$ genau ablesen. Die größte meßbare Länge beträgt 50 bis 100 mm.

Größere senkrechte Entfernungen werden (allerdings weniger genau) mit dem *Kathetometer*, kleinere mit der *Meßuhr* (*29*) gemessen. Dieses besteht in der einfachsten Ausführung aus einem Meßmikroskop, das um einen genau feststellbaren Betrag längs einer zylindrischen Tragsäule verschoben werden kann. Die Entfernung kann entweder gesondert an einer an der Säule befestigten Skala oder durch das Beobachtungsmikroskop selbst abgelesen werden (R. FUESS).

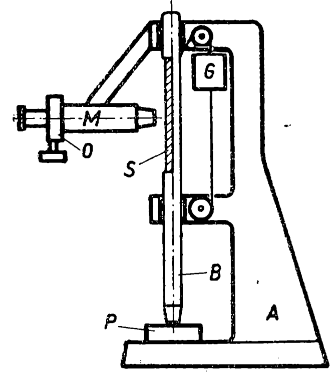


Abb. 5 ABBE*scher Dickenmesser*

2,33 *Transversalkomparator*

Zum Vergleich zweier Strichmaßstäbe verwendet man Transversal- und Longitudinalkomparatoren, wenn größtmögliche Genauigkeit gefordert wird. Welche von den beiden Arten man wählt, hängt von den zu vergleichenden Längen und den besonderen Meßanforderungen ab.

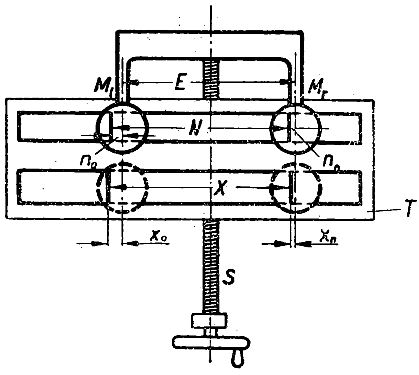


Abb. 6 Transversalkomparator

Die in Abb. 6 dargestellte Transversalanordnung stellt einen optischen, feststehenden Stangenzirkel dar, unter dessen beiden Ablesemikroskopen M_l und M_r der Tisch T mit Hilfe der Transportspindel S bewegt werden kann, damit die zu vergleichenden Maßstäbe N (der Normalmaßstab) und X abwechselnd beobachtet werden können. Da zur Verschiebung des Tisches nur eine kurze Geradführung erforderlich ist, sind die hierdurch möglichen Kippungs- und Drehungsfehler äußerst gering. Durch Vertauschen der beiden Maßstäbe sind diese Fehler außerdem zu eliminieren.

Die optischen Achsen der beiden Mikroskope M_l und M_r haben den festen Abstand E. Die beiden zu vergleichenden Längen N und X werden nacheinander unter die Mikroskope geführt und z. B. mit einem Okularmikrometer (§ 2,31) die kleinen Unterschiede n_o und n_n beim Normalmaßstab, bzw. x_o und x_n beim Prüfling festgestellt. Es wird dann $E = X - x_o + x_n = N - n_o + n_n$, woraus sich die gesuchte Länge zu

$$X = N + (x_o - n_o) - (x_n - n_n) \qquad (2/2)$$

berechnet. Bauliche Angaben wurden von KÖSTERS (*208*) gemacht.

2,34 *Longitudinalkomparator*

Bei dem in Abb. 7 schematisch dargestellten Longitudinalkomparator wird der Schlitten T durch die Antriebsspindel S in der Längsrichtung verschoben, wozu eine wesentlich längere Geradführung notwendig ist. Mit Hilfe der beiden feststehenden Mikroskope M_l und M_r werden Normalmaßstab N und Prüfling X gleichzeitig beobachtet. Der durch die lange Geradführung bedingte Führungsfehler läßt sich klein halten, wenn die beiden Maßstäbe nahe beieinanderliegen. Das Berechnungsschema für die gesuchte Länge X ist aus der Abbildung leicht erkenntlich. Bezeichnet man wieder den festen Abstand der beiden Mikroskopachsen mit E, so folgt aus $x_o + X - x_n + E = n_n + N - n_o + E$

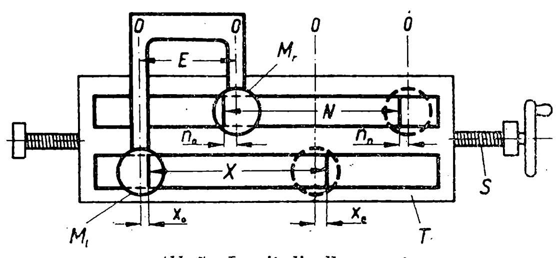


Abb. 7 Longitudinalkomparator

$$X = N + (x_n + n_n) - (x_o + n_o). \qquad (2/3)$$

Im Gegensatz zum Transversalkomparator erscheinen in Gleichung (2/3) die Summen der Differenzbeträge n und x.

Der von ABBE entworfene und von C. ZEISS gebaute Komparator für kleine Meßlängen ist eingehend von PULFRICH beschrieben worden.

Für die Ausmessung von Spektren sind die sog. Schraubenkomparatoren entwickelt worden, bei denen der Ablesetisch (mit dem Plattenhalter) unter dem Ablesemikroskop durch eine genau geschliffene Meßschraube verschoben wird, deren Einstellung an einer feingeteilten Trommel abzulesen ist. Der tote Gang läßt sich durch Federdruck oder Gegengewicht vermeiden.

2,4 Anschluß des Meters an Lichtwellenlängen

Die bereits in § 2,1 geäußerten Bedenken hinsichtlich der Festlegung der Längeneinheit durch körperliche Maßstäbe führten zu Versuchen, die Längeneinheit durch die genau bekannte Wellenlänge einer Spektrallinie auszudrücken. Diese Aufgabe ist erstmals mit neuzeitlichen Hilfsmitteln von MICHELSON (1895) durchgeführt worden. Das Prinzip der optischen Längenmessung besteht darin, daß man die zwischen zwei spiegelnden Flächen bei parallelem Licht auftretenden Interferenzmaxima und -minima auszählt. Für größere Abstände gelingt das Experiment allerdings nur, wenn die verwendete Lichtstrahlung aus zusammenhängenden Wellenzügen großer Kohärenzlänge $k\,\lambda$ (λ = Wellenlänge) besteht. Im allgemeinen treten nach k Schwingungen des Lichtes von der Frequenz $\nu = c/\lambda$ (c = Lichtgeschwindigkeit) unregelmäßige Phasenwechsel ein, die eine Interferenz unmöglich machen. Die natürliche Linienbreite von Spektrallinien stellt ein Maß für die Kohärenzlänge dar (*182, 238*).

2,41 *MICHELSON-Interferometer*

Für die Ausmessung des Meters in Lichtwellenlängen verwendete MICHELSON das von ihm im Jahre 1890 konstruierte Interferometer. Der Versuchsaufbau ist in der Abb. 8 schematisch wiedergegeben. Das Licht der Quelle L fällt auf die halbdurchlässig versilberte Glasplatte A und wird zur Hälfte hindurchgelassen, zur anderen Hälfte reflektiert. Der durchgelassene Anteil wird an dem ebenen Spiegel P_0 reflektiert. Der an A reflektierte Strahl wird von dem Planspiegel P_1 des Normalmaßes N_1 zurückgeworfen und interferiert mit dem ersten Strahl im Fernrohr F. Die gleiche Erscheinung würde eintreten, wenn sich P_0 am Ort seines virtuellen Bildes P befände. Dieses von MICHELSON als Referenzebene bezeichnete Bild P ermöglicht, daß mit ihr eine zweite materielle Ebene, etwa P_1, zur Deckung gebracht werden kann. Die Platte B, der Kompensator, macht den Strahlengang symmetrisch und erlaubt durch eine kleine Drehung die Feineinstellung der Referenzebene. Sind die spiegelnden Flächen P_1 und P parallel, erscheinen im Fernrohr HAIDINGERsche Interferenzringe, die zentrisch zur Blickachse verlaufen. Durch Parallelverschieben des Spiegels P_0 mit einer feingängigen Spindel nähern sich also die Ebenen P und P_1, wobei die hellen und dunklen Ringe nach dem Blickmittelpunkt wandern und dort verschwinden. Es erscheint jedesmal dasselbe Interferenzbild, wenn sich der Plattenabstand um $\frac{\lambda}{2}$ geändert hat. Auf diese Weise läßt sich der durch den Abstand der beiden Spiegel eines Normalmaßes festgelegte Längenunterschied in Wellenlängen auswerten, wenn man P_1 und P_2 nacheinander mit der Referenzebene

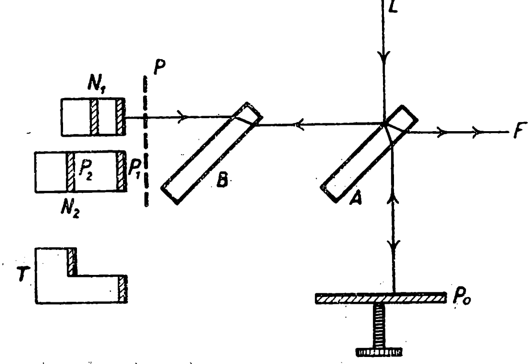


Abb. 8. MICHELSON-Interferometer.

zusammenfallen läßt und die Interferenzperioden zählt. Die Plattenmaßstäbe T hatten etwa die in der Abbildung dargestellte Form. Die beiden kleinen Planspiegel P_1 und P_2 waren spannungsfrei an den Bronzebarren befestigt. Ein zweiter gleichzeitig ausgewerteter Maßstab N_2 war doppelt so lang, so daß mit 9 Etalons von 0,39 mm Länge beginnend eine Länge von 10 cm ausgemessen werden konnte. Besondere Vorkehrungen mußten getroffen werden, um die Temperatur auf etwa 0,01° C konstant zu halten, da die Wellenlänge in Luft geringfügig von jener abhängt. Mit Hilfe eines besonderen Komparators wurde die in Lichtwellenlängen bestimmte Länge des 10-cm-Etalons an das Urmeter angeschlossen.

MICHELSON fand als Mittelwert seiner Beobachtungen, bezogen auf Luft von 760 mm Hg und 15° C,

$$1\ \text{m} = 1553163{,}5\ \lambda_{\text{rot}} = 1966249{,}7\ \lambda_{\text{grün}} = 2083372{,}1\ \lambda_{\text{blau}}$$

für die drei Linien des Kadmiums. Die Längeneinheit war damit auf weniger als 10^{-6} ihres Betrages genau auf ein natürliches Maß zurückgeführt, dessen Unveränderlichkeit ohne Zweifel ist.

Eine zweite Auswertung wurde 14 Jahre später im Bureau International von FABRY, PÉROT und BÉNOIT durchgeführt, die, obwohl sie eine andere interferometrische Methode verwandte, auf 10^{-7} genau dieselben Ergebnisse lieferte.

2,42 *Interferenzkomparator*

Zum Vergleich von Endmaßen bis zu 100 mm Länge wurde von KÖSTERS (*209*) ein Interferenzkomparator (*Inko*) angegeben, der schematisch in der Abb. 9 dargestellt ist. Die zu vergleichenden Endmaße E_1 und E_2 werden nebeneinander auf die waagrechte, ebene Quarzplatte P aufgesprengt. Das von der Lichtquelle L kommende

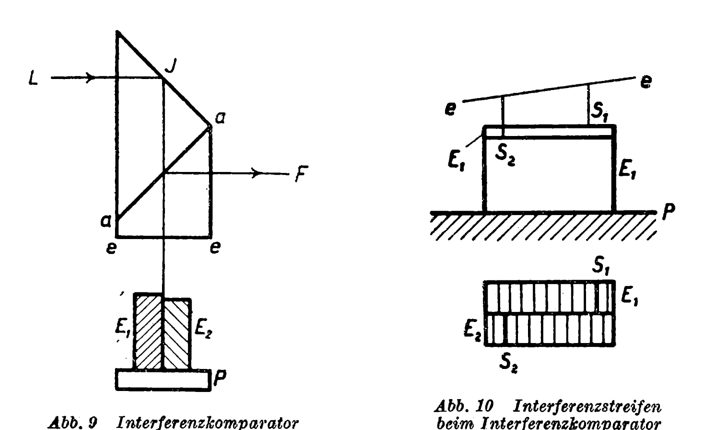


Abb. 9 Interferenzkomparator

Abb. 10 Interferenzstreifen beim Interferenzkomparator

monochromatische Licht fällt parallel in das Interferenzprisma J, durchsetzt die durchlässig versilberte Trennungsschicht a—a und fällt auf die Endflächen von E_1 und E_2. Da die Prismenfläche e—e etwas gegen P geneigt ist, entstehen im Fernrohr F Interferenzstreifen gleicher Dicke, wie das in der Abb. 10 angedeutet ist. Bei Verwendung von einfarbigem Licht ist der Abstand der interferierenden Ebenen nicht

eindeutig zu ermitteln. Er wird jedoch sichtbar, wenn man ein Linienspektrum auffallen läßt und damit farbige Streifen gleicher Ordnung bekommt. Aus Abb. 10 ist ersichtlich, daß die Streifen S_1 und S_2, deren Entstehungsorte von e—e den gleichen Abstand besitzen, dieser Forderung genügen. Wenn man den Abstand S_1—S_2 mittels Okularmikrometer festgestellt hat, kann man diesen absolut bei monochromatischem Licht in Wellenlängen ausmessen. Ist die Zahl der dazwischenliegenden Streifen z, so beträgt die Längendifferenz der Endmaße $z \cdot \frac{\lambda}{4}$, wenn λ die Wellenlänge ist, bei der die Streifenzahl bestimmt wurde. Die Entscheidung darüber, welches von den beiden Endmaßen das größere ist, gibt die Richtung, in der die Streifen wandern, wenn man das Prisma sanft nach unten drückt.

2,43 *Interferenzkomparator für absolute Messungen*

Während der im § 2,42 besprochene Inko in erster Linie Vergleichsmessungen, dient ist der von KÖSTERS (*210*) angegebene, von dem VEB CARL ZEISS gebaute Inko gleichzeitig zur absoluten Messung an Endmaßen geeignet. Abb. 11 zeigt schematisch die mechanische Anordnung der Bestandteile des Instrumentes und den Strahlengang. Das von der Lichtquelle L, einer kleinen Entladungsröhre, kommende Licht wird durch die Linse O_1 parallel gemacht, durchsetzt das um die Achse A schwenkbare und durch eine Schraube verstellbare, zusammengesetzte Dispersionsprisma konstanter Ablenkung Pr und fällt um 90° abgelenkt auf die halbdurchlässige Doppelplatte Pl. Eine Hälfte des Lichtstrahles geht nach dem ebenen Spiegel S_1 und von dort zurück durch Pl hindurch nach dem Objektiv O_2, die andere Hälfte fällt senkrecht auf die obere Fläche S_2 des Endmaßes E und die horizontal angeordnete

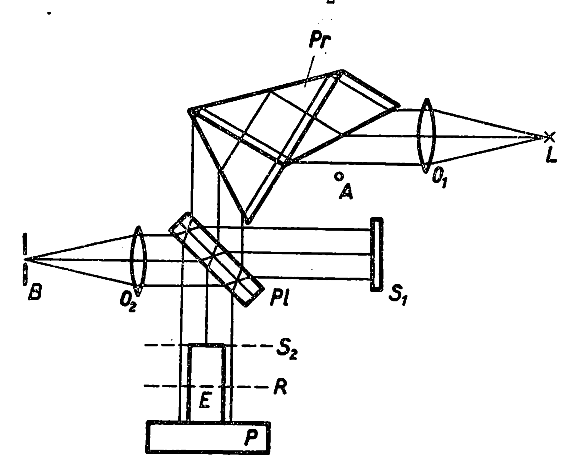


Abb. 11 Interferenzkomparator für absolute Messungen

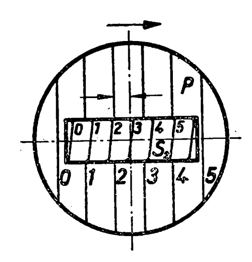


Abb. 12 Interferenzbild beim Interferenzkomparator für absolute Messungen

Grundplatte P, wird an beiden reflektiert und gelangt über Pl ebenfalls nach O_2. S_1 erscheint durch die Platte Pl bei R, der Referenzebene, abgebildet. Bilden die beiden Ebenen S_2 und R einen sehr kleinen Winkel miteinander, erscheinen wegen der Gangunterschiede zwischen R und S_2 bzw. P zwei Systeme von FIZEAU-Streifen. Der Spiegel S_1 muß jedoch senkrecht zur optischen Achse des Beobachtungsfernrohres BO_2

stehen, und sowohl P als auch S_2 sollen parallel hierzu eingerichtet sein. Dem Beobachter bietet sich das in der Abb. 12 schematisch dargestellte Interferenzbild dar. In der Mitte erscheinen die FIZEAU-Streifen des Endmaßes E, die vom Streifensystem der Grundplatte P umgeben werden. Durch Schwenken der Platte P lassen sich die von dieser herrührenden Streifen so drehen, daß sie parallel zu dem ebenfalls im Gesichtsfeld erscheinenden auf S_1 eingeritzten Strichkreuz verlaufen. Der Abstand des Markenkreuzes von den Interferenzstreifen zeigt dann an, um welchen Bruchteil einer Streifenbreite, d. h. $\lambda/2$, die obere Endmaßmitte von P entfernt ist, abgesehen von einer noch zu ermittelnden ganzen Zahl von $\lambda/2$. Die Schätzung der Bruchteile erfolgt in der Weise, daß man das Streifensystem fortlaufend in der Richtung beziffert, in der die Streifen bei leichtem Druck auf den Oberteil des Apparates wandern.

Durch Schwenken des Prismas Pr wird auf die verschiedenen Spektrallinien der Gasentladungsröhre eingestellt und für jede werden die Bruchteile der Interferenzstreifen bestimmt. Ist D die gesuchte Dicke, so gilt

$$D = (n_1 + b_1)\frac{\lambda_1}{2} = (n_2 + b_2)\frac{\lambda_2}{2} = (n_3 + b_3)\frac{\lambda_3}{2} \text{ usw.},$$

wenn die n_i die ganzen Zahlen, die b_i die überschießenden Bruchteile der Länge D in halben Wellenlängen und λ_i die Wellenlängen der verwendeten Spektrallinien bedeuten. Da die zu messenden Endmaße bis auf wenige μ bekannt sind, kann man den genauen Wert aus den Streifenbruchteilen für verschiedene Wellenlängen berechnen oder mit einem von KÖSTERS angegebenen Wellenlängenrechenschieber ermitteln. Bei Messungen höchster Genauigkeit muß die Temperatur konstant gehalten und bekannt sein. Die Dicke der zwischen Platte und Endmaß befindlichen adhärierenden Schicht beträgt etwa 0,07 μ; zu berücksichtigen sind ferner noch die Differenz der Phasensprünge an der Glas- oder Quarzplatte P und dem Stahlendmaß, die den gefundenen Wert um 0,08 μ zu klein angibt, sowie die Abhängigkeit der Wellenlänge von Luftdruck, Temperatur und Luftfeuchte. Als Lichtquellen eignen sich bis 40 mm Meßlänge Helium, bis 250 mm Krypton und bis 500 mm bei besonderer Versuchsanordnung Kadmium.

2,44 *Vergleich von Endmaßen mit Strichmaßen*

Um den Anschluß der mit Hilfe von Interferenzkomparatoren sehr genau bestimmbaren Endmaße an das internationale Meter zu gewinnen, gibt man den Endmaßen Anschiebezylinder mit Teilstrichen aus demselben Material bei. Diese werden an das Endmaß angesprengt, wodurch das Endmaß in ein Strichmaß verwandelt wird, das sich mit einem bekannten Strichmaß auf einem Komparator (§ 2,33–4) vergleichen läßt. Die Messung wird wiederholt, indem man nach Entfernen des Endmaßes die Anschiebestücke unmittelbar zur Berührung bringt, wodurch die Dicke der Zwischenschicht eliminiert wird. Die Länge des Endmaßes errechnet sich aus der Differenz der beiden gemessenen Werte.

2,45 *Optische Messung kleiner Dicken* (*237, 316*)

Dünne Drähte werden nach einem Vorschlag von KREUSLER (*213*) in der Weise gemessen, daß man nach Abb. 13 auf den Draht D eine planparallele Glasplatte P legt und bei einfarbigem Licht die Interferenzstreifen an dem Luftkeil zwischen der spie-

gelnden Unterlage und der Unterseite von P beobachtet und abzählt. In dem mit einem Okularmikrometer ausgerüsteten Mikroskop beobachtet man zwischen der Berührungslinie A und dem Draht n Interferenzstreifen, woraus sich die Drahtdicke d berechnet zu

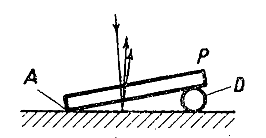


Abb. 13 Optische Messung der Dicken dünner Drähte.

$$d = n \cdot \frac{\lambda}{2}, \qquad (2/4)$$

wenn λ die verwendete Wellenlänge ist.

Dünne, parallele Plättchen (Luftschichten, dünne Kristalle, geringe Abstände spiegelnder Flächen usw.) lassen sich nach der von DORN angegebenen Methode ausmessen. Das Lichtbündel (vgl. Abb. 14) der Lichtquelle L fällt nach Reflexion an einem halbdurchlässig versilberten Spiegel S senkrecht auf das auszumessende Plättchen P, das die Dicke d besitzen möge. Dieses ist bis auf eine kleine, wenige Millimeter betragende Öffnung durch die Blende B abgedeckt. Das an den beiden Begrenzungsflächen von P reflektierte Licht interferiert und gelangt durch die Linse O in parallelem Strahl in den in Wellenlängen geeichten Spektralapparat A. Das Kontinuum erscheint von schmalen, dunklen Streifen durchzogen, da die Wellenlängen ausgelöscht erscheinen, für die die Plättchendicke ein Vielfaches der jeweiligen halben Wellenlänge ist. Für zwei benachbarte Wellenlängen λ_1 und λ_2 gilt daher

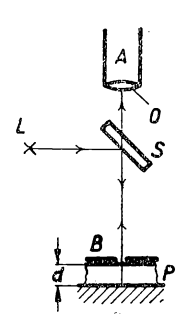


Abb. 14 Ausmessen dünner, paralleler Flächen nach DORN

$$d = n_1 \frac{\lambda_1}{2} = n_2 \frac{\lambda_2}{2}$$

für den Fall, daß der Brechungsindex des Plättchens gleich eins ist. Zählt man zwischen den Wellenlängen λ_1 und λ_2 im Spektrum $n_1 - n_2$ dunkle Streifen aus, so errechnet sich die Dicke d zu

$$d = \frac{(n_1 - n_2)\, \lambda_1\, \lambda_2}{2\,(\lambda_2 - \lambda_1)}. \qquad (2/5)$$

Gleichung (2/5) gilt für den Fall, daß der Brechungsindex eins ist, im andern Fall ist die rechte Seite durch den mittleren Brechungsindex zu dividieren.

2,5 Messung kleiner Längenänderungen durch elektrische Methoden

Während sich für absolute Längenmessungen die Interferenzmethoden hinsichtlich Genauigkeit nicht übertreffen lassen, bietet die elektrische Messung kleiner Längen nicht nur in der technischen Fertigung, sondern auch in der physikalischen Meßtechnik große Vorteile. Die Überlegenheit der elektrischen Verfahren bei sehr vielen physikalischen Messungen mechanischer Grundgrößen beruht auf steter Meßbereitschaft, großer Meßgenauigkeit und Übertragungsentfernung sowie der Möglichkeit der Aufzeichnung, Integration, Differentiation und Zählung. Eine wesentliche Rolle spielen ferner die geringe Rückwirkung der Meßeinrichtung auf den zu messenden Vorgang und die Möglichkeit, mehrere Untersuchungen gleichzeitig zu registrieren. Eine eingehende Darstellung der für die Messung der mechanischen Grundgrößen in Frage kommenden

elektrischen Verfahren ist in dem Buch von Pflier (*271*) zu finden. Eine Messung der *absoluten* Länge ist allerdings nur über die Anschlußnormalen, z. B. die Definition des elektrischen Widerstandes, möglich, wovon jedoch praktisch kein Gebrauch gemacht wird.

Im Gegensatz hierzu gibt es eine Reihe von Meßverfahren, die mit sehr großer Genauigkeit kleine Längenänderungen elektrisch zu messen gestatten. Im folgenden soll an Hand einiger Beispiele gezeigt werden, wie eine Längenänderung in eine elektrische Größe umgeformt werden kann.

2,51 *Änderung des Ohmschen Widerstandes* (*214*)

Die Proportionalität des Ohmschen Widerstandes mit der Länge des Widerstandsdrahtes ermöglicht eine genaue und empfindliche Messung kleiner und mittlerer Längen. Hierbei wird die Relativbewegung durch einen auf dem linear oder kreisförmig angeordneten Widerstandselement schleifenden Kontakt übertragen. Der Widerstand besteht oft aus einem geradlinig ausgespannten Draht geringer Temperaturabhängigkeit, zuweilen werden auch Kohle- oder Metallschichten auf keramische Träger aufgebracht, besonders, wenn es sich um relativ hohe Widerstände handelt. Bei bekanntem Widerstand pro Längeneinheit läßt sich die Längenänderung durch Absolutmessung des durch den Gleitkontakt abgegriffenen Teilwiderstandes bestimmen. Für viele Messungen ist die in Abb. 15a dargestellte Schaltung vorzuziehen. Der „Widerstandsgeber" besteht aus den dünndrahtigen Widerständen R_1 und R_2, die in der gezeichneten Weise über die Zuleitungsdrähte geringen Widerstandes R_3 und R_4 an die Stromquelle B angeschlossen sind. Die beiden Gleitkontakte K_1 und K_2 greifen jeweils einen Potentialunterschied an R_1 und R_2 ab, der sich am Spannungsmeßgerät J subtrahiert. Man erhält daher die in der Abb. 15b dargestellte lineare Abhängigkeit der gemessenen Spannung U von der Verschiebung l der Kontakte, wobei in der Mittelstellung die gemessene Spannung Null ist. In ähnlicher Weise lassen sich auch Drehwinkel messen, wenn man die Widerstände R kreisförmig anordnet.

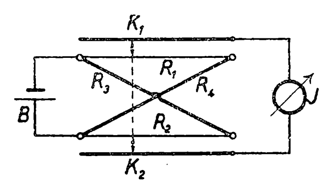


Abb. 15a Schaltung zur Messung kleiner und mittlerer Längen

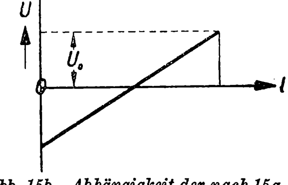


Abb. 15b Abhängigkeit der nach 15a gemessenen Spannung von der Verschiebung der Kontakte

Die Reibungskräfte der zu verstellenden Gleitkontakte lassen sich vorteilhaft durch einen Quecksilberkontakt vermeiden, wobei man den Widerstandsdraht innerhalb einer geraden oder gebogenen Glasröhre anbringt.

Für die Messung der äußerst geringen Längenänderung, die bei der Bestimmung der Kompressibilität fester Körper auftritt, hat Bridgman (*42*) ebenfalls das Widerstandsverfahren in der in Abb. 16 dargestellten Anordnung angewandt. Mit dem Versuchsstab S ist der Widerstandsdraht D verschiebbar angeordnet, der durch die Feder F mit konstantem Druck an den Kontakt C gepreßt wird. Wird an A—C eine konstante Spannung gelegt, so ist die zwischen A—B

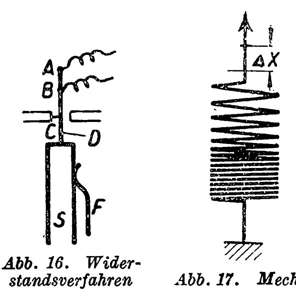


Abb. 16. Widerstandsverfahren zur Messung sehr geringer Längenänderungen.

Abb. 17. Mechanisch elektrischer Wandler nach WILDHACK

gemessene Spannung ein Maß für die jeweilige Stellung des Kontaktes C. Für noch empfindlichere Messungen ordnet man die Abschnitte A—B und B—C in einer WHEATSTONE-Brücke an und kompensiert die Veränderung des von B—C gebildeten Widerstandes. Mit diesem Verfahren gelang es, Längenänderungen von $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm zu messen.

In speziellen Anordnungen läßt sich auch ein Elektrolyt als Ohmscher Widerstand gebrauchen. Da dessen Widerstand stark temperaturabhängig ist, mißt man die gewünschte Längenänderung am besten durch das Verhältnis der Widerstände zwischen der beweglichen Mittelelektrode und zwei festen Elektroden.

Ein äußerst empfindlicher, mechanisch-elektrischer Wandler, mit dem man sehr kleine Längenänderungen in große elektrische Widerstandsänderungen übersetzen kann, wird von WILDHACK (*373*) angegeben. Wie in Abb. 17 dargestellt ist, besteht dieser Wandler aus einer zylindrischen Schraubenfeder, die so gewickelt ist, daß die Ruhespannung zweier benachbarter Windungen stetig in Längsrichtung zunimmt. In Ruhestellung liegen die Federwindungen fest an; der Widerstand entspricht etwa dem eines Zylinders. Wird die Feder an den Enden gezogen, so heben sich die Federwindungen nacheinander ab und geben zu einer stetigen Widerstandszunahme Anlaß. Die prozentuale Widerstandsänderung kann mehr als hundertmal die der Federlänge übertreffen, so daß man ohne elektrischen Verstärker bequem Längenänderungen von 1 μ messen kann. Die Federn werden aus Nickellegierungen hergestellt und zur Verhütung von Übergangswiderständen vergoldet.

2,52 *Kapazitive Methode* (*7, 149, 262*)

Mit großem Vorteil läßt sich die Messung der mit dem Abstand zweier Kondensatorplatten veränderlichen Kapazität für die genaue Bestimmung kleiner Längenänderungen zunutze machen, wie die Beispiele in § 9,2 und 11,22 zeigen. Die Kapazität eines ebenen Kondensators von der Plattengröße F und dem Plattenabstand a ist bekanntlich

$$C = \frac{\varepsilon\,\varepsilon_0 F}{a},$$

worin ε die relative Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums und ε_0 die absolute DK des Vakuums $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{11}} \frac{\text{As}}{\text{V cm}}$ bedeuten. Verändert man den Abstand a eines Luftkondensators um die im Verhältnis kleine Größe Δa, so entspricht der Abstandsänderung eine Kapazitätsänderung

$$\Delta C = -\frac{\varepsilon F \Delta a}{a(a + \Delta a)}, \tag{2/6}$$

d.h. für kleine Verschiebungen Δa wird die Kapazitätsänderung der Abstandsänderung proportional (*175*).

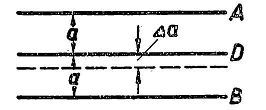


Abb. 18 Kapazitive Bestimmung kleiner Längenänderungen

Besonders zweckmäßig ist es, einen Doppelkondensator in Form des in der Abb. 18 dargestellten kapazitiven Spannungsteilers zu verwenden. Zwischen den beiden feststehenden

Platten A und B befindet sich die verschiebbare Platte D, die um den kleinen Betrag Δa verschoben sein soll. Bezeichnet man mit U die zwischen A und B liegende effektive Wechselspannung, so gilt für die Differenz der an AD bzw. DB liegenden Teilspannungen

$$\Delta U = U_1 - U_2 = U \cdot \frac{\Delta a}{a}. \tag{2/7}$$

Mittels Wechselspannungsbrücken und Hochfrequenz-Kapazitätsmeßverfahren lassen sich relative Kapazitätsänderungen $\Delta C/C$ von der Größe 10^{-5} noch messen, was bei einem Plattenabstand von 0,1 cm eine noch nachweisbare Verschiebung von 10^{-6} cm bedeutet.

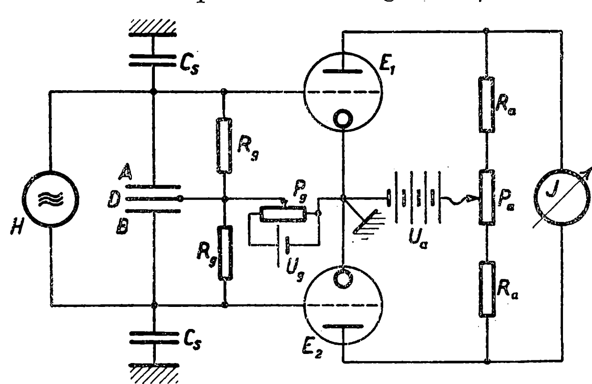


Abb. 19 Kapazitive Längenmessung mit Doppelröhrenvoltmeter

Aus der großen Zahl der möglichen und ausgeführten Meßverfahren zur Bestimmung dieser geringen Kapazitätsänderungen (*105*, *143*, *290*) ist als Beispiel das in der Abb. 19 dargestellte Doppelröhrenvoltmeter ausgewählt. Ein Hochfrequenzgenerator H erzeugt bei einer Frequenz von etwa 10^6 Hz die an den festen Platten der „Meßdose" erforderliche Meßspannung. Da die verschiebbare Mittelplatte D geerdet ist, müssen die Streukapazitäten C_s der Belege A und B in der gezeichneten Weise berücksichtigt werden. Die an A und B liegende Hochfrequenzspannung U wird aus diesem Grunde nicht im Verhältnis $\frac{C_{AD}}{C_{BD}}$, sondern wie $\frac{C_s + C_{AD}}{C_s + C_{BD}}$ geteilt. Diese Teilspannungen U_1 und U_2 liegen an den Gittern der beiden Elektronenröhren E_1 und E_2, deren Außenwiderstände R_a gleich groß sind. Mit Hilfe des Spannungsmessers J wird die an den Anoden von E_1 und E_2 liegende Spannungsdifferenz gemessen, die Null wird, wenn $U_1 = U_2$, also $\Delta a = 0$ ist. Die negative Vorspannung der Steuergitter, die durch die Widerstände R_g abgeleitet werden, liefert gemeinsam für beide Röhren die Batterie U_g, die durch das Potentiometer P_g einstellbar gemacht wird. Der genaue Abgleich der Nullstellung erfolgt mit Hilfe des Potentiometers P_a.

Bezeichnet man mit C' und C'' die beiden wirksamen Kapazitäten $C_s + C_{AD}$ bzw. $C_s + C_{BD}$, so errechnet sich die Differenz der an den beiden Gittern liegenden Teilspannungen zu $\frac{U}{2} \cdot \frac{C' - C''}{C'}$. Da der durch das Instrument J fließende Strom dieser Teilspannung proportional ist, erhält man schließlich den Ausdruck

$$\Delta U = k \cdot U \frac{C \frac{\Delta a}{a}}{C + C_s}, \tag{2/8}$$

wenn man nur kleine Verschiebungen des Abstandes zuläßt. Der Faktor k ist eine Apparatekonstante, die von den Röhrendaten und anderem abhängt. Der Instrumen-

tenausschlag ist also der Längenänderung $\Delta\, a$ proportional und wird um so größer sein, je geringer das Verhältnis der Streukapazität zur Meßkapazität ist.

Neben diesen direkten Verfahren, bei denen der kapazitive Spannungsabfall am Meßkondensator als Meßgröße dient, zeichnen sich vor allem die Hochfrequenzverfahren durch eine sehr große Meßempfindlichkeit aus. So werden beim Schwebungsverfahren zwei Hochfrequenzschwingungskreise von nahezu gleicher Frequenz gegeneinander geschaltet, so daß ein Schwebungston (Differenz der beiden Frequenzen) konstanter Frequenz zu hören ist. Legt man in den einen Schwingungskreis den Meßkondensator, so rufen dessen Änderungen eine Frequenzänderung des Schwebungstones hervor. Da diese nur von der Differenz der Frequenzen abhängt, die vom Meßkondensator hervorgerufene Frequenzänderung des Schwingungskreises jedoch der Frequenz proportional ist, läßt sich die Meßempfindlichkeit durch Wahl hoher Trägerfrequenzen fast beliebig steigern.

Diese auch als *Ultramikrometer* bezeichneten Anordnungen, deren relative Empfindlichkeit bis zu 10^{-7} gesteigert werden kann, werden ausführlicher in Bd. III besprochen. Als erste haben damit WIDDINGTON (*371*) und DOWLING (*68*) die kapazitive Längenmessung verwirklicht.

2,53 *Induktive Längenmessung* (*62, 123, 174*)

Die Induktivität eines geschlossenen, gleichförmig bewickelten Solenoids, dessen mittlere Länge l und dessen Querschnitt F beträgt, ist bekanntlich

$$L = \frac{0{,}4\,\pi\, w^2 F}{l}\,\mu\, 10^{-8}\,\text{Hy}, \tag{2/9}$$

wenn w die Windungszahl und μ die Permeabilität des Mediums im Spuleninnern (für Luft = 1) ist. Enthält das Spuleninnere einen ferromagnetischen Kern (großes μ), so ist zu beachten, daß die Induktivität L nun auch von der magnetischen Induktion, d. h. vom Spulenstrom abhängig ist. Im allgemeinen Fall wird die Induktivität einer Wicklung mit w Windungen

$$L = 0{,}4\,\pi \frac{w^2}{R_m}\, 10^{-8}\,\text{Hy}, \tag{2/10}$$

wenn man mit R_m den magnetischen Widerstand des von der Wicklung umschlungenen magnetischen Kreises bezeichnet. Setzt sich nun der magnetische Widerstand aus einem Luftspalt und dem Eisenweg mit seinem viel geringeren magnetischen Widerstand zusammen, wie es z. B. bei der in der Abb. 20 dargestellten Drosselspule der Fall ist, so läßt sich die Induktivität dieser Drossel durch Variation des Spaltes d in weiten Grenzen ändern. Bezeichnet l_f die Länge des Eisenkerns, F dessen Querschnitt und μ dessen relative (unverändert angenommene) Permeabilität, so berechnet sich die Induktivität zu

Abb. 20 Drosselspule zu induktiven Längenmessungen

$$L = \frac{w^2 F}{\dfrac{l_f}{\mu} + 2\,d}\, 0{,}4\,\pi\, 10^{-8}\,. \tag{2/11}$$

Wird nun der Abstand d des Ankers um die kleine Größe $\Delta\, d$ verringert, so erhöht sich die Induktivität L um den Betrag

$$\Delta L = \frac{2\,\mu_0\, w^2 F}{\left(\frac{l_f}{\mu} + 2\,d\right)^2}\,\Delta\, d. \tag{2/12}$$

Die Induktivität L und damit auch der Blindwiderstand ωL (ω = Kreisfrequenz) der Spule sind also bei kleinen Abstandsänderungen eine lineare Funktion von d, weshalb eine solche Anordnung zur Messung kleiner Längenänderungen mit Vorteil verwendet werden kann. Die vollständige Schaltung einer Meßanordnung mit einer Doppeldrossel zur Messung kleiner Verschiebungen ist in Abb. 21 dargestellt. Zwischen den beiden sich gegenüberstehenden Eisendrosseln D_1 und D_2 ist ein beweglicher Anker A angeordnet. Durch den Stift T wird die zu messende Längenänderung auf diesen übertragen, wodurch sich die Induktivität der einen Spule vergrößert, während die der anderen Drossel abnimmt. D_1 und D_2 sind zusammen mit den beiden Drosseln D_3 und D_4 konstanter Induktivität als Wechselspannungsbrücke geschaltet, die durch die Wechselspannungsquelle B konstanter Spannung gespeist wird. An der Brückendiagonalen liegt über die beiden Gleichrichter G das Meßgerät J, das unmittelbar in Längenangaben geeicht werden kann.

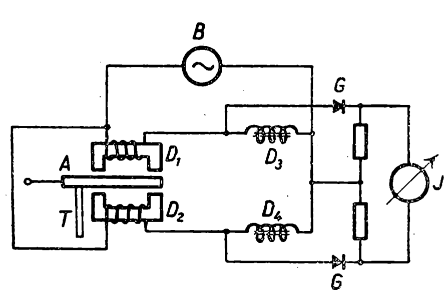


Abb. 21 Induktive Längenmessung

Nach FROBÖSE (*106*) und FROBÖSE und SCHÖNBACHER (*107*) lassen sich mit einer Einrichtung dieser Art bei einem Meßbereich von $\pm$ 50 μ Längenänderungen mit einer Genauigkeit von $\pm$ 1 μ bestimmen. Die relative Genauigkeit dieser Instrumente und solcher anderer Bauart liegt im allgemeinen bei $\pm$ 1%.

Diese als *elektrische Mikrometer* bezeichneten Meßgeräte dienen vorwiegend der Kontrolle der Maßhaltigkeit von Massenerzeugnissen, in vielen Fällen lassen sie sich jedoch auch für physikalische Messungen gut verwenden (*246*). Die kleinste noch nachweisbare Längenänderung liegt bei etwa 10^{-8} cm.

2,6 Messung von Winkeln

2,61 *Winkeleinheiten*

Die Kreisteilung in 360° ist in der physikalischen Praxis fast ausnahmslos in Gebrauch. Daneben gewinnt die bereits 1782 von LAGRANGE empfohlene dezimale Unterteilung des Kreises immer mehr an Boden, zudem die erforderlichen Rechentafeln schon seit langer Zeit vorhanden sind. Die beiden Systeme sind:

$$\text{Sexagesimalteilung: } 1 \text{ Quadrant} = 90° = 5400' = 324000'',$$
$$\text{Zentesimalteilung: } 1 \text{ Quadrant} = 100^g = 10000^{c} = 1000000^{cc}.$$

Daraus ergeben sich die Umrechnungen:

$$1° = 1{,}111\ldots^g; \quad 1' = 1{,}8518^{c}; \quad 1'' = 3{,}08642^{cc}$$

und

$$1^g = 0°\,54'; \quad 1^{c} = 0'\,32{,}4''; \quad 1^{cc} = 0{,}324''.$$

Die *Sexagesimalteilung* wird in die dezimale verwandelt, indem man die Minuten und Sekunden der S.-Teilung in Grad ausdrückt und diese Gradzahl um den neunten Teil vermehrt. Beispiel: $54^\circ\,18'\,43'' = 54{,}312^\circ = (54{,}312 + 6{,}035)^g = 60{,}0347^g$.

Die Dezimaleinteilung wird in die sexagesimale verwandelt, wenn man von der D.-Teilung den 10. Teil abzieht und die Dezimalstellen in Minuten und Sekunden umrechnet. Beispiel: $60{,}035^g = (60{,}035 - 6{,}003)^g = 54{,}032^\circ = 54^\circ\,18'\,43''$.

Zur Herstellung sehr genauer Kreisteilungen werden sorgfältig ausgeglichene Mutterteilungen in derselben Weise, wie bei der Komparator-Teilmaschine für Längenmaße unter dem Mikroskop auf den einzuteilenden Kreisring aufgetragen. Weniger genaue Teilungen werden mit Hilfe der automatischen Kreisteilmaschine hergestellt, bei der die Mutterteilung in Form eines Zahnkranzes vorliegt, in den eine sog. Globoidschraube eingreift und ohne Spiel diesen um die gewünschte Winkeländerung weiterdrehen kann.

Da eine sorgfältig ausgeführte Teilung sowohl für astronomische als auch für geodätische Beobachtungen von ausschlaggebender Bedeutung ist, sind eine Reihe von Verfahren entwickelt worden, um Kreisteilungen sehr genau prüfen zu können (*53, 163*). Die hauptsächlichsten Kreisteilungsfehler teilt man in gesetzmäßige und unregelmäßige ein. Die ersteren können durch Achsenfehler der benutzten Teilmaschine oder durch Temperaturschwankungen während der Teilarbeit hervorgerufen werden. Die unregelmäßigen Fehler können von einer fehlerhaften Einstellung der einzelnen Striche und von Materialfehlern herrühren. Dazu kommt noch der sehr verbreitete Fehler der sog. Exzentrizität, von dem man spricht, wenn die Umdrehungsachse des Instrumentes mit dem geometrischen Teilkreismittelpunkt nicht zusammenfällt.

2,62 *Theodolit*

Zur Messung beliebig großer Winkel in der Horizontalen und Vertikalen dient der Theodolit. Dieser besteht aus einem Beobachtungsfernrohr mit Fadenkreuz, das sowohl um eine horizontale als auch vertikale Achse geschwenkt werden kann. Die genaue horizontale Einstellung der Fernrohrachse beim Teilstrich Null der Höhenteilung wird mit einer Libelle (§ 2,65) vorgenommen, die fest mit dem Fernrohrträger verbunden ist. Die senkrechte Einstellung der Fernrohrachse wird geprüft, indem man das Fernrohr um diese bei aufgesetzter Libelle dreht. Ändert sich bei der Drehung die Einstellung der Libelle nicht mehr, so steht die Achse genau senkrecht. Mit der Fernrohrachse und der Gabel, in der diese gelagert ist, sind je ein Präzisionsteilkreis verbunden, die mittels Lupe und Nonius auf einige Sekunden genau ablesbar sind. Die Exzentrizität der Teilkreise wird ausgeschaltet, indem man beide um 180° verdrehte Nonien abliest und mittelt. Zur Prüfung, ob die durch das Fadenkreuz bezeichnete Sehlinie auf der Vertikalachse senkrecht steht, das ist die Feststellung des sog. Kollimationsfehlers, stellt man auf ein in der Horizontalebene des Instrumentes gelegenes Objekt ein, dreht den Horizontalkreis um genau 180° und stellt das Fernrohr, indem man es ebenfalls um 180° umkippt, in seine frühere Richtung ein. Das Objekt muß wieder genau anvisiert sein.

2,63 *Spiegelablesung*

In Abb. 22 ist eine schematische Darstellung der POGGENDORFFschen Spiegelablesung wiedergegeben. An dem sich drehenden Teil des Gerätes (Galvanometer,

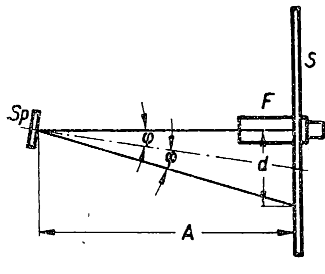


Abb. 22 POGGENDORFFsche Spiegelablesung

Pendel, Dehnungsmesser usw.), dessen Winkeldrehung bestimmt werden soll, ist ein kleiner Spiegel Sp angebracht. Im Abstand A von diesem Spiegel und in der Ebene der Spiegelnormalen ist eine beleuchtete Millimeterskala S aufgestellt. Das von S reflektierte Bild der Skala wird mit dem Fernrohr F beobachtet und die Skalenteile am Fadenkreuz abgelesen. Gewöhnlich stellt man F so auf, daß bei nicht abgelenktem Spiegel der mittlere Teil der Skala erscheint. Für den zu messenden Winkel φ gilt dann

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{d}{A}, \tag{2/13}$$

wenn d die im Längenmaß festgestellte Auslenkung von der Nullstellung ist. An Stelle der subjektiven Beobachtung ersetzt man häufig (weil einfacher, aber ungenauer) das Fernrohr durch ein Glühlämpchen mit geradem Faden, dessen vergrößertes Bild durch eine Linse oder den als Hohlspiegel ausgebildeten Spiegel Sp auf der mattierten Skala entworfen wird. Mißt man φ in Grad, so gilt für kleine Winkel bis 5° mit guter Annäherung

$$\varphi = 28{,}648° \cdot \frac{d}{A}, \tag{2/14}$$

für größere Ausschläge entwickelt man in die Reihe

$$\varphi = 28{,}648° \cdot \frac{d}{A}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{d}{A}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{d}{A}\right)^4 \ldots\right] \tag{2/15}$$

Um die absolute Größe des Winkels φ genau errechnen zu können, ist die genaue Kenntnis von A erforderlich. Bei Verwendung eines rückseitig versilberten Spiegels der Dicke s vom Brechungsindex n ist der bis zur Spiegelvorderseite gemessene Abstand um s/n zu vermehren. Liegt zwischen Spiegel und Skala eine feste Glasplatte (bei luftdicht gekapselten Instrumenten), deren Dicke s' sei, muß von dem gemessenen Skalenabstand die Dicke $s' \cdot \frac{n-1}{n}$ abgezogen werden.

Ist aus räumlichen Gründen nur ein mäßiger Abstand der Skala vom Instrumentenspiegel möglich, so läßt sich A durch Einschalten mehrerer fest angeordneter Spiegel, an denen der Lichtstrahl mehrfach reflektiert wird, trotzdem groß machen („Multiflex"-Galvanometer) (*167*).

Das oft störende „Nicken" des Spiegelbildes läßt sich nach NORTHRUP dadurch vermeiden, daß man den beweglichen Spiegel aus zwei unter etwa 90° zusammenstoßenden Spiegeln mit waagerechter Trennungslinie zusammensetzt.

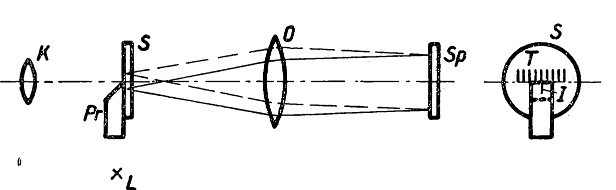


Abb. 23 Autokollimationsfernrohr nach GEHLHOFF

Für kleine Winkeländerungen bis etwa 2° bietet gegenüber der POGGENDORFFschen Methode das Autokollimationsfernrohr nach GEHLHOFF (*119*) einige Vorteile. Die Anordnung geht aus der Abb. 23 hervor. In der Brennebene des Fern-

rohrobjektes O befindet sich die Glasplatte S, auf der die Teilung T mit einem längeren Strich J aufgeätzt ist. Der Indexstrich wird durch das kleine, totalreflektierende Prisma Pr und das Lämpchen L von hinten beleuchtet. Das von dem drehbaren Spiegel Sp zurückgeworfene Bild erscheint nun auf der Teilung der Skala T als dunkler Strich auf hellem Hintergrund und wird durch das Okular K beobachtet. Der wesentliche Vorteil dieser Anordnung gegenüber der gewöhnlichen Spiegelanordnung besteht darin, daß der abgelesene Ausschlag lediglich von der bekannten, unveränderlichen Brennweite des Objektives O abhängt, da der Spiegel von parallelem Licht getroffen wird. Ein etwas komplizierteres Autokollimationsfernrohr wurde von WRIGHT (*376*) angegeben.

Ohne die Frage der Messung sehr kleiner Winkeländerungen an dieser Stelle berühren zu wollen (über BROWNsche Bewegung § 2,64), sollen die Möglichkeiten erwähnt werden, wodurch kleine Ausschläge stark vergrößert beobachtet werden können (*6*). MOLL und BURGER (*253*) haben zu diesem Zweck ein „*Thermorelais*" angegeben, das aus einer Vakuum-Thermosäule besteht, deren beide Lötstellen eng beieinander liegen. Fällt der vom beweglichen Spiegel kommende Lichtstrahl in scharfer Abbildung zwischen beide Lötstellen, werden beide gleich stark erwärmt und im angeschlossenen Strommeßgerät wird kein Ausschlag hervorgerufen. Eine sehr kleine Drehung des Spiegels genügt, um einen stark vergrößerten Ausschlag des zweiten Instrumentes zu erzeugen. Für geringe Winkeländerungen ist jener dem Winkel proportional.

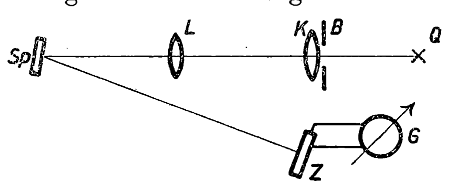


Abb. 24 Messung kleiner Winkeländerungen mit Hilfe einer Photozelle

Diese Methode läßt sich wesentlich empfindlicher gestalten, wenn man als Empfänger eine Photozelle verwendet, wie von BERGMANN (*24*) vorgeschlagen wurde. Der Aufbau geht aus der Abb. 24 hervor. Sp sei der Spiegel, dessen Drehbewegung vergrößert werden soll. Bei B ist eine rechteckige Blende angebracht, die durch den Kondensor K und die Linse L über Sp auf einer Photozelle Z abgebildet wird, deren Eintrittsöffnung dieselbe Größe und Form wie das von B entworfene Bild hat. Der Photostrom wird durch das Galvanometer G gemessen. In der Nullage des Spiegels Sp fällt nur ein sehr schmaler Streifen des Blendenbildes auf die Öffnung der Photozelle. Bei Drehung von Sp wandert das Blendenbild über die Öffnung und erzeugt somit im Galvanometer G einen Ausschlag, der der auffallenden Lichtintensität, d. h. der Spiegeldrehung, proportional ist. Das Vergrößerungsverhältnis, d. h. der Quotient aus den Winkeländerungen der Spiegel von Sp und G, hängt natürlich von der Intensität der Lichtquelle Q und der photoelektrischen Empfindlichkeit des Empfängers ab. Nach Messungen von BARNES und MATOSSI (*12*) läßt sich mit der beschriebenen Anordnung eine etwa 1000fache Vergrößerung erzielen; ersetzt man nach einem Vorschlag von PFUND (*273*) die Blende B in Abb. 24 durch ein Strichraster (ebenso die Blende vor der Zelle *Z*), so kommt man noch auf den zehnfach höheren Betrag, wohingegen die von MOLL und BURGER angegebene Methode um eine Zehnerpotenz unempfindlicher ist.

2,64 *BROWNsche Bewegung* (*282*)

Einer unbeschränkten Steigerung der Meßempfindlichkeit bei der Beobachtung kleiner Winkel durch Vergrößerung des Abstandes *A* wird durch unregelmäßige

Schwankungserscheinungen eine Grenze gesetzt. Die zuerst an sehr kleinen in einer Flüssigkeit suspendierten Teilchen 1827 von BROWN beobachtete Zitterbewegung wird von den unregelmäßig erfolgenden Stößen der Flüssigkeitsmoleküle hervorgerufen. Die daraus resultierende Bewegung, d. h. Verschiebung in einem bestimmten Zeitabschnitt, wird umso größer zu erwarten sein, je kleiner das Teilchen ist und je beweglicher es ist. Bei der quantitativen Erforschung der Bewegung muß man sich klarmachen, daß der von den Teilchen zurückgelegte Weg eine unregelmäßige Zickzackkurve ist, aus der man nur die mittlere Verschiebung während eines kleinen Zeitintervalls experimentell bestimmen kann. Aus der von EINSTEIN (*81*) und gleichzeitig von SMOLUCHOWSKI (*328*) auf verschiedener Grundlage aufgestellten Theorie der BROWNschen Bewegung folgt nun

$$\overline{\Delta_x^2} = \frac{k\,T}{3\pi\eta r}\,t\,. \tag{2/16}$$

Das mittlere Verschiebungsquadrat $\overline{\Delta_x^2}$ in der X-Richtung wird dadurch bestimmt, daß die von einem Teilchen in der X-Richtung während vieler Zeitintervalle von gleicher Größe t erfahrenen Verschiebungen gemessen, quadriert und summiert werden; die Summe wird durch die Zahl der Beobachtungen dividiert. k ist die sog. BOLTZMANN-Konstante ($k = 1{,}372 \cdot 10^{-16}$ erg/° C), T die absolute Temperatur und η der Koeffizient der inneren Reibung der Flüssigkeit bzw. des Gases. Die Beziehung (2/16) ist für runde Teilchen vom Radius r abgeleitet.

In ähnlicher Weise lassen sich auch die Rotationsschwankungen kleiner Teilchen berechnen. Nach POSPI˘IL (*279*) erhält man hierfür den analogen Ausdruck

$$\overline{\Phi_z^2} = \frac{k\,T}{4\,\pi\,\eta\,r^3}\,t\,, \tag{2/17}$$

wenn $\overline{\Phi_z^2}$ das mittlere Schwankungsquadrat des Winkels Φ um die Z-Achse bedeutet. In beiden Gleichungen (2/16) und (2/17) hängt die Größe der Schwankungen von der mittleren kinetischen Energie der stoßenden Flüssigkeits- bzw. Gasmoleküle ab, die der absoluten Temperatur T proportional ist.

Auch der in diesem Zusammenhang interessierende Fall der Winkelschwankungen eines nichtfreien Systems ist theoretisch behandelt worden. ISING (*180*) entwickelte die Theorie der BROWNschen Schwingungen eines Galvanometersystems und erhielt die durch die Winkelschwankungen vorgetäuschte mittlere Stromschwankung

$$\overline{(i - \bar{i})^2} = \frac{\pi\,k\,T}{R\,\tau}\,, \tag{2,18}$$

wo R der Widerstand des Stromkreises und τ die Schwingungsdauer des Systems ist. Die mittlere Winkelschwankung wird im allgemeinen um so geringer sein, je größer das Trägheitsmoment des Systems, je geringer die Temperatur und je größer die Dämpfung des Systems ist. GERLACH und LEHRER (*121*) beobachteten die Schwankungen eines Spiegels von $0{,}8 \cdot 1{,}6$ mm² Fläche, der an einem sehr dünnen Quarzfaden hing, wobei die BROWNsche Bewegung bei 1,5 m Skalenabstand einige Zentimeter betrug.

Zur Vermeidung dieser Schwankung kann man empfindliche Systeme von Drehwaagen, Galvanometern usw. in einem luftdichten Gehäuse aufhängen, das man evakuiert oder mit Gas von hohem Druck füllt.

2,65 *Libelle*

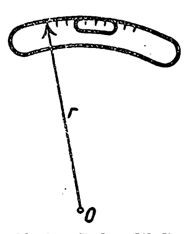


Abb. 25 Röhrenlibelle

Die *Röhrenlibelle* besteht aus einem tonnenförmig ausgeschliffenen Glasrohr, das mit einer leicht beweglichen Flüssigkeit (Äther, Toluol, Alkohol) bis auf eine Dampfblase gefüllt und zugeschmolzen ist. Steht die Krümmungsebene senkrecht, so stellt sich die Blase in den Scheitel der Innenwandung ein. An der außen eingeätzten Skala (Abb. 25) läßt sich die Stellung der Blase ablesen. Die Libelle wird fast ausschließlich als Nullgerät gebraucht und besitzt daher keine bezifferte Teilung.

Sind r der Krümmungsradius der Erzeugenden der Innenfläche und a der Ausschlag der Blase, so beträgt der Neigungswinkel

$$\varphi = \frac{a}{2\pi r} = \frac{206{,}3}{r}, \qquad (2{,}19)$$

wenn φ in Sekunden angegeben und r in Meter gemessen wird. So wird z. B. für $\varphi = 2{,}5''$ und $a = 2$ mm der Krümmungsradius $r = 82{,}5$ m.

Unter der Empfindlichkeit einer Libelle versteht man den in Sekunden gemessenen Neigungswinkel für ein Strich Blasenverschiebung. Die hauptsächlichsten Ursachen der systematischen Libellenfehler sind Fassungs- und Temperaturfehler. Die Fassung soll das Glasrohr ohne mechanische Spannung umfassen, eine nachträgliche Justierung erlauben und zugleich die Libelle gegen ungleichmäßige Erwärmung und Bestrahlung schützen. Zur Berichtigung wird die Libelle auf eine neigbare Unterlage aufgesetzt und um 180° jeweils gedreht, bis sie genau justiert ist. Durch einseitige Bestrahlung ändert sich die Adhäsion am Glasrohr ungleich, wodurch die Blase zur wärmeren Seite hin verschoben wird. Eingehende Untersuchungen an einer Sekundenlibelle liegen von WANACH (*365*) vor.

Zur Bestimmung der Neigung in zwei Koordinaten benutzt man für genaue Messungen zwei um 90° versetzte Libellen oder auch die weniger genaue *Dosenlibelle*. Diese besteht aus einem flachen zylindrischen Glasgefäß, dessen ebener Deckel innen kugelig ausgeschliffen ist und außen eine Kreismarke trägt. Die Einstellsicherheit beträgt etwa 1 bis 5′.

2,7 **Bestimmung des Flächeninhaltes**

2,71 *Durch Auszählen*

Die auszumessende Fläche wird auf Millimeterpapier übertragen oder mit durchsichtigem Millimeterpapier überdeckt. Die innerhalb der umrandeten Fläche gelegenen ganzen Quadrate werden gezählt. Hierzu wird die halbe Summe der von der Berandung geschnittenen Quadrate addiert. Man kann auch die Fläche in gleich breite, schmale Streifen unterteilen und die einzelnen Längen mit dem Stechzirkel zusammenzählen.

2,72 *Durch Auswägen*

Die auszumessende Fläche wird aus Karton oder Blech ausgeschnitten und gewogen. Durch Vergleich mit dem Gewicht der Flächeneinheit läßt sich die Fläche berechnen.

2,73 *Planimeter*

Zur mechanischen Ausmessung von Flächen, statischen Momenten und Trägheitsmomenten einer gegebenen Figur wird das Planimeter verwendet, dessen Theorie und Anwendung eingehend in den Arbeiten (*255, 374*) beschrieben wird.

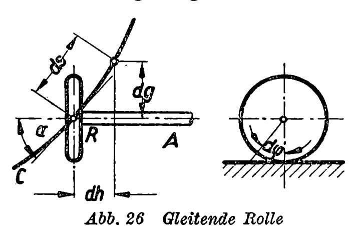


Abb. 26 Gleitende Rolle

Abb. 27 Planimeter

Sie beruhen alle auf den Eigenschaften der gleitenden Rolle, deren Wirkungsweise in Abb. 26 erläutert ist. Wird die Rolle R mit glattem Rand auf einer Kurve C längs des Wegelements ds so geführt, daß ihre Achse A mit C den Winkel α bildet, und zerlegt man ds in die Komponenten dg und dh, so liefert nur dg einen Beitrag zur Drehung der Rolle um den Winkel $d\varphi$. Bezeichnet man mit r den Rollenradius, so gilt

$$r\,d\varphi = d\,s \cdot \sin\alpha\,. \qquad (2/20)$$

Das Planimeter mit der gleitenden Rolle besteht, wie in der Abb. 27 angedeutet, aus der Stange AB von der Länge l, die in der Entfernung a über B hinaus die Rolle R trägt. Es wird in der Weise benutzt, daß man mit dem als „Fahrstift" ausgebildeten Punkt A die zu planimetrierende Fläche F längs der Kurve C umfährt, wobei B gezwungen wird, auf einer gegebenen, zunächst beliebigen „Leitkurve" C′ zu bleiben. Wie man leicht erkennen kann, überstreicht die Gerade A B beim Umfahren der Kurve C eine Fläche, die mit Ausnahme der zu bestimmenden doppelt überdeckt ist. Die außerhalb F überstrichene Fläche ist Null zu setzen, da die Rolle jedes Wegelement in beiden Richtungen durchfährt. Betrachtet man die Elementarverschiebung der Stange A B R nach A′B′R′ und berechnet das hierbei von A B bestrichene Flächenelement $dF =$ A A′B′B, so gilt

$$d\,F = l\,d\,s\,\sin\alpha + \frac{l^2}{2}\,d\,\psi\,. \qquad (2/21)$$

Zugleich hat die Rolle R den Weg $d\,\sigma$ zurückgelegt, der mit ds verknüpft ist durch

$$ds\,\sin\alpha = d\sigma\,\sin\alpha' + a\,d\psi\,. \qquad (2/22)$$

Gleichung (2/22) in (2/21) eingesetzt ergibt

$$d\,F = l\,d\sigma\,\sin\alpha' + \left(a\,l + \frac{l^2}{2}\right) d\psi\,. \qquad (2/23)$$

Das erste Glied der rechten Seite von Gleichung (2/23) ist aber nichts anderes als die in Gleichung (2/20) festgestellte Rollendrehung $r\,d\,\varphi$, so daß man schreiben kann

$$d\,F = l\,r\,d\varphi + \left(a\,l + \frac{l^2}{2}\right) d\,\psi\,. \qquad (2/24)$$

Durch Integration bekommt man schließlich

$$F = l\,r\,(\varphi_1 - \varphi_2) + \left(a\,l + \frac{l^2}{2}\right)(\psi_1 - \psi_2)\,, \qquad (2/25)$$

wenn die End- und Anfangsstellung der Rolle φ_1 bzw. φ_2 und ψ_1 bzw. ψ_2 die dazugehörigen Winkel der Stange A B bedeuten. Umschließt die zu planimetrierende Kurve C nicht die Leitkurve C′, wird $\psi_1 = \psi_2$ und damit

$$F = l\,r\,(\varphi_1 - \varphi_2)\,.$$

Wird C′ von C umschlossen, gilt

$$F = l\,r\,(\varphi_1 - \varphi_2) + \left(a\,l + \frac{l^2}{2}\right) 2\,\pi\,.$$

Die verbreitetste Planimeterform ist das in der Abb. 28 schematisch dargestellte *Polar-Planimeter*, bei dem die Leitkurve C′ ein Kreisbogen ist. Dieser wird dadurch hergestellt, daß man den Punkt B durch den Polararm P B an den auf der Zeichenebene festliegenden Pol P heftet. Die Rolle R ist mit einer Winkelteilung T versehen und treibt über die Schnecke S die im Verhältnis 1 : 10 untersetzte Zehnerscheibe Z an, die ebenfalls mit einer Kreisteilung versehen ist. Bei einer anderen, ebenfalls viel verwendeten Bauart, dem *Linearplanimeter*, wird die Leitkurve von einer Geraden dargestellt. Zu diesem Zweck wird der Punkt B auf einem Wagen festgehalten, der längs einer Geraden auf der Zeichenebene rollt.

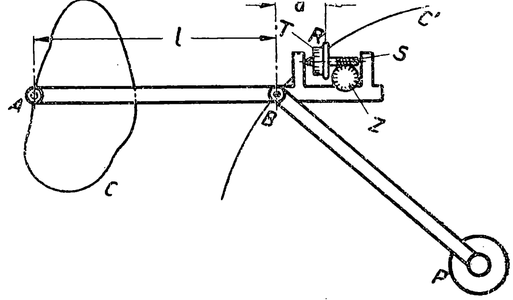


Abb. 28 Polar-Planimeter

§ 3 ZEITMESSUNG

3,1 Zeiteinheiten

Die Einheit der physikalischen Zeitbestimmung wird von der Umdrehung der Erde gegenüber dem Fixsternraum abgeleitet. Die Gleichförmigkeit der Erdumdrehung kann trotz veränderlicher meteorologischer Verhältnisse, Flutreibung und Kontraktion des Erdkörpers als gesichert gelten, doch liegt die mutmaßliche Unregelmäßigkeit der Erddrehung von etwa $3 \cdot 10^{-9}$ bereits innerhalb der Fehlergrenze der heute verfügbaren genauesten Uhren. Die fundamentale Zeiteinheit ist der *Sterntag* als die Zeit einer Umdrehung der Erde gegenüber dem Fixsternraum. Diese Zeitdifferenz wird gemessen durch Beobachtung zweier aufeinanderfolgender Kulminationen eines beliebigen Fixsternes. Man beobachtet den Durchgang eines „Zeitsterns" durch das Fadenkreuz eines Meridianfernrohres (*304*).

Die bei der astronomischen Zeitbestimmung auftretenden Fehler sind: 1. Seitenrefraktionsfehler infolge Beugung des vom Stern einfallenden Lichtstrahls in der Atmosphäre; 2. Aufstellungsfehler des Fernrohres und Verzögerung der Registriereinrichtung; 3. persönliche Gleichung (das ist Zeitunterschied zwischen Beobachtung und Auslösen der Registrierung) des Beobachters. Um die Summe dieser drei Fehler möglichst klein zu halten, wird eine größere Anzahl von Zeitsternen beobachtet. Trotzdem beträgt der mittlere Fehler einer solchen Zeitbestimmung etwa $\pm$ 0,02 s.

Die Länge des Sterntages ist gemessen zu 86164,091 s.

Der wahre *Sonnentag* ist die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen der Sonne; er ist kein gleichförmiges Zeitmaß, da die Sonnenbahn gegen den Äquator verschieden geneigt ist und zudem deren Flächengeschwindigkeit, aber nicht die Winkelgeschwindigkeit, eine Konstante ist. Die dem physikalischen Maßsystem zugrunde gelegte Zeiteinheit, die Sekunde, ist der 86400ste Teil des mittleren Sonnentages. Sternzeit und Sonnenzeit sind Ortszeiten. Der Unterschied zweier Ortszeiten ist aus der geographischen Längendifferenz zu ermitteln.

3,2 Allgemeines über Uhren

Sowohl im täglichen Leben als auch für wissenschaftliche Zwecke verwendet man als Zeitmesser Uhren im engeren Sinne. Das sind Vorrichtungen, die zur Zeitanzeige einen möglichst gleichförmigen Schwingungsvorgang benutzen, wobei die Anzahl dieser Schwingungen gezählt wird. Je nach der Art der Schwingungserzeugung pflegt man zu unterscheiden:

1. *Pendeluhren,* deren Zeitmeßvorrichtung ein durch ein Gewicht oder elektromagnetisch angetriebenes Pendel ist,
2. *Unruhuhren,* verwenden eine Drehschwingungen vollführende Unruhe.
3. *Elektrische Uhren,* deren Schwingungsdauer außerordentlich klein ist und die gewöhnlich einen elastischen Schwinger als Zeitnormal besitzen.

Die Zeitangaben einer Uhr werden durch nachstehende Größen gekennzeichnet: *1. Stand, 2. Gang, 3. Gangschwankung.* Der *Stand* der Uhr ist der Unterschied ihrer wirklichen Zeitangabe gegen jene Zeit, die sie anzeigen soll, also mittlere Sonnen- oder Sternzeit. Sein Vorzeichen ist positiv oder negativ, je nachdem die Uhr vor- oder nachgeht. Der Stand ist kein Uhrenfehler, man kann ihn durch Stellen des Zeigers beseitigen.

Der *Gang* der Uhr ist die Änderung ihres Standes innerhalb 24 Stunden. Das Vorzeichen kann positiv oder negativ sein, je nachdem der Stand ab- oder zugenommen hat, so daß die Addition des Ganges zur Angabe der Uhr ihren richtigen Stand ergibt. Der Gang wird somit mathematisch ausgedrückt durch den ersten Differentialquotienten des Standes nach der Zeit. Solange der Gang konstant ist, stellt er keinen Fehler der Uhr dar, da er durch Einregeln (Verstellen der Pendellinse, Zulagegewicht, Änderung des Luftdruckes oder Temperatur usw.) beseitigt werden kann. Bei Präzisionsuhren ist es besser, ihn rechnerisch zu berücksichtigen.

Die *Gangschwankung* ist die Änderung des Ganges innerhalb 24 h; sie kann positiv oder negativ sein und ergibt zum Gang addiert den wahren Gang. Sie wird mathematisch durch den zweiten Differentialquotienten des Standes nach der Zeit ausgedrückt und gibt ein Maß für den Fehler und die Zuverlässigkeit einer Uhr.

3,3 Mechanische Uhren *(260)*

Jede Uhr im engeren Sinne besteht aus den zwei Hauptteilen: Gehwerk und Zeigerwerk. Das meist mit dem Gehwerk verbundene Zeigerwerk besteht aus dem Zeiger und dem Zifferblatt, auf dem der Stand abgelesen werden kann. Das Gehwerk läßt sich unterteilen in: 1. *Antrieb,* der die zum Betrieb der Uhr erforderliche Energie aufbringt (Sinken eines Gewichtes, Entspannen einer Feder, elektrische Kraftquelle); 2. *Laufwerk,* ein Zahnradgetriebe, welches das vom Antrieb ausgeübte Drehmoment in

geeigneter Weise untersetzt; 3. *Hemmung*, hemmt durch periodische Freigabe des Hemmrades den Ablauf des Laufwerkes und treibt den Gangregler an; 4. *Gangregler*, der eigentliche zeitmessende Hauptbestandteil (Pendel oder Unruh).

3,31 *Hemmung*

Aus der großen Zahl der im Laufe der Uhrenentwicklung konstruierten Hemmvorrichtungen seien nur einige wichtige aufgezählt: GRAHAM-Gang (1710) und RIEFLER-Gang (1890) sind Hemmungen für Pendeluhren und bestehen aus einem Anker, der mit der Pendelachse verbunden ist und in ein weitgezähntes Zahnrad so eingreift, das während einer Pendelschwingung nur jeweils um einen Zahn weitergeschaltet wird. Durch geeignete Formgebung des Hemmrades wird außerdem dem Pendel während jeder Schwingung ein kleines Drehmoment zur Aufrechterhaltung der Schwingungsamplitude mitgeteilt.

Beim Ankergang der Unruhuhren wird die große Schwingungsamplitude der Unruh durch den „Anker“ in kleinere Ausschläge umgeformt und ähnlich wie beim RIEFLER-Gang das Steigrad bei jeder Vollschwingung der Unruh um einen Zahn weitergeschaltet.

3,32 *Gangregler*

Die Gangregler haben den vollkommen regelmäßigen Ablauf des Laufwerkes und damit des Zeigerwerkes zu besorgen. Sie stellen den eigentlichen zeitmessenden Hauptbestandteil der Uhren dar. Besonders hierzu geeignet sind das Kreispendel und die Unruh.

Pendel

Das Uhrpendel besteht aus der dünnen Pendelstange, die um eine waagrechte Achse frei drehbar ist und durch ein Gewicht (Pendellinse) am unteren Ende beschwert wird. Vernachlässigt man zunächst die Masse der Pendelstange, so lautet die Bewegungsgleichung dieses mathematischen Pendels

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0\,, \tag{3/1}$$

worin α der von der Gleichgewichtslage aus gemessene Winkel (in Bogenmaß), l die Pendellänge und g die Schwerebeschleunigung sind. Für ein beliebig gestaltetes (physikalisches) Pendel gilt dieselbe Beziehung, wenn man für l die reduzierte Pendellänge L einsetzt, die sich berechnet aus

$$L = \frac{J}{m \cdot s}\,. \tag{3/2}$$

Darin bedeuten m die Masse des Pendels, J sein auf die Drehachse bezogenes Trägheitsmoment und s den Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse.

Die Integration der Gleichung (3/1) führt auf das vollständige elliptische Integral 1. Ordnung für die halbe Schwingungsdauer τ des Pendels, das sich in die Reihe

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \dots\right] \tag{3/3}$$

entwickeln läßt, wenn $\frac{\alpha}{2}$ die halbe Schwingungsweite des Pendels ist. Für kleine

Schwingungen, für die man den Sinus durch den Bogen ersetzen kann, bekommt man die bekannte Beziehung

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{J}{G \cdot s}}, \tag{3/4}$$

wenn wir $m\,g = G$ (Gewicht) setzen. Die Schwingungszeit ist also nur für sehr kleine Schwingungsweiten *isochron*. In der beistehenden Tabelle III sind für wachsende Schwingungsweiten α die durch das erste Korrekturglied in Gleichung (3/3) verursachten Abweichungen von der Schwingungsdauer für $\alpha = 0$ angegeben.

Ausschlag α °	$\frac{\alpha^2}{16}$	Gang eines s-Pendels in 24 h (in s)
0	0	0
0,5	$5 \cdot 10^{-6}$	0,42
1,0	$2 \cdot 10^{-5}$	1,66
1,5	$4 \cdot 10^{-5}$	3,72
2,0	$8 \cdot 10^{-5}$	6,60
2,5	$1{,}2 \cdot 10^{-4}$	10,32
3,0	$1{,}7 \cdot 10^{-4}$	14,88

Tabelle III

Bei Präzisionspendeluhren pflegt man im allgemeinen keine größeren Amplituden als 3° anzuwenden. Der Einfluß verschiedener Schwingungsweiten läßt sich weitgehend durch die von Riefler angewandte, von Le Roy (1748) angegebene Federaufhängung des Pendels verringern.

Zur Einstellung der richtigen Pendellänge und damit zur Regulierung der Uhr ist die Linse am unteren Ende der Pendelstange auf eine Schraubmutter aufgesetzt, mit der sie sich verschieben läßt.

Unruh

Die Unruh besteht aus einem kleinen Schwungring, dessen Achse in Edelsteinlagern läuft. Als rücktreibendes Moment dient eine feine Spiralfeder, deren eines Ende fest mit der Unruhachse verbunden wird, während das andere Federende eingespannt ist. Die Unruh vollführt Drehschwingungen um ihre Gleichgewichtslage, deren Ausschlag im Gegensatz zum Pendel auch bei großen Amplituden ohne Einfluß auf die Schwingungsdauer ist. Ist M das Drehmoment für den Winkel Eins, J das axiale Trägheitsmoment der Unruh und φ der Verdrehungswinkel, so gilt entsprechend Gleichung (3/1)

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} + \frac{M}{J} \varphi = 0. \tag{3/5}$$

Die Integration dieser Differentialgleichung führt auf die halbe Schwingungsdauer der Unruh

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{J}{M}}, \tag{3/6}$$

die in diesem Fall nicht von der Amplitude abhängt. Die Schwingungen einer Unruh sind also für beliebige Schwingungsweiten isochron.

Das Moment M läßt sich aus den Abmessungen und dem Elastizitätsmodul E des Federmaterials berechnen. Ist l die Federlänge, b deren Breite und d die Dicke, so gilt

$$M = \frac{E\, b\, d^3}{12\, l}\,. \tag{3/7}$$

Eingehende Untersuchungen haben ergeben, daß der Isochronismus von der Form und Länge der Feder abhängt, weshalb diese für die sehr genauen Chronometer nicht als Spirale, sondern als Zylinderfeder gewickelt ist. Die Hauptfehlerquellen des Isochronismus sind die Temperaturänderungen, welche das Trägheitsmoment der Unruh, die Länge und den Elastizitätsmodul der Feder beeinflussen. Gewöhnlich geht die Uhr mit wachsender Temperatur nach. Diese Einflüsse lassen sich weitgehend ausschalten durch die sog. *Kompensationsunruh*, deren Ring aus zwei halbkreisförmig gebogenen Bimetallstreifen besteht. Bei Temperaturerhöhung krümmen sich diese nach innen und kompensieren die Längenänderung der beiden Speichen. Für die Unruhspirale eignet sich vorzüglich *Elinvar*, eine Stahllegierung, deren Länge und elastische Eigenschaften fast temperaturunabhängig sind.

3,33 *Astronomische Uhren*

Die Pendellänge der astronomischen Pendeluhr wählt man im allgemeinen so groß, daß die halbe Schwingungsdauer für sehr kleine Amplituden 1 s beträgt. Die beiden, den Gang der Uhr am meisten beeinflussenden Zustandsgrößen, Temperatur und Luftdruck, lassen sich am besten beherrschen, wenn man die gesamte Uhr in einen von der Außenluft abgeschlossenen Druckzylinder setzt, in dem ein konstanter Unterdruck aufrechterhalten wird. Die Unterbringung des in der Pendelrichtung großen Gefäßes in einem Thermostaten macht Schwierigkeiten, weshalb man sich damit begnügt, astronomische Pendeluhren in einem Raum konstanter Temperatur (Uhrenkeller) unterzubringen und den noch bestehenden Temperatureinfluß durch die Wahl geeigneten Materials für die Pendelstange auszugleichen.

Die Temperaturänderungen stellen den bei weitem störendsten und daher auch auffallendsten Einfluß auf das Pendel dar. Durch die Verwendung von *Invar*, einer Nickel-Stahl-Legierung (36% Ni) mit dem sehr kleinen Wärmeausdehnungskoeffizienten von rund $1 \cdot 10^{-6}$, sollte es möglich sein, den Temperatureinfluß verschwindend klein zu machen. Der noch vorhandene Temperaturgang läßt sich durch Verwendung einer Messinghülse passender Länge, die zwischen Linse und Regulierschraube eingeschaltet wird, vollkommen ausgleichen. Die mit einem solchen Pendel ausgerüstete RIEFLER-Uhr 223 zeigte auf $26 \cdot 10^6$ Pendelschwingungen eine Gangänderung von $^1/_{100}$ Schwingung. Nach JACKSON und BOWYER (*183*) beträgt die tägliche Gangänderung der mit einem Invarpendel ausgestatteten SHORTT-Uhr 0,006 s bei einer Temperaturänderung von 1°, entsprechend einer jährlichen Standänderung von 1,1 s. Eingehende Messungen von SCHULER (*315*) haben nun ergeben, daß die von der Temperatur abhängigen Längenänderungen zum Teil irreversibel sind und eine ständig zunehmende Verlängerung des Pendels ergeben. Diese als thermische Nachwirkung bezeichneten Vorgänge äußern sich darin, daß sich die Länge bei rascher und beträchtlicher Temperatur-

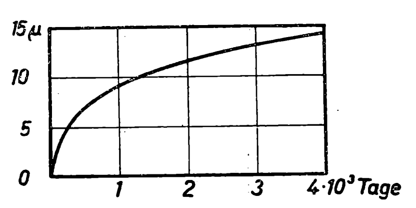


Abb. 29 Thermische Nachwirkung eines Invar-Stabes von 1 m Länge

änderung nicht sofort der Wärmeausdehnung entsprechend einstellt, sondern zum Teil erst viel später. In Abb. 29 ist die thermische Nachwirkung eines 1 m langen Invarstabes dargestellt, der auf 150° C erhitzt und dann langsam auf Zimmertemperatur abgekühlt wurde. Als wahrscheinliche Ursache der Instabilität der Ni-Stahllegierungen sieht GUILLAUME ihren Kohlenstoffgehalt an, dessen langsame Umwandlung in Zementit, Fe_3C, die beobachtete Erscheinung erklären kann. Durch künstliches Altern (Erhitzen auf 180° C, Abkühlen, Erschüttern und Belasten) lassen sich jedoch die Nachwirkungserscheinungen bis auf geringe Spuren beseitigen.

Quarzglas zeigt nach KAYE einen noch geringeren Wärmeausdehnungskoeffizienten von $0{,}6 \cdot 10^{-6}$. Neuere Messungen von SCHEEL und HEUSE (*302*) bestätigen das Ergebnis; darnach beträgt die Ausdehnung zwischen — 253° C und + 100° C

$$\frac{l_t - l_0}{l_0} = (0{,}362\, t + 0{,}00181\, t^2 - 0{,}0000034\, t^3)\, 10^{-6}.$$

Durch Erhitzen auf 400—500° C und darauffolgendes langsames Abkühlen läßt sich diese geringe Hysterese fast vollständig beseitigen.

Der Einfluß des veränderlichen Luftdruckes auf das Pendel äußert sich in doppelter Weise. Einmal bewirkt dieser einen veränderlichen Auftrieb am Pendel. Diese „aerostatische“ Störung ist verhältnismäßig gering und verursacht zusammen mit der „aerodynamischen“ Störung (der durch die Mitnahme einer vom Luftdruck abhängigen Luftmasse) eine tägliche Gangänderung von 0,01—0,02 s bei einer Druckänderung von 1 Torr (1 Torr = 1 mm Hg). Das luftdichte Einschließen der Uhr wurde bereits als Abhilfemaßnahme erwähnt; es stellt zudem ein bequemes Mittel dar, durch Druckänderung die Uhr zu regulieren. Das Gehäuse der RIEFLER-Uhr, die mit Räder- und Zeigerwerk eingeschlossen werden muß, kann wegen der Ölung nur mäßig (650 Torr) evakuiert werden, bei der SHORTT- und SCHULER-Uhr wird der Kupferzylinder bis auf 100 Torr ausgepumpt. Der Einfluß des Unterdruckes wird für einen ganz bestimmten Druck Null, was darauf zurückzuführen ist, daß einerseits die vom Pendel mitgeführte Luftmasse sich verändert, zum andern die Schwingungsweite infolge verringerter Luftreibung größer, die Schwingungsdauer entsprechend kleiner wird.

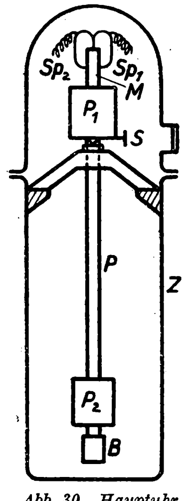


Abb. 30 Hauptuhr nach SCHULER

Da die Schwingungsweite des Pendels die Konstanz des Ganges beeinflußt, muß sie konstant gehalten werden. Die Amplitude hängt außer vom Luftdruck vom Antrieb der Uhr ab. Je loser die Kopplung zwischen Pendel und antreibender Kraftquelle ist, um so weniger gehen die Eigenschaften des Antriebs und des Kopplungsmechanismus in die Schwingungsdauer ein, um so freier schwingt das Pendel. Bei der RIEFLER-Uhr werden die Antriebsimpulse über die Aufhängefeder auf das Pendel übertragen. SHORTT und SCHULER übertragen der „Schaltuhr“ die nötigen Schaltleistungen und das Zeigerwerk und trennen diese von der eigentlichen Hauptuhr. Die in der Abb. 30 schematisch dargestellte Hauptuhr ist luftdicht in dem Zylinder Z untergebracht. An der oberen Pendelmasse P_1 ist der permanente Magnet M angebracht, der abwechselnd von den durch die Schaltuhr gesteuerten Spulen Sp_1 und Sp_2 angezogen wird. Durch die an der Pendelmasse P_2 befestigte Blende B wird die Schaltuhr über eine Photozelle synchronisiert. Die Amplitude des

Pendels P läßt sich durch einen am Spiegel S reflektierten Lichtstrahl überwachen und konstant halten. Durch Stabilisieren der für den Antrieb erforderlichen Stromquellen auf 1 bis 2 mV genau lassen sich die Amplituden auf einige Bogensekunden konstant halten.

Sind die oben angeführten Fehlerursachen durch konstruktive Mittel grundsätzlich zu beseitigen, so gilt das nicht für die Änderungen der Schwerkraft g. Nach TOMASCHEK (*353*) überschreitet die relative Schwerkraftänderung dg/g im allgemeinen den Betrag von 10^{-6} nicht, wovon die von Sonne und Mond herrührenden Gezeitenkräfte den Hauptteil beanspruchen.

3,34 *Genauigkeit mechanischer Uhren*

Die mittlere tägliche Gangschwankung bei astronomischen Pendeluhren beträgt etwa einige Tausendstel Sekunden, jedoch betragen die dauernden (systematischen) Gangänderungen im Monat 0,01 s und mehr. Messungen von MAHNKOPF und KIENLE an RIEFLER-Uhren ergaben tägliche Gangschwankungen von $\pm$ 0,002 bis 0,004 s. Wesentlich schlechter wird aber die Beurteilung dieser Uhren beim Vergleich mit den modernen Quarzuhren (§ 3,5), mit denen eine tägliche Gangschwankung von 0,016 bis 0,020 s festgestellt wurde. Mit der SCHULER-Uhr werden allerdings viel bessere Ergebnisse erzielt (*170*). Der Fehler der Einzelsekunde ist bei Abnahme durch einen Quecksilberkontakt auf etwa 0,002 s, der bei photoelektrischer Kontaktgabe zu etwa 0,001 s zu schätzen.

Als roher Anhaltspunkt zur Beurteilung der Leistungen mechanischer Uhren mögen nachstehende Angaben über die Größe des mittleren täglichen Ganges dienen:

1. Präzisionstaschenuhren	1 —2 s	$= 1—2 \cdot 10^{-5}$
2. Chronometer	0,1 —0,2 s	$= 1—2 \cdot 10^{-6}$
3. Präzisionspendeluhren	0,01—0,02 s	$= 1—2 \cdot 10^{-7}$

d. h. die betreffenden Uhren geben die Zeit während eines oder mehrerer Monate innerhalb dieser Genauigkeitsgrenzen an. Zum Vergleich sei erwähnt, daß durch Quarzuhren die Zeitangabe auf $2 \cdot 10^{-9}$ genau bekannt ist.

3,4 **Stimmgabeluhr** (*159, 161*)

Eine sehr gleichmäßige Schwingungsdauer, wenn auch mit sehr viel höherer Frequenz als bei mechanischen Uhren, liefert die elektrisch angetriebene Stimmgabel. Die hierfür am häufigsten verwendete Prinzipschaltung ist in der Abb. 31 dargestellt. Die Stimmgabel S liegt als magnetisches Steuer- und Koppelglied zwischen Anoden- und Gitterkreis der Verstärkerröhre R. Die erzeugte Frequenz ist durch die Eigenfrequenz der Gabel bestimmt. Die Schwingungsanregung erfolgt über die kleine Magnetspule Sp_1, die über den Koppelkondensator C_k an der Anode der Röhre liegt und die der einen Stimmgabelzinke in geringem Abstand gegenübersteht. Die im zweiten Magnetsystem Sp_2 induzierten Wechsel-

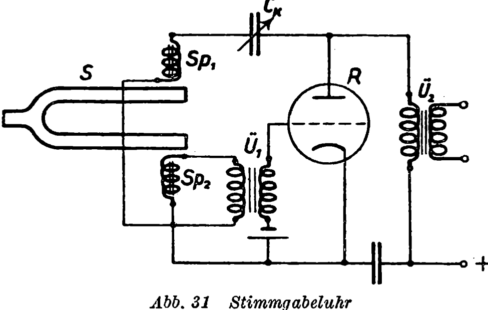


Abb. 31 Stimmgabeluhr

spannungen werden durch den Übertrager $Ü_1$ auf das negativ vorgespannte Gitter der Röhre gegeben, wodurch die Selbsterregung zustande kommt. Die Größe des Kopplungskondensators C_k bestimmt die Schwingungsweite der Gabel. Die erzeugte Wechselspannung wird über den Ausgangstransformator $Ü_2$ dem Anodenkreis entnommen und dient zur direkten Aufzeichnung oder zum Betrieb eines Synchronmotors. Als Magnetspulen Sp_1 und Sp_2 eignen sich vorzüglich kleine Fernsprecherspulen.

Die durch die Eigenfrequenz der Gabel bestimmte Schwingungszahl dieses Senders ist um den relativen Betrag von $3 - 4 \cdot 10^{-4}$ veränderlich durch Variieren der Amplitude, der Phase der Rückkopplung, Heiz- und Anodenspannung und Gittervorspannung. Durch geeignete Dimensionierung der Schaltelemente läßt sich dieser Einfluß auf 10^{-6} für eine 10proz. Änderung der Heiz- und Anodenspannung verringern. Die Resonanzkurve ist sehr spitz; für eine Frequenz von 1500 Hz betrug die Dämpfung einer ausgeführten Gabel $3 \cdot 10^{-4}$, sie ist somit 10mal geringer als die Dämpfung des besten elektrischen Schwingungskreises.

Von großem Einfluß auf die Eigenfrequenz der Gabel ist die Temperatur, ändert sich doch die Frequenz einer Stahlgabel bei einer Temperaturerhöhung um 1° um $-0{,}9$ bis $-1{,}4 \cdot 10^{-4}$. Nach MERCADIER läßt sich die Frequenz ν der Stimmgabel aus den Abmessungen (a Zinkenstärke, l Zinkenlänge), dem Elastizitätsmodul E und der Dichte ϱ des Stimmgabelmaterials annähernd berechnen zu

$$\nu = k \frac{a}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\varrho}}, \qquad (3/8)$$

worin k eine Konstante ist. Alle vorkommenden Größen sind temperaturabhängig, und zwar hängen a, l und ϱ vom Ausdehnungskoeffizienten α und E vom thermoelastischen Koeffizienten ε des Materials ab. Es läßt sich nun leicht nachweisen, daß der Temperaturkoeffizient der Gabelfrequenz sehr klein wird, wenn $\alpha = -\varepsilon$ wird. Diese Bedingung scheint bei dem bereits erwähnten Elinvar für einen bestimmten Temperaturbereich erfüllt zu sein. Durch Verändern des Chromgehaltes von Cr-Ni-Stahllegierungen lassen sich außerordentlich kleine Temperaturkoeffizienten ($4 \cdot 10^{-6}$ für eine Stahllegierung mit 10% Cr und 36% Ni) erzielen. Da sich die Temperatur ohne Schwierigkeit auf 0,1° C konstant halten läßt, kann der temperaturabhängige Teil der Frequenzbeeinflussung auf weniger als $1 \cdot 10^{-6}$ verringert werden.

Ähnlich wie beim Pendel ist auch ein Einfluß der Luftdichte auf die Frequenz in dem Sinne zu erwarten, daß wegen der bei höherem Druck größeren mitschwingenden Luftmasse die Frequenz abnimmt. Nach Messungen von TUMA nimmt die Frequenz linear mit zunehmendem Druck um $0{,}3 \cdot 10^{-6}$ für 1 Torr Druckänderung ab. HENSEL (*159*) hat diese Beziehung bis 100 at bestätigt gefunden. Durch luftdichten Abschluß der Stimmgabel läßt sich dieser Fehler beseitigen. Schließlich ist noch zu beachten, daß die Frequenz mit zunehmender Amplitude wegen der größeren inneren Dämpfung etwas abnimmt. Es ist daher empfehlenswert, die Gabel mit geringen Amplituden schwingen zu lassen.

Unter Beachtung dieser Vorsichtsmaßregeln lassen sich über längere Betriebszeiten mittlere Fehler von $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ und darunter erzielen, womit die astronomischen Uhren an Genauigkeit fast erreicht werden.

Man kann die Stimmgabel mit gutem Erfolg durch einen longitudinal schwingenden Stab aus magnetostriktivem Material ersetzen (*276*). Durch Zusammensetzen des

Stabes aus Teilen mit verschiedenen Temperaturkoeffizienten läßt sich eine sehr geringe Temperaturabhängigkeit der Frequenz erreichen. Die elektrische Anordnung entspricht der bei elektrischen Stimmgabeln (*124*).

3,5 **Quarzuhren** (*230, 307*)

Wie bereits in § 3,33 erwähnt, ist eine weitere Steigerung der relativen Genauigkeit mechanischer Pendeluhren aus grundsätzlichen Erwägungen heraus kaum zu erwarten. Die elektrisch erregte Stimmgabel liefert zwar ein genaues und bequemes Zeitnormal, erreicht aber die Genauigkeit astronomischer Uhren nicht ganz. Erst durch die Einführung und Anwendung des Piezoeffektes von Quarz (Turmalin) der es gestattet, mechanische Schwingungen großer Konstanz anzuregen, gelang es, die Genauigkeit der mechanischen Uhren wesentlich zu übertreffen. Wird aus einem Quarz- oder Turmalinkristall in geeigneter Weise eine Platte oder ein Stab herausgeschnitten, so gerät dieser Schwinger beim Anlegen an ein Wechselfeld in elastische Eigenschwingungen, die eine hohe Frequenzkonstanz aufweisen. In Verbindung mit einem elektrischen Röhrengenerator lassen sich äußerst regelmäßige Schwingungen hoher Frequenz erzeugen, die als Zeitnormale verwendet werden können.

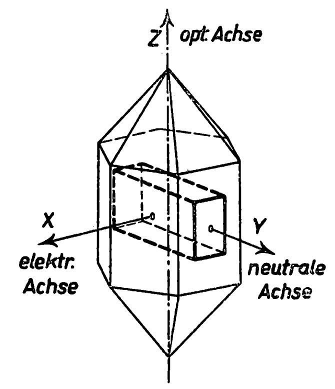


Abb. 32. Quarzschwinger

3,51 *Der Piezokristall* (*305*)

Das eigentliche Frequenznormal des kristallgesteuerten Senders einer Quarzuhr ist ein prismatisches Stäbchen oder eine Scheibe aus Quarz oder Turmalin, die in der in Abb. 32 gezeichneten Weise aus dem natürlichen Kristall geschnitten sind. Beim Quarzkristall bildet die Symmetrieachse (Z-Achse) die sog. *optische* Achse, auf der die *elektrische* Achse in der X-Richtung und die *neutrale* Achse in der Y-Richtung senkrecht stehen. Der piezoelektrische Effekt (Curie 1880) besteht nun darin, daß bei Beanspruchung des Kristalles durch Druck in Richtung einer polaren Achse elektrische Flächenladungen auftreten. Im einzelnen sind folgende Teileffekte feststellbar:

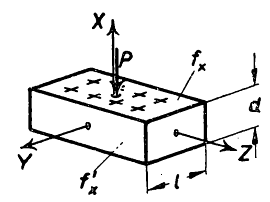


Abb. 33a Druck in X-Richtung

a) Druck in X-Richtung bewirkt entgegengesetzte Aufladung der Flächen f_x und f'_x (longitudinaler piezoelektrischer Effekt, Abb. 33a).
b) Dehnung in Y-Richtung bewirkt dieselbe Aufladung von f_x und f'_x (transversaler piezoelektrischer Effekt, Abb. 33b).
c) Beim Übergang von Druck zu Zug wechseln die Vorzeichen der Flächenladung.
d) Bei Beanspruchung in der Z-Richtung treten keine Ladungen auf.

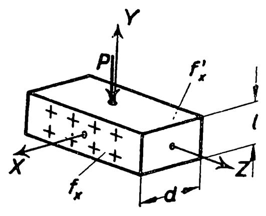


Abb. 33b Druck in Y-Richtung

Dieser direkte piezoelektrische Effekt ist nun umkehrbar (reziproker piezoelektrischer Effekt). Legt man

an den Kristall ein elektrisches Feld in Richtung einer piezoelektrischen Achse an, so wird dieser in bestimmten Richtungen komprimiert bzw. dilatiert. Es lassen sich hierbei zwei Teileffekte unterscheiden:

a) Positive Ladung auf f_x und negative auf f_x' dilatieren den Kristall in X-Richtung (longitudinaler reziproker piezoelektrischer Effekt).

b) Gleichzeitig wird der Stab in der Y-Richtung komprimiert (transversaler reziproker piezoelektrischer Effekt).

c) Bei Umkehrung des Vorzeichens der Ladungen geht die Kompression in Dilatation und umgekehrt über.

Die Größe δ der Dilatation bzw. Kompression beim Anlegen einer Spannungsdifferenz U an die Flächen f_x und f_x' läßt sich nach VOIGT (*360*) berechnen. Für den longitudinalen Effekt gilt die Beziehung

$$\delta_x = d_{11} U, \tag{3/9}$$

für den transversalen

$$\delta_y = d_{12} U \frac{l}{d}, \tag{3/10}$$

wenn l und d die Abmessungen in Y- und X-Richtung, und d_{11} bzw. d_{12} die sog. piezoelektrischen Moduln bedeuten. Im Falle von Quarz ist

$$d_{11} = d_{12} = 2{,}31 \cdot 10^{-10} \frac{\text{cm}}{\text{V/cm}}.$$

Legt man nun an eine piezoelektrische Platte aus Quarz oder Turmalin ein elektrisches Wechselfeld, das in X-Richtung verläuft, so wird diese mit der Frequenz des Wechselfeldes elastische Schwingungen vollführen, deren Amplitude ein Maximum wird, wenn die mechanische Eigenfrequenz der Platte in Resonanz mit der angelegten Frequenz ist. Hierbei sind zwei Schwingungsformen möglich:

a) Die Schwingungen erfolgen in der X-Richtung (Dickenschwingungen).

b) Die Platte schwingt in der Y-Richtung, also longitudinal (Längsschwingungen).

Im Falle der Dickenschwingungen berechnet sich die elastische Eigenfrequenz der Grundschwingung, wenn man die durch die Querkontraktion bedingten Querschwingungen außer acht läßt (unendlich große Platte), zu

$$\nu_x = \frac{1}{2\,d} \sqrt{\frac{c_{11}}{\varrho}}, \tag{3/11}$$

wobei d die Plattendicke, ϱ die Dichte und c_{11} einen für die Art und Richtung der Schwingung charakteristischen Elastizitätsmodul bedeuten. Für Quarz ist $\varrho = 2{,}65$ und $c_{11} = 85{,}46 \cdot 10^{10}$ dyn/cm² (= 8711 kg/mm²).

In ähnlicher Weise erhält man für die Grundschwingungen eines Quarzstabes in der Y-Richtung die Frequenz

$$\nu_y = \frac{1}{2\,l} \sqrt{\frac{E}{\varrho}}, \tag{3/12}$$

wenn E der Elastizitätsmodul des Quarzes $= 77{,}22 \cdot 10^{10}$ dyn/cm² (= 7871 kg/cm²) ist. In beiden Fällen lassen sich Oberschwingungen sehr hoher Ordnungszahl erreichen,

wobei sich stehende Dehnungsschwingungen der elastischen Spannung, bzw. der Bewegung der Stabteilchen mit Knoteu und Bäuchen ausbilden. In der Abb. 34 sind für einen longitudinal schwingenden Stab die Verteilungen der Bewegung (c), der elastischen Spannungen (b) und der hierdurch hervorgerufenen piezoelektrischen Wechselladungen (a) angegeben. Druck und Bewegung sind um 90° gegeneinander phasenverschoben.

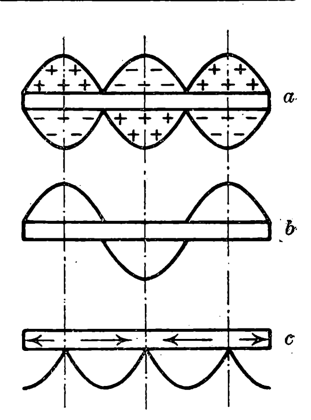


Abb. 34 Bewegung, elastische Spannung und piezoelektrische Wechselladung in einem longitudinal schwingenden Stab

3,52 *Kristallgesteuerter Generator*

Legt man an den Piezoquarz ein elektrisches Wechselfeld passender Frequenz, z. B. das eines Röhrengenerators, so gerät der Quarz in Resonanzschwingungen hoher Amplitude. Die Resonanzschärfe der in Luft schwingenden Quarze ist außerordentlich groß; das logarithmische Dämpfungsdekrement liegt in der Größenordnung von 10^{-4}. Wegen der großen Abstimmschärfe verwendet man solche Resonatoren bekannter Frequenz als Frequenznormale in der Hochfrequenztechnik.

Die elastischen Eigenschwingungen entsprechend den in den Gleichungen (3/11) und (3/12) angegebenen Frequenzen lassen sich nun durch Röhrenschaltungen selbst erregen, die zuerst von Cady (*58*) und später von Pierce (*275*) angegeben wurden. In der Abb. 35 ist die von Pierce stammende und am häufigsten benutzte Oszillatorschaltung schematisch dargestellt. Der Steuerquarz Q liegt zwischen Gitter und Kathode der Elektronenröhre E. Das Gitter kann, um zu hohe Aufladungen zu vermeiden, über den Widerstand R_g abgeleitet werden. In vielen Fällen ist es ratsamer, mit kleineren Amplituden zu arbeiten und auf R_g ganz zu verzichten. Im Anodenkreis der Röhre liegt der veränderliche Schwingungskreis LC, der zur Aufrechterhaltung der Schwingungen eine induktive Belastung der Röhre ergeben muß. Das Einsetzen der Schwingungen beobachtet man mit Hilfe des in die Anodenzuleitung geschalteten Strommessers, dessen Anzeige im Resonanzfall ein Minimum wird. Gewöhnlich bleibt man etwas unterhalb der Resonanzfrequenz, da dann die Schwingungen stabiler sind. Wird durch irgendeine Störung (Einschaltvorgang) der Quarz in seiner Eigenfrequenz angestoßen, so entstehen auf seinen Elektroden infolge der mechanischen Deformation durch den direkten Piezoeffekt Wechselladungen, die über das Gitter der Röhre den Anodenstrom im richtigen Takt steuern. Die Anodenwechselspannung wird mit einer Phasenverschiebung von 180° über die Gitter-Anodenkapazität auf den Quarz rückgekoppelt und ermöglicht die Aufrechterhaltung einer ungedämpften Schwingung konstanter Frequenz, die fast ausschließlich von den Abmessungen des Quarzes bestimmt ist.

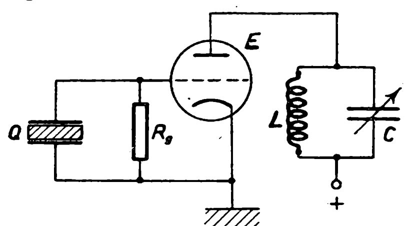


Abb. 35 Oszillatorschaltung nach PIERCE

Wie bereits von Dye (*74*) nachgewiesen wurde, wirkt der am Steuergitter der Elektronenröhre liegende Quarz wie ein elektrischer Schwingungskreis großer Impedanz. Bezeichnet man mit m die halbe Masse des Schwingquarzes, mit r die Dämpfungskonstante, mit g die rücktreibende elastische Kraft, mit P_0 die mechanische maximale

Störamplitude und mit ω die Kreisfrequenz, so lautet die Bewegungsgleichung für den schwingenden Stab

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} + r \frac{d x}{d t} + g x = P_0 \cos \omega t . \tag{3/13}$$

Die Konstanten der Differentialgleichung (3/13) berechnen sich aus den Abmessungen (Länge l, Querschnitt q) und der Dichte des Quarzes ϱ zu

$$m = \varrho l \frac{q}{2}; \quad r = \pi^2 \varrho \mu \frac{q}{2 l}; \quad g = \pi^2 c' \frac{q}{2 l}, \tag{3/14a—c}$$

wobei μ der Reibungskoeffizient (innere und äußere Reibung) und c' etwa dem Elastizitätsmodul gleichzusetzen ist. Dem elastisch schwingenden Quarz läßt sich das in der Abb. 36 dargestellte elektrische Ersatzschema zuordnen, dessen Blind- und Wirkwiderstände im einzelnen berechenbar sind. C_s stellt die statische Kapazität des Quarzes, C_a die von den Elektroden und der Oberfläche des Quarzes gebildete Kapazität und R, L und C die dynamischen Wirk- und Blindwiderstände dar, die sich z. B. aus der experimentell aufgenommenen Resonanzkurve ermitteln lassen.

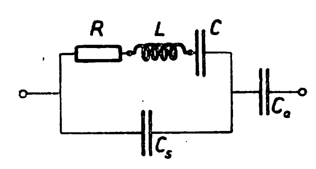


Abb. 36
Elektrisches Ersatzschema für einen Schwingquarz

Die durch die Beziehungen (3/11) und (3/12) festgelegten Eigenfrequenzen der Quarzresonatoren sind mit einer Sicherheit von etwa 0,1% berechenbar. Da aus natürlichen Quarzkristallen nur selten homogene Stäbe von mehr als 10 cm Länge erhältlich sind, beträgt die niedrigste mit Longitudinalschwingungen erreichbare Frequenz $\nu \approx 27$ kHz.

Wesentlich niedrigere Frequenzen erhält man durch Biegungsschwingungen, die sich nach Rhode und Schwarz (*291*) ebenfalls piezoelektrisch anregen lassen. Die transversale Grundfrequenz eines frei schwingenden, rechteckigen Stabes ergibt sich hierbei zu

$$\nu_0 = 5{,}6 \cdot 10^5 \frac{a}{l^2}, \tag{3/15}$$

wenn a die Abmessung in Schwingungsrichtung ist. Wählt man z. B. $a = 0{,}3$ und $l = 10$ cm, so wird $\nu = 1680$ Hz.

Kreisförmige Quarzplatten lassen sich nach Giebe und Scheibe (*126*) bei geeigneten Dickenverhältnissen in drei verschiedenen Frequenzen erregen, die sich ergeben aus

$$\nu_1 = 2{,}7 \cdot 10^5/D,$$
$$\nu_2 = 3{,}8 \cdot 10^5/D,$$
$$\nu_3 = 2{,}9 \cdot 10^5/d,$$

wenn D den Durchmesser und d die Dicke der runden Platte bedeuten.

Die Halterung der Quarze geschieht am einfachsten durch Festbinden an zwei Bewegungsknoten durch Fadenschlingen. Quarzplatten legt man zwischen möglichst plangeschliffene, als Elektroden dienende Metallplatten. Die obere Elektrode wird durch genaue Distanzstücke in einem solchen Abstand über dem Quarz gehalten, daß die Luftsäule darüber nicht in Resonanz gerät. Eine Rückwirkung der Luftsäule und eine damit verbundene Dämpfungserhöhung wird vermieden, wenn man den Quarz in ein Gefäß mit geringem Gasdruck einschließt (siehe § 3,53).

Aus den obigen Angaben geht hervor, daß mit dem Quarzoszillator ein Frequenzbereich von 1 bis 10^6 kHz erfaßt werden kann.

Für die Eignung des Schwingquarzes als Zeitnormal ist vor allem dessen Abhängigkeit der Frequenz von der Temperatur ausschlaggebend. Die durch die Beziehungen (3/11) bzw. (3/12) gegebene Frequenz hängt durch den thermischen Ausdehnungskoeffizienten und der Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls von der Temperatur ab. Der Temperaturkoeffizient $\frac{1}{\nu}\frac{\partial \nu}{\partial T}$ liegt in der Größenordnung von $5 \cdot 10^{-5}$.

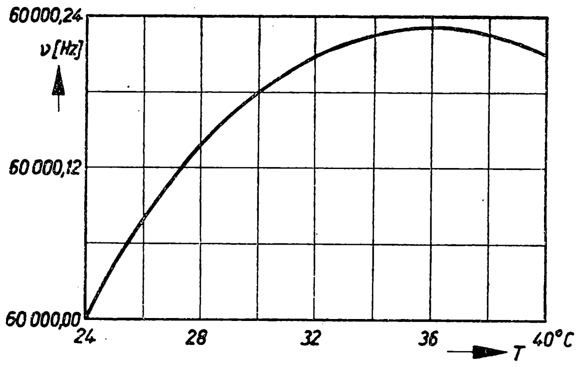


Abb. 37 Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Temperatur.

Günstigerweise gibt es gewisse Orientierungen, für die der Temperaturkoeffizient Null wird und die sich nach BECHMANN (*22*) aus den Konstanten des Quarzes bestimmen lassen. Zum andern ist die Resonanzfrequenz bei geeigneter Schnittrichtung von der Temperatur in der in der Abb. 37 gezeichneten Weise abhängig. Zwischen 35° und 37° C wird der Temperaturkoeffizient ungewöhnlich klein und beträgt weniger als $5 \cdot 10^{-8}$/° C.

3,53 *Quarzuhren nach* SCHEIBE *und* ADELSBERGER (*306*)

Die Quarzuhren nach SCHEIBE und ADELSBERGER enthalten einen Quarzsender mit longitudinal schwingendem Quarzstab von 60000 Hz, zwei Verstärkerstufen, drei Frequenzteilerstufen von 10000, 1000 und 333 Hz und einen durch die letzte Stufe angetriebenen Synchronmotor zur Erzeugung der Zeitintervalle für den Vergleich mit der astronomischen Zeit.

Im einzelnen haben die bei den vier gebauten Quarzuhren verwendeten Steuerquarze den in der Abb. 38 vereinfacht angedeuteten Aufbau. Der Schwingquarz Q, der in der ersten Oberwelle longitudinal schwingt und so aus dem Kristall geschnitten ist, daß die elektrische (X-)Achse in der Längsrichtung verläuft, hat die Abmessungen von 90 · 11 · 11 mm. Mittels zweier Fadenschlingen F_1 und F_2 ist er an den Bewegungsknoten auf dem Metallbügel B befestigt, der seinerseits wieder durch den Glasbügel G in dem Glaskolben A gehalten wird. Die Elektroden E_1 bis E_3 umfassen den Quarz kastenförmig in einigem Abstand. Um die Gasreibung gering zu halten, aber andererseits auch einen guten Wärmekontakt zu gewährleisten, ist der Kolben A mit Wasserstoff von 20 Torr Druck gefüllt. Der Steuerquarz ist in waagerechter Lage in einen Doppelthermostaten eingebaut, dessen Temperatur durch Kontaktthermometer auf 0,002° C konstant gehalten wird.

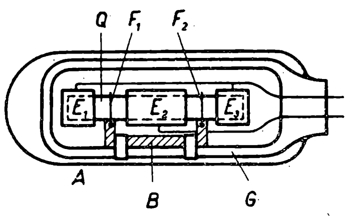


Abb. 38 Steuerquarz einer Quarzuhr

Abb. 39 gibt die Prinzipschaltung des Steuersenders und Verstärkers wieder. Der Steuerquarz Q liegt parallel mit einem hochisolierten Kondensa-

tor C_g an Gitter und Kathode der Senderöhre R_1. Der Schwingungskreis I ist so abgestimmt, daß seine Frequenz etwa 4,5% über der Eigenfrequenz des Quarzes von 60 kHz liegt, wodurch die Schwingungen stabiler werden. Mit dem Schwingkreis I ist über die Koppelspule L_1 ein zweistufiger Verstärker induktiv gekoppelt. Die beiden Verstärkerröhren R_2 und R_3 arbeiten mit selbsttätiger Gittervorspannung

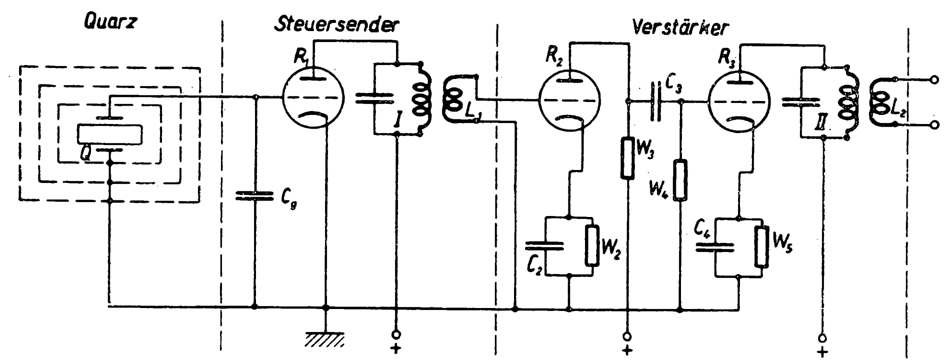


Abb. 39 Steuersender und Verstärker einer Quarzuhr

(C_2W_2, C_4W_5) und sind über die Widerstandskombination $W_3C_3W_4$ miteinander gekoppelt. Der Anodenschwingkreis II ist wie I auf etwa 60 kHz abgestimmt.

Über die Ankopplungsspule L_2 ist der Frequenzteiler, dessen Schaltbild vereinfacht in der Abb. 40 dargestellt ist, an den Kreis II angeschlossen. Jede Frequenzteilerstufe besteht aus einem induktiv rückgekoppelten Sender, dessen Anodenschwing-

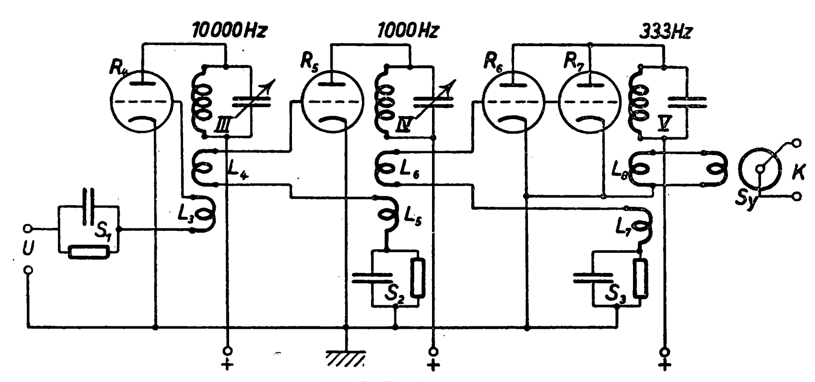


Abb. 40 Schaltbild eines Frequenzteilers

kreis (*III bis V*) auf die gewünschte Teilfrequenz abgestimmt ist. Dem Gitter des tiefer gestimmten Senders wird über die Koppelspulen L_3, L_5 und L_7 eine Wechselspannung mit der Frequenz der vorhergehenden Stufe aufgedrückt. Um einen möglichst großen Mitnahmebereich zu erhalten, ist eine negative, mit Hilfe der Schaltelemente S_1, S_2 und S_3 erzeugte Gittervorspannung der Röhren R_4 bis R_7 erforderlich. Die Anodenschwingkreise sind auf die Frequenzen 10 kHz, 1 kHz und 333 Hz abgestimmt; ihre Induktivitäten sind auf Kosten der Kapazitäten sehr groß. Die Ankopplung der tiefer gestimmten Sender wird über die Spulen L_4 und L_6 sehr fest gemacht.

Der Mitnahmebereich in diesem Frequenzgebiet beträgt etwa 5% für Unterteilungszahlen bis zu 10. An den Anodenkreis der letzten Stufe, die zwei parallel geschaltete Röhren R_6 und R_7 enthält, ist über die Auskopplungsspule L_8 ein Synchronmotor Sy angekoppelt, der zur Kontaktgabe eingerichtet ist. Dieser treibt über ein Schneckengetriebe eine Schaltstange mit Federkontakt, die in einer Sekunde eine Umdrehung bei einer Abnahmegenauigkeit von $0{,}2 \cdot 10^{-3}$ s macht. Von diesem Kontakt wird der in Abb. 41 dargestellte Zeitmarkengeber gesteuert. Dieser besteht aus dem Verstärkerrohr R_8, das gewöhnlich durch eine große negative Gittervorspannung gesperrt ist und nur im Augenblick der Kontaktgabe durch die Synchronuhr kurzfristig freigegeben wird. Dadurch entlädt sich der im Anodenkreis der Röhre befindliche Kondensator C, der in den Schaltpausen durch eine Gleichstromquelle aufgeladen wird, bei jedem Impuls über den an die Klemmen K_a angeschlossenen Zeitschreiber.

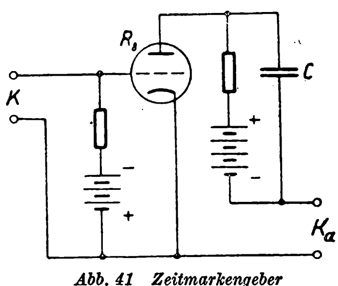


Abb. 41 Zeitmarkengeber

Einen ähnlichen Aufbau weist die von MARRISON und ESSEN (*88, 234*) konstruierte Quarzuhr, die „crystall-clock“, auf, bei welcher der Steuerquarz die Form eines dickwandigen Ringes hat. Ihre Genauigkeit wird jedoch erheblich von der oben beschriebenen Uhr übertroffen.

3,54 *Genauigkeit der Quarzuhren* (*307*)

Die Genauigkeit der Quarzuhr übertrifft die aller mechanischen Uhren beträchtlich. Nach den bisherigen Veröffentlichungen sind die Quarzuhren III und IV so frequenzkonstant, daß ihr täglicher konstanter Änderungsbetrag nicht größer als 1 bis $2 \cdot 10^{-10}$ der Frequenz sein dürfte. Die Frequenzschwankung von Tag zu Tag ist kleiner als $\pm 1 \cdot 10^{-8}$ nach Messungen gegen die astronomische Zeit, nach Messungen der Quarzuhren untereinander beträgt sie sogar nur etwa $2 \cdot 10^{-9}$. Diesen Zahlenwerten entspricht eine tägliche konstante Gangänderung von 10^{-5} bis $2 \cdot 10^{-5}$ s, einer Änderung des täglichen Ganges von Monat zu Monat von etwa 0,0003 s und einer täglichen Gangschwankung von weniger als 10^{-3} s. Die unregelmäßigen Gangänderungen, die im Laufe mehrjähriger Messungen des monatlichen Ganges gegen die astronomische Zeit ermittelt worden sind, sind mit größter Wahrscheinlichkeit auf Schwankungen der Erddrehung zurückzuführen.

Diese außerordentliche Genauigkeit erfordert allerdings, daß die Betriebsspannungen der Uhr sehr konstant gehalten werden. Die Abhängigkeit der Frequenz von der Anodenspannung beträgt $4 \cdot 10^{-8}$ s $= 0{,}003$ s pro Tag und Volt; eine solche von der Heizspannung der Röhren ist zwischen 3 und 4 Volt nicht feststellbar.

Wegen der primär erzeugten sehr hohen Frequenz lassen sich zwei Uhren mit Hilfe von Schwebungsverfahren in sehr kurzer Zeit vergleichen.

3,6 **Elektrische Kurzzeitmessung** (*370*)

Für viele physikalische Messungen, z. B. in der Akustik bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit, Messung der Entfernung von reflektierenden Schichten bei bekannter Ausbreitungsgeschwindigkeit des Signales (Ionosphäre), ist es von Bedeu-

tung, sehr kleine Zeitunterschiede genau zu bestimmen. Es darf hierbei vorausgesetzt werden, daß die Meßgröße, deren zeitlicher Unterschied gemessen werden soll, in eine elektrische Größe umformbar ist, weshalb im folgenden nur die Methoden der elektrischen Kurzzeitmessung eingehender besprochen werden mögen.

3,61 *Bekannte Frequenz als Zeitlinie*

Die der physikalischen Meßgröße entsprechende elektrische Größe (Spannung, Strom) wird durch eine elektrische Registriervorrichtung (Schleifenoszillograph, Braunsche Röhre) gleichzeitig mit einer Wechselspannung bekannter Frequenz aufgezeichnet. Durch Auszählen und Interpolieren lassen sich Zeitunterschiede von der Größe $1/\nu$ ($\nu =$ Frequenz) noch hinreichend genau feststellen. Als bekannte Zeitintervalle dienen die Schwingungen der Stimmgabeluhr (§ 3,4), der Quarzuhr (§ 3,5) oder von Hochfrequenzgeneratoren bekannter Frequenz.

3,62 *Messung der Elektrizitätsmenge* (*333*)

Sehr kleine Zeitunterschiede sind mit Hilfe der Beziehung $Q = I \cdot t$ bestimmbar, worin Q die vom Strom I während der Zeit t transportierte Elektrizitätsmenge bedeutet. Dabei kann die in Abb. 42 dargestellte Schaltung verwendet werden. Der Kondensator C bekannter Kapazität wird durch kurzzeitiges Schließen des Schalters K durch die Gleichspannungsquelle bekannter Spannung U_0 über den bekannten Widerstand R aufgeladen. Die am Kondensator C sich einstellende Spannung U ist bekanntlich

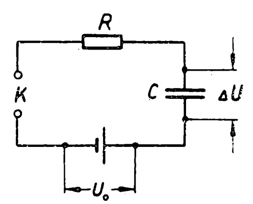


Abb. 42 Schaltung für Kurzzeitmessungen

$$U = U_0\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right). \tag{3/16}$$

Für kleine Zeitunterschiede $\Delta\, t$ (im Vergleich zur *Zeitkonstanten* RC der Anordnung) kann man (3/16) in eine Reihe entwickeln und erhält damit

$$\Delta\, t = R\, C \frac{\Delta\, U}{U_0}. \tag{3/17}$$

Diese Methode läßt sich in verschiedener Weise abwandeln und gestattet die Messung von Zeitintervallen von 10^{-7} s an aufwärts. Das Schließen der Kontakte K läßt sich ähnlich wie in Abb. 41 durch eine stark negativ vorgespannte Elektronenröhre bewerkstelligen.

3,63 *Mit dem Kathodenstrahl-Oszillographen* (*199, 299*)

Fast beliebig kleine Zeitunterschiede lassen sich mit sehr großer Genauigkeit mit Hilfe der Braunschen Röhre messen. Der Grundgedanke ist dabei, den Elektronenstrahl zeitproportional abzulenken und Beginn und Ende des Meßvorganges entweder durch kurzzeitige Ablenkung senkrecht zur Schreibrichtung oder durch Löschen des Strahles zu markieren. Hierfür kann man entweder den Strahl mit Hilfe eines Kippgerätes (siehe Bd. III) auf einer Geraden ablenken oder ihn durch ein elektrisches oder magnetisches Drehfeld bekannter Frequenz auf einer Kreisbahn herumführen. Als Beispiel soll die zweite Methode, die in Abb. 43 schematisch dargestellt ist, kurz

besprochen werden. Eine sinusförmige Wechselspannung U liegt an einem Schwingungskreis, der durch die Kapazität C und die beiden Spulen L_1 und L_2 gebildet wird. Der durch $L_1 L_2$ fließende Strom und die Spannung an C sind um 90° gegeneinander phasenverschoben. Verbindet man den Kondensator C mit den Ablenkplatten $P_1 P_2$ der Röhre und läßt auf den Elektronenstrahl an derselben Stelle das Magnetfeld der Spulen einwirken, so beschreibt der Strahl bei passender Wahl der Schaltelemente L und C auf dem Schirm S der Röhre einen Kreis um den Schirmmittelpunkt. Überlagert man die elektrischen Impulse, deren zeitlicher Abstand gemessen werden soll, der Wechselspannung U, so wird dadurch der Elektronenstrahl an zwei verschiedenen Stellen der Kreisbahn ausgelenkt. Der gleiche Vorgang läßt sich auch durch ein weiteres Ablenksystem T erreichen, das axial zur Röhre hinter den Platten $P_1 P_2$ angeordnet ist. Legt man an T zwei durch den Zeitmeßvorgang erzeugte Impulse des zeitlichen Abstandes Δt, so erscheint das rechts in der Abb. 43 angedeutete Schirmbild mit den beiden Ablenkzacken Z_1 und Z_2. Ist ν die Frequenz der Wechselspannung U und sind die beiden Zacken $\alpha°$ voneinander entfernt, so beträgt die gemessene Zeitdifferenz

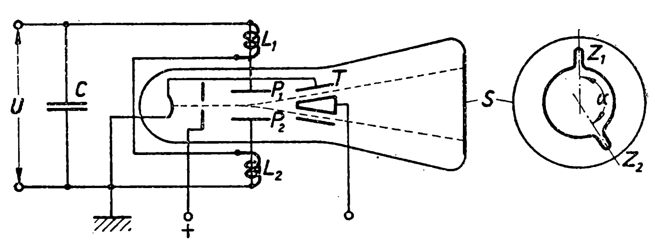


Abb. 43 Messung von Zeitunterschieden mit dem Kathodenstrahl-Oszillographen

$$\Delta t = \frac{\alpha}{360} \cdot \frac{1}{\nu}. \qquad (3/18)$$

Da noch etwa 1° abgelesen werden kann, ist die Ablesegenauigkeit $0{,}003 \cdot 1/\nu$. Dasselbe Schirmbild bekommt man, wenn man von einem R-C-Glied, das an einer Wechselspannung liegt, die Einzelspannungen zu den zwei Ablenkplattenpaaren führt. Damit gelingt es, sehr hohe Frequenzen aufzuschreiben und dementsprechend sehr kleine Zeitunterschiede zu messen. Die kleinste noch meßbare Zeitdifferenz würde bei einer angelegten Wechselspannung von der Frequenz 10^7 Hz von der Größenordnung 10^{-9} s sein.

Eine größere Ablesegenauigkeit, die recht wünschenswert ist, und einen vergrößerten Meßbereich nach längeren Zeiten erzielt man nach einem Vorschlag von Jacob (*184*). An Stelle des mit einer konstanten Wechselspannung U betriebenen Schwingungskreises ($C L_1 L_2$ der Abb. 43) wird dieser durch einen elektrischen Impuls kurzzeitig angestoßen. Der Leuchtfleck schießt aus seiner Nullage heraus und beginnt entsprechend seiner gedämpften Eigenschwingung auf einer logarithmischen Spirale mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in den Nullpunkt zurückzulaufen. Diese Spiralbahn stellt somit eine aufgerollte Zeitachse dar, die im Vergleich zu anderen Methoden den Vorteil der größeren Länge und damit ein größeres Auflösungsvermögen besitzt. Die Ablesegenauigkeit ist nach den Versuchen von Jacob, bei denen etwa 10 Umläufe sichtbar waren, um den Faktor 10 größer als bei anderen Verfahren. (s. 2. Teil § 6,13)

§ 4 MESSUNG VON MASSEN (*93, 94*)

4,1 Allgemeines

Die Bestimmung der Masse eines Körpers, die in den meisten Fällen auf den Vergleich mit einer Masse bekannter Größe hinausläuft, erfordert ein besonderes Instrument, das als *Waage* bezeichnet wird. Für die Ausführung eines solchen Vergleiches, der *Wägung*, lassen sich besonders zwei Eigenschaften der Materie, die der Masse proportional sind, heranziehen: die *Trägheit* und das *Gewicht*, d. h. den Druck, den ein Körper infolge der Erdanziehung auf eine gegenüber dieser in Ruhe befindliche Unterlage ausübt. Praktisch wird nur von der zuerst genannten Eigenschaft Gebrauch gemacht. Nach dem NEWTONschen Bewegungsgesetz gilt: Masse $\times$ Beschleunigung = Kraft oder

$$m \cdot \dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{K}, \tag{4/1}$$

wobei m die Masse, $\dot{\mathfrak{v}}$ die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung, und $\mathfrak{K}$ der Kraftvektor sind. Wir besitzen in unserem Muskelgefühl eine unmittelbare, wenn auch nur qualitative Vorstellung des Kraftbegriffes. Darüber hinaus steht uns überall auf der Erde als Vergleichsgröße die Schwere zur Verfügung, durch die alle anderen Kräfte gemessen werden können. Durch Vergleich zweier Kräfte, wobei praktisch mittels einer Rolle oder eines Hebels die Schwererichtung in die Richtung der kompensierenden Kraft umgelenkt wird, läßt sich ein quantitatives Kraftmaß gewinnen (Meßvorschrift).

Bezüglich der Dimensionen sind hier das *physikalische* und das *technische* Maßsystem zu unterscheiden. Der Unterschied besteht darin, daß im physikalischen System das Gramm (g) oder Kilogramm (kg) als Masseneinheit dient, im technischen Maßsystem dagegen das Kilogramm die Krafteinheit bedeutet. Im letzten Fall spricht man von kg-Gewicht, aus dem sich die Masse durch Division mit der Schwerebeschleunigung g (= 981 cm/s^2) ergibt. Da jedoch die Schwerebeschleunigung von der geographischen Breite abhängt (sie ist am Pol größer als am Äquator), ist das kg-Gewicht ortsabhängig und nicht transportierbar. Im folgenden sind die beiden Maßsysteme einander gegenübergestellt:

Phys. Maßsystem

$$1\ \text{kg-Gewicht} = 9{,}81 \cdot 10^5\ \text{gcm/s}^2 = 9{,}81 \cdot 10^5\ \text{dyn} = 9{,}81\ \text{Dyn (Großdyn)}$$

Techn. Maßsystem

$$1\text{g-Masse} = \frac{1\ \text{kg}}{1000} \cdot \frac{1}{g}\ \text{s}^2/\text{m}.$$

4,2 Waagen

Die bei weitem wichtigste Form der Waage verwendet stets einen Hebel oder auch ein Hebelsystem (Brückenwaage), die vorläufig als starr angenommen werden und um eine waagerechte Achse drehbar angeordnet sind. An dem einen Hebelarm greift die Schwerewirkung des zu wägenden Körpers an; das hierdurch entstehende Drehmoment kann durch ein anderes ausgeglichen werden, das eine zweite Masse am anderen Hebelarm erzeugt. Sind die beiden Momente gleich groß, bleibt die Waage im Gleichgewicht. Zur Abgleichung stehen zwei Mittel zur Verfügung: Änderung der kompensierenden Masse und Veränderung eines der Hebelarme (*Laufgewichtswaage*). Beide Methoden sind Nullverfahren, bei denen der Hebel in der Nullstellung beob-

achtet wird. Gibt man dem Hebel einen tiefliegenden Schwerpunkt, so daß bei der Wägung ein der Hebelmasse und dem Sinus des Ausschlagwinkels proportionales Drehmoment auftritt, so läßt sich die zu wägende Masse aus dem Ausschlag ermitteln (*Neigungswaage*).

4,21 *Hebelwaage*

Die *Hebelwaage* besteht demnach aus folgenden Teilen: 1. dem meist gleicharmigen Hebel, der auch Balken genannt wird, 2. den als Drehpunkte wirkenden Schneiden, von denen eine in der Balkenmitte und je eine an den Balkenenden zur Aufnahme der Waagschalen angebracht sind, 3. den beiden Gehängen zur Aufnahme der zu vergleichenden Massen, 4. dem Zeiger oder einer anderen Anzeigevorrichtung (Spiegel, Lichtblende) zur Feststellung der Balkenstellung, 5. dem Gestell.

In Abb. 44 mögen OA und OB die um den Punkt O drehbaren Hebelarme sein, die gleichlang und von der Länge l sein sollen. In der Nullstellung seien die beiden Hebelarme gegen die Horizontale um den Winkel α geneigt. An den Endpunkten A und B sind die Gewichte M angebracht, wodurch die Ruhelage des Balkens nicht geändert wird. Wird das auf der linken Schale liegende Gewicht um die Zusatzmasse m vergrößert, so soll sich der Waagebalken vom Gewicht M_b um den Winkel φ drehen, so daß der Schwerpunkt S nach S′ gelangt. Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann $l\,(M + m)\cos(\varphi + \alpha) = l\,M\cos(\varphi - \alpha) + M_b\,s\sin\varphi$, woraus sich ergibt

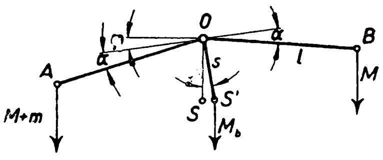


Abb. 44 Zur Theorie der Hebelwaage

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{l\,m\cos\alpha}{l\,(2\,M + m)\sin\alpha + M_b\,s}, \qquad (4/2)$$

wobei s der Abstand des Schwerpunktes S vom Drehpunkt O ist. Dividiert man Gleichung (4/2) durch das Übergewicht m, so ist deren rechte Seite ein Maß für die Empfindlichkeit, wobei der Ausschlag φ in Teilen einer Skala ausgedrückt wird, über die der Zeiger spielt. Wie die obige Beziehung zeigt, nimmt die Empfindlichkeit der Waage mit zunehmender Belastung ab, wenn α positiv ist, die seitlichen Achsen also unter der Mittelachse O liegen. Biegt sich der Balken bei Belastung elastisch durch, wodurch der Winkel α zunimmt, vermindert sich die Empfindlichkeit der Waage mit zunehmender Belastung noch schneller. Für den wichtigsten Fall $\alpha = 0$ bekommt man die Empfindlichkeit

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{m} = \frac{l}{M_b\,s}, \qquad (4/2\,\text{a})$$

die somit der Balkenlänge direkt, dem Produkt aus Balkengewicht und Schwerpunktsabstand indirekt proportional ist. Da wegen der bereits erwähnten elastischen Durchbiegung des Balkens die Bedingung $\alpha = 0$ nur für eine bestimmte Belastung eingehalten werden kann, wird ihr von dem Verfertiger der Waage gewöhnlich für eine mittlere Belastung genügt. Die Empfindlichkeit der Waage nimmt mit wachsender Belastung zunächst zu, dann ab.

Da das Gewicht eines Balkens bei gleicher Festigkeit schneller anwächst als die Länge, wird im allgemeinen eine kurzarmige Waage bei gleicher Ausführung einer mit großem l vorgezogen. Dieselbe Forderung erhebt sich auch, wenn man das dynamische Verhalten einer Waage näher betrachtet.

Die sorgfältige Konstruktion der Lager A, B und C ermöglicht eine fast reibungslose Drehung des Balkens. Die Lager (Schneiden) bestehen aus Achat oder Stahlprismen, die in Pfannen aus gehärtetem Stahl aufliegen. Das Instrument wird daher sehr schwach gedämpfte Schwingungen um die Ruhelage vollführen, es sei denn, daß eine magnetische oder Luftdämpfung angebracht ist. Bei genauen Wägungen beobachtet man deshalb nicht die Ruhelage, sondern leitet diese aus Beobachtungen der schwingenden Waage ab. Nennt man I_b das Trägheitsmoment des Balkens, so ist das Gesamtträgheitsmoment um O: $I_b + 2\,l^2 \cdot M$. Für das rückführende Moment kann man den Ausdruck $M_b\, g\, s \cdot \sin\varphi$ einsetzen. Die halbe Schwingungsdauer berechnet sich daraus für kleine Schwingungsweiten ($\sin\varphi \approx \varphi$) zu

$$\tau^2 = \pi^2 \frac{I_b + 2\,M\,l^2}{M_b\, g\, s}, \qquad (4/3)$$

wenn wir $\alpha = 0$ setzen. Da $M_b\, s$ der Empfindlichkeit φ/m umgekehrt proportional ist, nimmt die Schwingungsdauer τ mit zunehmender Empfindlichkeit zu, was natürlich die Bequemlichkeit der Ablesung erschwert. Im gleichen Sinn wirkt sich eine Vergrößerung des Trägheitsmomentes I_b aus, weshalb auch aus diesem Grunde der Waagebalken nicht übermäßig lang gemacht werden soll. Für feine chemische Waagen werden die Balken meist in Form eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks ausgeführt, das zur Verminderung des Trägheitsmomentes und seiner Masse durchbrochen gearbeitet ist, wie in der Abb. 45 gezeigt ist.

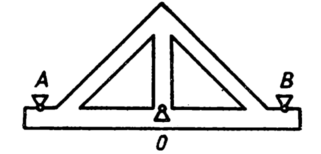


Abb. 45 Balkenform bei feinen chemischen Waagen

Die Genauigkeit einer Waage beruht vor allem auf der Beständigkeit der Hebelarme bzw. ihres Verhältnisses H. Will man bei einer Hebelarmlänge von 10 cm auf 10^{-8} genau wägen, so muß l auf 0,001 μ konstant sein. Aus diesem Grunde sind Temperaturänderungen sorgfältig fernzuhalten, der Balken ist aus Material mit großem Wärmeleitvermögen und schlechtem äußeren Wärmeübergang (vernickeln und polieren!) herzustellen.

Eine weitere und wichtigere Fehlerquelle als die oben genannte besteht darin, daß sich die Lage der drei Achsen in Balkenrichtung verschiebt. Dieser Fehler ist um so merklicher, je kürzer die Balkenarme gewählt werden.

Der Balken, über dessen Form bereits gesprochen wurde, wird aus verschiedenen Legierungen, wie Phosphorbronze, Magnalium oder auch Aluminium, gefertigt. Die Achsen werden aus ebenen, meist geschliffenen Pfannen und dreieckigen Schneiden gebildet, die aus Achat, Karneol oder, wenn die Gefahr des Rostens nicht besteht, aus Stahl hergestellt werden. Die Mittelpfanne sitzt auf einer Stange, die durch einen Exzenter in der Mittelsäule der Waage auf und ab bewegt werden kann, so daß die Schneiden nach der Wägung abzuheben sind. Der Balken legt sich dann auf ein festes Lager, auf das sich auch die Seitenschneiden aufsetzen, die durch eine andere Vorrichtung ebenfalls von ihren Pfannen getrennt werden. Der mit dem Balken verbundene Zeiger bewegt sich dicht über einer Millimeterteilung, die nötigenfalls mit einer Lupe oder einem Fernrohr beobachtet wird. Durch ein Reguliergewicht, das sich auf einer senkrechten, durch den Mittelpunkt O gehenden Spindel verstellen läßt, kann man den Schwerpunkt des Waagebalkens verschieben und damit die Empfindlichkeit verändern. Um an kleinen Gewichten zu sparen, besitzen weniger genaue Waagen ein Reiterlineal, das mit dem Balken verbunden ist. Ist die Strecke zwischen

der mittleren Achse und der Seitenachse in 100 Teile eingeteilt und verschiebt man ein Drahtgewicht von z. B. 10 mg, so kann man auf 0,1 mg genau einstellen.

Empfindliche Waagen werden meist mit Spiegel und Skala abgelesen und sind durch einen Glaskasten gegen störende Luftströmungen und Temperatureinflüsse geschützt.

4,22 *Neigungswaage*

Will man schnell wägen, so ist hierzu das Prinzip der Nullmethode wenig geeignet. Man geht in diesem Fall auf die weniger genaue Ausschlagmethode über, auf der die Neigungswaagen beruhen.

Wir betrachten zu diesem Zweck die in der Abb. 46 dargestellte Waage, bei der sich der geknickte Hebel AOB um die Achse O dreht. Im unbelasteten Fall befindet sich der Schwerpunkt S des Hebels, an dem die Balkenmasse M_b angreift, senkrecht unter O. Der Hebelarm AO von der Länge l, an dessen Endpunkt A die Schale vom Gewicht M_s hängt, sei horizontal. Wird nun auf die Schale die Masse M aufgelegt, so dreht sich der Waagebalken um den Winkel φ, der sich aus der Gleichgewichtsbedingung

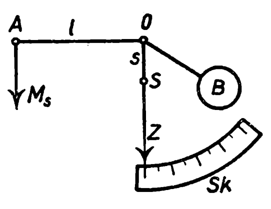


Abb. 46 Neigungswaage

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l\,(M_s + M) - M_b\, s \sin \alpha}{M_b\, s \cos \alpha} \tag{4/4}$$

berechnet, worin α den Winkel zwischen der Senkrechten und der Verbindungslinie SO für den Fall $M = 0$ bedeutet. Da nun für $M = 0$ der Ausschlag Null sein soll, vereinfacht sich Gleichung (4/4) zu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M}{M_b \cdot s \cos \alpha}. \tag{4/5}$$

Die zu bestimmende Masse M ist also dem Tangens des Ausschlagwinkels proportional; eine solche Skala läßt sich leicht konstruieren, wenn man den Betrag des Reduktionsfaktors $M_b\, s \cos \alpha$ einmal experimentell bestimmt hat. Die Ablesegenauigkeit wird gegen das Ende der Skala geringer, weshalb man den maximalen Ausschlag auf etwa 50° begrenzt. Für bestimmte physikalische Aufgaben, wie etwa die Feststellung eines sich stetig ändernden Gewichtes, bleibt trotz der mäßigen Genauigkeit die Neigungswaage ein recht brauchbares Instrument.

4,23 *Mikrowaagen (85, 89)*

Als Mikrowaagen bezeichnet man Waagen mit hoher Empfindlichkeit, die es gestatten, kleine Massen mit verhältnismäßig großer Genauigkeit zu bestimmen. Zu ihrer Konstruktion sind die verschiedensten Prinzipien angewendet worden; es sind Neigungs-, Balken-, Torsions- und Federwaagen in Gebrauch.

Die Mikrowaage nach HOLTZ ist eine kleine Balkenwaage für 20 g Höchstlast mit einer Ablesegenauigkeit von 10^{-6} g.

Die von STEELE und GRANT (*332*) konstruierte Waage besitzt Balken und Schneiden aus Quarzglas; die Wägung geschieht im Vakuum. Zur Herstellung des Gleichgewichts sind am Balken zwei Massen gleichen Gewichts, aber verschiedenen Volumens angebracht. Variiert man den Luftdruck meßbar, so ändert sich damit die Auftriebsdifferenz der beiden Massen, wodurch das Gleichgewicht genau eingestellt werden kann.

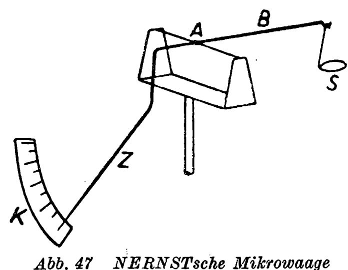


Abb. 47 NERNSTsche Mikrowaage

Abweichend davon dient bei der NERNSTschen Mikrowaage, die in der Abb. 47 dargestellt ist, als Mittelachse der etwa 5 cm lange, dünne Quarzfaden A, in dessen Mitte quer ein Waagebalken B aus einem dickeren, abgewinkelten Quarzfaden angekittet ist. Das waagerechte Ende des Balkens trägt die leichte Waagschale S von nur 20 mg Gewicht, die aus einer dünnen Platinfolie hergestellt ist. Das andere Balkenende ist zu einem feinen Zeiger Z ausgezogen, der über einer feingeteilten Spiegelskala K spielt. Die Empfindlichkeit beträgt etwa $^1/_{100}$ mg bei einer Höchstlast von einigen Milligramm. Die Waage stellt eine Kombination von Torsions- und Neigungswaage dar, da die Torsion des dünnen Quarzfadens zu einem, wenn auch geringen Teil eine Rückstellkraft ausübt.

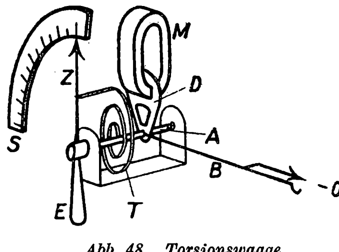


Abb. 48 Torsionswaage

Für Höchstlasten bis zu 1 g dient vielfach, wenn auch für geringere Genauigkeitsansprüche, die in der Abb. 48 dargestellte Torsionswaage (*229*). Sie besitzt eine Stahlachse A, die in Edelsteinen gelagert ist und den einarmigen Waagebalken B trägt, dessen Zeiger sich auf die Nullmarke einspielt. Der Balken wird durch die Uhrfederspirale T aus nachwirkungsarmem Material im Gleichgewicht gehalten. Nach Aufbringen der zu bestimmenden Last wird der Waagebalken durch Torsion von T mittels des Einstellhebels E in seine Nullstellung zurückgeführt. Das Gewicht wird dann an dem mit E verbundenen Zeiger Z auf der Skala S abgelesen. Die Schwingungen des Systems werden durch die Aluminiumdämpferscheibe D, die im Spalt eines kleinen Permanentmagneten M schwingt, gedämpft. Die Meßgenauigkeit der Waage, die für mehrere Meßbereiche ausgeführt wird, beträgt etwa $^1/_{1000}$ der Höchstlast.

4,24 *Magnetische Waage* (*61*)

ROBINSON (*294*) hat für besonders feine Wägungen, z. B. von Kriställchen, eine einfache Methode angegeben, die großer Genauigkeit fähig ist. Seine Waage besteht, wie in der Abb. 49 angedeutet ist, aus dem leichten Waagebalken B aus einem dünnwandigen Pyrexglasröhrchen mit Karborundumschneiden, die auf einer Glasplatte ruhen. In dieses Röhrchen ist eine magnetisierte Stahlnadel M eingeschmolzen; die zu wägende Masse wird auf das leichte Glasschälchen S aufgebracht. Am anderen Ende des Balkens ist die feine Glasspitze als Zeiger Z befestigt, die mit dem Mikroskop A beobachtet wird. Die Schwingungsdauer des Systems beträgt etwa 2 s. Diese kleine Waage wird mit ihrem Schutzgehäuse zwischen zwei großen HELMHOLTZ-Spulen (siehe Bd. III) H_1 und H_2 aufgestellt. Besitzt die Stahlnadel das magnetische Moment μ, so wird durch die vom Strom J durchflossenen Spulen ein mechanisches Moment von der Größe $C \cdot \mu \cdot J$ ausgeübt, wobei C eine Apparatekonstante ist, die durch ein

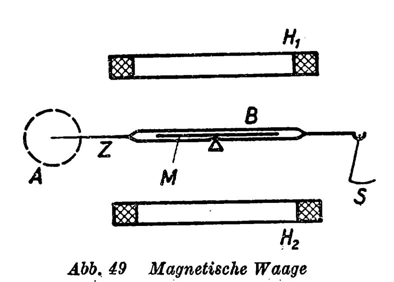


Abb. 49 Magnetische Waage

bekanntes Gewicht experimentell bestimmbar ist. Die Empfindlichkeit bleibt über einige Monate konstant etwa 10^{-6} g. Von großem Einfluß ist eine Abschirmung gegen elektrische und magnetische Störfelder. BEAMS (*20*) beschreibt eine schwebende magnetische Aufhängung, die als Waage noch 10^{-9} g zu messen gestattet.

4,25 *Elektrische Waage*

Mit einer geeigneten Anordnung ist es auch möglich, den beweglichen und feststehenden Teil der magnetischen Waage zu vertauschen, womit man zu einer Meßanordnung kommt, die dem Zeigerwerk eines Drehspulsystems ähnelt. Der Waagebalken ist an einer vom Strom J durchflossenen Drehspule befestigt, die sich in einem zylindrischen permanenten Magnetfeld befindet. Das von der zu wägenden Last ausgeübte Drehmoment läßt sich elektrisch kompensieren, wobei der Zusammenhang zwischen Gewicht M und dem Spulenstrom gegeben ist durch

$$M = C \cdot J \cdot H, \tag{4/6}$$

wenn C eine Instrumentenkonstante und H die magnetische Feldstärke im Luftspalt ist. Um eine große Empfindlichkeit zu erhalten, sind die Stromzuleitungen dünn zu machen.

Sowohl magnetische als elektrische Waagen eignen sich vorzüglich für Messungen in unzugänglichen Räumen (Hochdruck, Vakuum) und sind auch für Fernmessungen verwendbar. Die Gleichgewichtslage läßt sich mit Hilfe von elektrischen Kontakten feststellen oder besser, weil rückwirkungsfrei, durch optische oder elektrische Methoden der Abstandsmessung erreichen (§ 2,5).

Von MONK (*254*) wird eine feine chemische Waage beschrieben, mit der Wägungen bei Hochvakuum und Temperaturen bis zu 700° C durchgeführt werden können. Die Waage befindet sich unter einer evakuierten Glasglocke und verwendet als veränderliches Gegengewicht eine am Waagebalken befestigte feingliedrige Kette, deren anderes Ende durch eine elektrisch betriebene Spindel von außen ablesbar verschoben wird. Der zu wägende Körper hängt an einem dünnen Platindraht, der durch eine feine Bohrung im Deckel des eigentlichen, auf hoher Temperatur befindlichen Meßraumes geführt und am Waagebalken befestigt wird. Die Empfindlichkeit beträgt bei 200 g Maximalgewicht 0,05 mg.

4,3 **Wägungsmethoden**

4,31 *Bestimmung der Gleichgewichtslage*

Besitzt die Waage eine Luftreibungsdämpfung oder elektrodynamische Dämpfung, so läßt sich die Gleichgewichtslage am Teilstrich der Skala ablesen. Bei ungedämpften Waagen ist dieses Verfahren zeitraubend und weniger genau, als wenn man die Waage im schwingenden Zustand beobachtet. Dabei betrage die Schwingungsweite einige Skalenteile. Die ersten Umkehrpunkte nach dem Lösen der Waage werden nicht abgelesen. Man findet die Gleichgewichtslage am besten aus einer ungeraden Anzahl von Ablesungen aufeinanderfolgender Umkehrpunkte. Für drei aufeinanderfolgende Umkehrpunkte, deren Amplituden $a_1, a_2, a_3 \ldots$ linear abnehmen, erhält man die Gleichgewichtslage aus:

$$a = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a_1 + a_3) + a_2\right].$$

4,32 *Proportionalitätsmethode*

Bezeichnet man das Verhältnis der Hebellängen der gleicharmigen Waage mit H, mit M_1 und M_2 die beiden zu vergleichenden Massen auf den Waagschalen, so gilt

$$M_1 = M_2 H. \tag{4/7}$$

Diese Gleichung stellt eine Wägung dar, wenn man auf die Bestimmung von H bei jeder einzelnen Wägung verzichtet. Bei weniger genauen Wägungen ist das auch angängig, wenn man H ein für allemal bestimmt hat und als unveränderlich betrachtet. Auch für den Fall, daß man nur ein Massenverhältnis bestimmen will, ist die Kenntnis des genauen Wertes des Hebelverhältnisses nicht erforderlich.

Will man H nicht als gegeben ansehen und den Absolutwert einer Masse sehr genau messen, so reicht *eine* Beobachtung der durch die Gleichung (4/7) dargestellten Art (Teilwägung) nicht aus, um eine Beziehung zwischen den Massen M_1 und M_2 festzulegen.

Bei der Handhabung der Waage ist zu bemerken, daß es im allgemeinen kaum möglich ist, die Waage bei allen Teilwägungen durch Auflegen von Gewichten auf den Nullpunkt der Skala zum Einspielen zu bringen. Durch Beobachten der schwingenden Waage stellt man die Abweichung a vom Nullpunkt fest und bekommt an Stelle von (4/7)

$$M_1 = M_2 H + \frac{a}{E}, \tag{4/8}$$

wenn man mit E die Empfindlichkeit der Waage bezeichnet, die sich aus Gleichung (4/2) zu

$$E = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{m} = \frac{l \cos\alpha}{l\,(2\,M + m)\sin\alpha + M_b \cdot s} \tag{4/9}$$

ergibt, wobei statt des Tangens der auf Skaleneinheiten bezogene Winkel eingesetzt wird, der einem bestimmten Übergewicht (z. B. 1 mg) entspricht.

4,33 *Tarierverfahren* (BORDA)

Nach dem Tarierverfahren wird die zu wägende Masse M_x auf die eine Waagschale und auf die andere so viel von einer beliebigen Tara gelegt (Teile eines Gewichtssatzes, Bleischrot, Flüssigkeitsbehälter), daß die Waage ins Gleichgewicht kommt, wobei der noch verbleibende Ausschlag a_1 sein soll. Darauf wird die Masse M_x durch Normalgewichte M_n ersetzt, bis die Waage wieder einspielt und ein Ausschlag a_2 verbleiben soll. Bezeichnet man die Taramasse mit T, so gilt für die beiden Teilwägungen

$$\text{(I)} \quad T = M_x \cdot H + \frac{a_1}{E}$$

$$\text{(II)} \quad T = M_n \cdot H + \frac{a_2}{E},$$

woraus sich M_x zu

$$M_x = M_n + \frac{(a_2 - a_1)}{E \cdot H} \tag{4/10}$$

errechnet. Für kleine Differenzen von a kann $H = 1$ gesetzt werden.

Die größte Fehlerquelle bei sehr genauen Wägungen ist zweifellos der Temperaturwechsel während der Teilwägungen. Ist ein mit der Zeit etwa proportionaler Temperaturgang vorhanden, so läßt sich der Temperaturfehler verringern, wenn man unmittelbar an die erste Doppelwägung anschließend eine weitere in umgekehrter Reihenfolge wiederholt und das Ergebnis mittelt.

4,34 *Vertauschungsmethode* (GAUSS)

Beim Vertauschungsverfahren legt man die zu wägende Masse M_x nacheinander auf die rechte und linke Waagschale und bringt jedesmal die Waage durch Auflegen von Normalgewichten auf die andere Schale zum Einspielen. Sind dazu die Vergleichsgewichte M_{n1} und M_{n2} nötig und ergeben sich die Einstellungen b_1 und b_2, so bekommt man für die gesuchte Masse die Beziehung

$$M_x = \frac{M_{n1} + M_{n2} + (b_2 - b_1) / E}{2}. \tag{4/11}$$

Daraus ist ersichtlich, daß bei dieser Wägungsmethode nur die halbe Differenz der sich bei den Teilwägungen einstellenden Ausschläge in das Ergebnis im Gegensatz zur Tariermethode eingeht. Demgegenüber ist das Umsetzen der beiden Massen komplizierter als das Auswechseln der Massen auf nur einer Seite bei der BORDAschen Methode.

Bei beiden Verfahren geht die Ruhelage der unbelasteten Waage nicht in das Meßergebnis ein.

Zur Prüfung und Feststellung des *Hebelverhältnisses H* macht man ebenfalls vom Vertauschungsverfahren Gebrauch. Die Länge des rechten und linken Hebelarmes sei L_r bzw. L_l. Werden dabei nahezu gleiche Gewichte M_1 und M_2 miteinander verglichen und muß bei der Vertauschung rechts zu M_1 das Zusatzgewicht m_1 und zu M_2 das Gewicht m_2 hinzugefügt werden, um Gleichgewicht zu bekommen, so gilt nach dem Hebelgesetz:

$$(M_1 + m_1) L_l = M_2 L_r; \quad (M_2 + m_2) L_l = M_1 L_r,$$

woraus sich unter Vernachlässigung der kleinen Größen höherer Ordnung das Hebelverhältnis zu

$$H = \frac{L_l}{L_r} = 1 + \frac{m_1 - m_2}{2M} \tag{4/12}$$

berechnet, wenn $M \approx M_1 \approx M_2$ ist.

4,35 *Berücksichtigung des Luftauftriebes*

Bisher wurde stillschweigend angenommen, daß die Wägung unmittelbar die Masse eines Körpers ergäbe. Das ist jedoch nur im Vakuum der Fall oder wenn die beiden zu vergleichenden Massen gleiches Volumen haben, also aus demselben Material oder hohl sind. An der Waage selbst macht sich der Luftauftrieb wegen des vollkommen symmetrischen Aufbaues nicht bemerkbar. Hat die zu wägende Masse M das Volumen v_m und die Dichte ϱ_m, die Gewichtsstücke von der Masse G das Volumen v_g und die Dichte ϱ_g und ist die Luftdichte ϱ_l, so gilt

$$M = G + \varrho_l (v_m - v_g) = G\left(1 + \frac{\varrho_l}{\varrho_m} - \frac{\varrho_l}{\varrho_g}\right). \tag{4/13}$$

Das Korrekturglied $\varrho_l (v_m - v_g)$ wächst also mit der Größe des Dichteunterschiedes.

Jede genaue Wägung bedarf daher einer Bestimmung der Luftdichte, die von der Temperatur, dem Luftdruck und der Feuchtigkeit im Waagekasten abhängt. Im Mittel wird man eine Luftdichte von 0,001293 annehmen können, die auf 10^{-3} genau ist. Für genaue Messungen wird die Luftdichte Tabellen z. B. BLOCK (*34*) entnommen, die Wasserdampfgehalt und Temperatur berücksichtigen, wobei man im allgemeinen mit einer relativen Feuchte von 50% rechnen kann. In der folgenden Tabelle IV sind die Korrekturen einer mit Messinggewichten ($\varrho_g = 8{,}4$) in Luft ($\varrho_l = 0{,}00120$) ausgeführten Wägung für verschiedene Dichten ϱ_m auf den leeren Raum ausgerechnet. Die Korrektur k ist zu dem festgestellten Gewicht (in g) hinzuzuzählen und auf 1 g bezogen.

ϱ_m	$k \cdot 10^3$	ϱ_m	$k \cdot 10^3$
1	+ 1,060	11	— 0,034
2	0,457	12	0,043
3	0,257	13	0,051
4	0,147	14	0,057
5	0,097	15	0,063
6	0,057	16	0,068
7	0,029	17	0,072
8	+ 0,007	18	0,076
9	— 0,010	19	0,080
10	0,023	20	0,083

Tabelle IV

Sollen bei sehr feinen Wägungen z. B. geringe Mengen einer Substanz in einem Behälter relativ großen Volumens gewogen werden, so lassen sich Auftriebsfehler vermeiden, wenn man durch einen gleichen Behälter tariert und nur die zu wägende Substanz durch Gewichte ausgleicht.

Eine weitere, sehr kleine Korrektion einer Massenbestimmung kann schließlich noch erforderlich sein, wenn sich die beiden zu vergleichenden Massen bei der Wägung nicht in gleicher Höhe über dem Erdboden befinden, also verschieden großer Erdbeschleunigung unterworfen sind. Durch Messungen wurde gefunden, daß zu der Masse M, die h cm höher als die Vergleichsmasse steht, $M \cdot h \cdot 0{,}003$ mg zu addieren sind.

4,4 Gewichte

4, 41 *Masseneinheit*

Bisher ist nur vom Vergleich zweier Massen die Rede gewesen, der in vielen Fällen, bei denen die Massen nicht auf eine allgemeingültige Grundeinheit bezogen werden, wie z. B. Untersuchungen der Zusammensetzung von Körpern, ausreichend ist. Für die meisten wissenschaftlichen Arbeiten und in der Technik wird jedoch die Massenangabe in absoluten Werten, d. h. bezogen auf eine allgemein festgelegte Einheit verlangt.

Von einer solchen Einheit muß man erwarten können, daß sie zeitlich unveränderlich ist und durch chemische Einflüsse oder Adsorption von Dämpfen an der Oberfläche keinerlei Veränderung erleidet.

Durch die Wahl des natürlichen Längenmaßes (§2,1) als den zehnmillionsten Teil eines Erdquadranten wurde als *Masseneinheit* die Masse eines Würfels aus Wasser

größter Dichte, dessen Kantenlänge gleich dem zehnten Teil der Längeneinheit ist, festgelegt. Diese Masse wurde mit *Kilogramm* bezeichnet, später aber, als man feststellte, daß die Genauigkeit der Wägungen die des Ausmessens von 1 dm³ bei weitem übertraf, durch ein Gewichtsstück definiert, dessen Masse mit der von 1 dm³ Wasser nach den besten Messungen abgeglichen wurde (1889).

An dieses *Kilogramm des Archives* wurden die Urgewichte der meisten Kulturstaaten angeschlossen. Diese Kopien bestehen ebenfalls aus einer Platin-Iridium-Legierung mit 10% Ir der Dichte 21,55, die eine große Härte besitzt und auf Hochglanz polierbar ist. Die Genauigkeit, mit der die Masse der einzelnen Urgewichte bekannt ist, beträgt etwa 10^{-8}.

4,42 *Gewichtssätze*

Zur Wägung beliebiger Massen, deren obere Grenze allerdings durch die Konstruktion der Waage gegeben ist, ist eine Anzahl von Massennormalen, ein *Gewichtssatz*, erforderlich. Gewöhnlich werden innerhalb einer Dekade die Stücke 1,2, 2,5 verwendet, aus denen sich alle dazwischenliegenden Werte zusammensetzen lassen. Das kleinste noch zu verwendende Gewichtsnormal ist durch die Empfindlichkeit der Waage bestimmt.

Gewichte unter 1 g mit der Masse zwischen 10 und 500 mg sind meistens aus Platin (oder dessen Legierungen) in Form dünner Plättchen hergestellt und schon der äußeren Form nach als 100, 200 oder 500 mg-Stücke erkennbar. Für Stücke unterhalb 10 mg nimmt man am besten Aluminium, woraus Gewichte bis herunter zu 0,1 mg und Drahtgewichte (für Reiterwaagen) von 0,05 mg zu fertigen sind.

Stücke von 1 g und mehr werden aus Messing oder Neusilber hergestellt und vernickelt, vergoldet oder platiniert. Gelegentlich findet man auch Gewichtssätze aus Bergkristall, denen jedoch der Nachteil anhaftet, daß sie durch die Berührung elektrisch werden und Staub anziehen.

Die Form der Gewichte bis zu 1 g herab ist meist zylindrisch mit angedrehtem Knopf, der die Handhabung erleichtert.

Für genaue Messungen kann man die wahren Beträge (Istgewicht) der einzelnen Stücke nicht ohne weiteres den aufgeprägten Sollgewichten gleichsetzen. Durch den Anschluß an genau bekannte Normalgewichte muß der Gewichtssatz stückweise geeicht werden, wobei natürlich nur ein Stück absolut zu bestimmen ist. Die Abweichungen der einzelnen Gewichte werden durch Vergleich untereinander festgestellt. Wechselt das Material der Gewichte, z.B. beim Übergang von Messinggewichten von 1 g auf Platingewichte in Blechform, so müssen die Auftriebskorrekturen angebracht werden.

4,5 **Empfindlichkeitsgrenze der Waage**

Die in § 4,2 abgeleitete Beziehung (4/2), die ein Maß für die Empfindlichkeit der Hebelwaage darstellt, läßt vermuten, daß grundsätzlich kein Hemmnis vorhanden ist, diese beliebig zu erhöhen. Das könnte z. B. durch gleichzeitige Verkleinerung des Winkels α und des Schwerpunktabstandes s geschehen, wenn man die Vergrößerung der Hebellänge l außer acht lassen will. Aber auch hier wird einer übermäßigen Steigerung der Empfindlichkeit, ähnlich wie beim Fall der Messung kleiner Winkel (§ 2,64) durch die BROWNsche Molekularbewegung, eine Grenze gesetzt, die nur dann zu überwinden ist, wenn man die Waage ins Vakuum bringt.

Diese Frage der Empfindlichkeitsbegrenzung durch die Molekularbewegung hat ISING (*181*) eingehend diskutiert; hier sollen nur die grundsätzlichen Überlegungen gebracht werden.

EINSTEIN (*81*) konnte nachweisen, daß ein elastisch gebundener oder sonst schwingungsfähiger Körper eine Art BROWNsche Bewegung um seine Gleichgewichtslage ausführen muß, deren mittlere Amplitude durch die Beziehung gegeben ist,

$$\frac{1}{2} D \overline{x^2} = \frac{1}{2} k T , \qquad (4/14)$$

worin D die Direktionskonstante des Systems, $\overline{x^2}$ das mittlere Schwankungsquadrat, k die BOLTZMANN-Konstante und T die absolute Temperatur sind. Auf der rechten Seite der Gleichung steht die molekulare Energie pro Freiheitsgrad; x ist die Koordinate in der Schwingungsrichtung. Die mittlere Schwankung $\sqrt{\overline{x^2}}$, die wir mit $\overline{\overline{x}}$ bezeichnen wollen, wird dann

$$\overline{\overline{x}} = \sqrt{\frac{k T}{D}} . \qquad (4/15)$$

Diese Beziehung ist von grundsätzlicher Bedeutung für die Theorie verschiedener Meßgeräte (Radiometer, Galvanometer), da sie den unvermeidlichen mittleren Fehler bei einer Messung des Ausschlages wiedergibt.

Für die Anwendung von Gleichung (4/15) auf die Hebelwaage soll eine gleicharmige Hebelwaage von der Balkenlänge $2\,l$ betrachtet werden, deren Balkenträgheitsmoment durch die fiktive Belastung der Balkenenden durch die halbe Balkenmasse $M_0/2$ dargestellt werde. Die beiden Waagschalen sind durch die Massen M belastet. Durch Aufbringen des Übergewichtes δm entsteht der Winkelausschlag $\delta \alpha$, der sich aus der Direktionskraft D berechnet zu

$$D\,\delta\alpha = l\,g\,\delta m \quad (g = \text{Erdbeschleunigung}).$$

Hieraus berechnet sich die Empfindlichkeit E zu

$$E \equiv \frac{\delta \alpha}{\delta m} = \frac{g\,l}{D} . \qquad (4/16)$$

Die ungedämpfte (halbe) Schwingungsdauer der Waage wird nach Gleichung (4/3) für diesen Fall

$$\tau_0 = \pi l \sqrt{\frac{M_0 + 2\,M}{D}} , \qquad (4/17)$$

woraus durch Erweiterung mit g folgt

$$\frac{\sqrt{D}}{l\,g} = \frac{\pi}{\tau_0\,g} \sqrt{M_0 + 2\,M} . \qquad (4/17\,\text{a})$$

Aus (4/16) und Beachten der Gleichung (4/15) folgt

$$\overline{\overline{\delta \alpha}} = \frac{\overline{\overline{\delta m}}\,g \cdot l}{D} = \sqrt{\frac{k T}{D}} ,$$

woraus sich ergibt

$$\frac{\sqrt{D}}{g\,l} = \frac{\overline{\overline{\delta m}}}{\sqrt{k T}} . \qquad (4/18)$$

Durch Vergleich der Gleichungen (4/17 a) und (4/18) bekommt man einen Ausdruck für den mittleren Fehler beim Ablesen einer Massenänderung

$$\overline{\overline{\delta m}} = \frac{\pi}{\tau_0 g} \sqrt{k T (M_0 + 2 M)}. \qquad (4/19)$$

Ebenso läßt sich die mittlere Schwankung des Ausschlagswinkels $\overline{\overline{\delta \alpha}}$ angeben durch die Beziehung

$$\overline{\overline{\delta \alpha}} = \frac{\tau_0}{\pi l} \sqrt{\frac{k T}{M_0 + 2 M}}. \qquad (4/20)$$

Die mittlere Schwankung des mit dem Waagbalken verbundenen Zeigers oder Spiegels wird also mit zunehmender Schwingungsdauer und abnehmender Belastung größer.

Unter Vernachlässigung des Trägheitsmomentes des Balkens und nach Einsetzen der Zahlenwerte für k und g werden

$$\overline{\overline{\delta m}} \approx 10^{-9} \frac{\sqrt{M}}{\tau_0} \mathrm{g}. \qquad \overline{\overline{\delta \alpha}} \approx 10^{-8} \frac{\tau_0}{\sqrt{M \cdot l}}.$$

Wir erkennen daraus, daß besonders beim Gebrauch von Mikrowaagen mit großer Schwingungsdauer bei kleiner Belastung (z. B. 1 mg) die mittlere Schwankung des Ausschlages merklich sein kann.

§ 5 RAUMMESSUNG (*300*)

5,1 Raumeinheit

Wegen der theoretischen Beziehung zwischen der Massen- und Längeneinheit kann man Raumgrößen sowohl durch Ausmessung als auch durch Massenvergleichung (Wägung) bestimmen. Hierbei gilt als Einheit das Volumen, das von 1 kg Wasser größter Dichte (4° C) bei Normaldruck eingenommen wird. Diese Einheit wird *Liter* genannt. Wird die Raumerfüllung geometrisch ausgemessen, so bekommt man sie in cm³. Wäre nun die Masseneinheit wirklich genau gleich der Masse eines cm³ Wasser im Zustand größter Dichte, so würde 1 dm³ = 1 l sein. Obwohl für das praktische Messen die beiden Maßgrößen hinreichend genau übereinstimmen, ist die Absicht, die man bei der Aufstellung des metrischen Systems verfolgte, nicht exakt erreicht worden. Durch drei Arbeiten des Internationalen Bureaus ist das Verhältnis beider Größen endgültig bestimmt worden. Dabei wurde in der Weise verfahren, daß man durch Wägung eines regelmäßig gestalteten Körpers von genau bekanntem spezifischem Gewicht, das durch die hydrostatische Methode (§ 5,32) bestimmt wurde, dessen Volumen festgestellt und mit dem durch genaue geometrische Ausmessung gewonnenen Volumen verglichen hat. Die lineare Ausmessung setzt sehr genaue ebene oder zylindrische Begrenzungsflächen voraus und kann nur mit den genauesten Längenmeßmethoden gemessen werden. Das Mittel der drei Messungen ergab schließlich die Beziehung

$$1 \text{ Liter} = 1000{,}027 \text{ cm}^3.$$

GUILLAUME führte seine Messungen an drei Bronzezylindern von 10, 12 und 14 cm Höhe und 10, 11 und 13 cm Durchmesser durch, deren Abmessungen auf dem

Komparator ermittelt wurden. CHAPPUIS maß die Kantenlänge sorgfältig geschliffener Würfel von 4, 5 und 6 cm Seitenlänge nach dem MICHELSONschen Interferenzverfahren auf optischem Wege aus. MACÉ DE LEPINAY und BUISSON bestimmten die Kantenlänge zweier Quarzwürfel von 4 und 5 cm Kantenlänge ebenfalls interferometrisch auf $^1/_{20}$ Streifenbreite genau.

5,2 Messung von Hohlvolumina

Für die Bestimmung von Hohlräumen werden vor allem folgende Verfahren für physikalische Messungen verwendet:

5,21 *Auswägung*

Am einfachsten wird der Inhalt eines Gefäßes dadurch bestimmt, daß man das Gefäß (z. B. aus Glas, Metall) zunächst leer, dann ganz mit einer Flüssigkeit bekannter Dichte ϱ_t gefüllt wägt, woraus sich, wenn man alle Wägungen auf den leeren Raum bezogen hat, das gesuchte Volumen ergibt zu

$$V_t = (M_1 - M_2) / \varrho_t, \qquad (5/1)$$

wenn M_1 die Masse mit Flüssigkeit und M_2 die Masse des leeren Gefäßes bedeuten. Als Füllflüssigkeit dienen fast ausschließlich Wasser und Quecksilber, deren Dichten in Abhängigkeit von der Temperatur aus Tabellen (*172*) zu entnehmen sind. Quecksilber hat den Vorteil, daß es das Gefäß nicht benetzt, jedoch den Nachteil, daß bei größeren Volumina die durch die Füllung verursachte elastische Dehnung zu berücksichtigen ist. Die Flüssigkeitsspiegel werden gewöhnlich auf eingeätzte Strichmarken an der Gefäßwand eingestellt, wobei bei Wasser auf den unteren Rand, bei Quecksilber auf den oberen Rand der Kuppe eingestellt wird. Zur Vermeidung des Parallaxenfehlers mißt man entweder mit dem Kathetometer oder einfacher durch Spiegelung des Auges in einem hinter die Flüssigkeitssäule geklebten Streifen Spiegelglas mit eingeätztem Maßstab. Der durch die Meniskusbildung sich ergebende Fehler muß berücksichtigt werden. In einigen Fällen, z. B. bei der Kalibrierung von Büretten, bei denen es nur auf die Differenz von zylindrischen Hohlräumen ankommt, ist eine Korrektur nicht notwendig. Wird das Gefäß bis zum Rand gefüllt, läßt sich der Meniskus durch Andrücken einer ebenen Glasplatte ganz vermeiden. In allen anderen Fällen muß das Volumen der Flüssigkeitskuppe in Rechnung gesetzt werden, wofür für Quecksilber Tabellen zur Verfügung (*267*, *301*) stehen.

Wie in Gleichung (5/1) durch den Index von V angedeutet, muß bei der Messung des Volumens die Temperatur genau erfaßt und berücksichtigt werden, wenn das Gefäß für Meßzwecke bei einer anderen Temperatur verwendet wird. Ist β der lineare Ausdehnungskoeffizient des Gefäßmaterials, sind t_0 und t die Temperaturen bei der Eichung und Messung, so gilt bekanntlich

$$V = V_0 [1 + 3 \beta (t - t_0)]. \qquad (5/2)$$

5,22 *Pipetten und Büretten* (*349*)

Innenvolumina sind als Hohlmaße eichfähig, wobei in der beschriebenen Weise verfahren wird oder diese mit einem bekannten Volumen verglichen werden. Sie bestehen meist aus Glas und haben zylindrische Form. Als *Pipetten* (Abb. 50) sind sie als

Ganzes geeicht und an zwei eingeätzten Strichmarken ablesbar, wobei die Temperatur, für die das angegebene Volumen dem „Istwert" entspricht, einzuhalten ist. *Büretten* (Abb. 51) bestehen aus einem zylindrischen Glasrohr, dessen Volumen auf der eingeätzten Teilung abzulesen ist. Beim Gebrauch ist darauf zu achten, daß beim Ausgießen ein Teil der Flüssigkeit die Innenwand benetzt und zurückbleibt, das Hohlmaß also, wenn es für diesen Gebrauch bestimmt ist, um diesen Betrag zu groß sein muß. Daher sind Gefäße für Trockenfüllung wesentlich genauer im Gebrauch. Für gewöhnliches Glas kann man für den Volumenausdehnungskoeffizienten 3β den Wert $\frac{1}{40000}$ einsetzen.

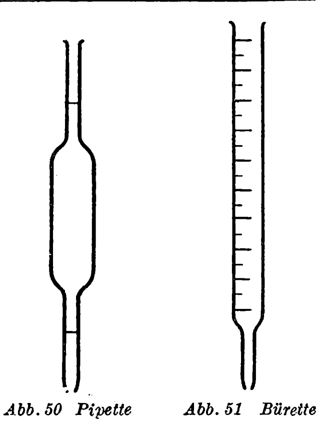


Abb. 50 Pipette *Abb. 51 Bürette*

Mit guten Pipetten erreicht man eine Meßgenauigkeit von etwa $5 \cdot 10^{-4}$.

5,23 *Kapillaren und Kalibrieren*

Das Hohlvolumen enger, kreisförmiger *Röhren* und *Kapillaren* läßt sich aus deren Gewicht M, der Dichte ϱ des Glases, dem Außenradius und der Länge l bestimmen. Wir erhalten für den lichten Querschnitt

$$q = r^2 \pi = R^2 \pi - \frac{M}{\varrho \cdot l}. \tag{5/3}$$

Für gewöhnliches (Thüringer-)Glas kann man $\varrho = 2{,}50$ setzen. Dieses Verfahren ist besonders für dünnwandige Röhren verwendbar.

Für *dickwandige Röhren* und *Kapillaren* eignet sich besser die optische Bestimmung des Innenradius r, die aus der Abb. 52 verständlich wird. Das Rohr wird durch eine gestreckte, monochromatische Lichtquelle (schmale Flamme, Entladungsrohr mit Filter) von hinten beleuchtet. Blickt man von vorn auf das Röhrchen, so beobachtet man durch die Totalreflexion am Innenzylinder zwei feine Linien, deren Abstand $2a$ mit einem Kathetometer oder einem verschiebbaren Mikroskop gemessen wird. Der äußere Rohrdurchmesser $2R$ wird ebenfalls optisch bestimmt. Wie leicht anzugeben ist, folgt für den Innenradius, wenn n der Brechungsindex der Glassorte bei der verwendeten Wellenlänge ist,

$$r = a - \sqrt{(n^2 - 1)(R^2 - a^2)}. \tag{5/4}$$

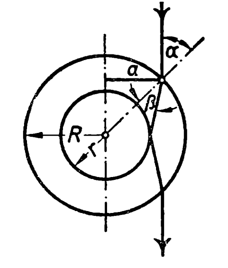


Abb. 52 Optische Ausmessung von Kapillaren

Für Jenaer Glas 16^{III} ist $n_{\mathrm{Na}} = 1{,}5268$. Da im allgemeinen Glasröhren selten kreiszylindrisch sind, mißt man r in mehreren Lagen und mittelt.

Am genauesten läßt sich der Querschnitt von Kapillaren durch *Auswägen* mit Quecksilber bestimmen. Das spez. Volumen von Quecksilber beträgt bei der Temperatur t bekanntlich $0{,}07355\,(1 + 0{,}000182\,t)$, wenn man die Masse durch Messinggewichte bestimmt. Kennt man die Länge des Quecksilberfadens und dessen Masse, so berechnet sich hieraus der lichte Querschnitt zu: $q = v/l$. Mißt man die Länge l zwischen den Kuppen der Hg-Säule, so wird v zu klein ausfallen. Unter der für enge

Röhren geltenden Annahme, daß die Endflächen Kugelkappen sind, deren Höhe h ist, berechnet sich der Querschnitt q mit genügender Genauigkeit zu

$$q = \frac{v - \frac{1}{3}\pi h^3}{l - h}. \tag{5/5}$$

Das Kalibrieren, d. h. das Ausmessen der an verschiedenen Stellen der Kapillaren vorhandenen Querschnitte, erfolgt durch Verschieben eines kurzen Quecksilberfadens längs des Rohres. In den verschiedenen Lagen mißt man dessen Länge mit Hilfe eines Mikroskopes oder einer untergelegten, auf Spiegelglas geätzten Teilung. Zweckmäßig unterteilt man die gesamte auszumessende Länge l in n Intervalle und macht den Faden l/n cm lang. Durch leichtes Neigen des Rohres verschiebt man den Faden jeweils um eine Teilung l/n, mißt die Fadenlänge und mittelt die Einzelmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

5,24 *Volumenometer*

Häufig ist es nicht möglich, das unbekannte Volumen durch Auswägen mit einer Flüssigkeit bekannter Dichte zu bestimmen (schädliche Räume von Pumpen, Gasthermometer, große Gefäße). In solchen Fällen bedient man sich des *Volumenometers* (Volumeter), das sich auf die Gültigkeit des MARIOTTEschen Gesetzes stützt, an Genauigkeit der in § 5,21 besprochenen Methode jedoch erheblich nachsteht. Geht man von einer abgeschlossenen Gasmasse vom Volumen V aus, deren Druck p beträgt, so ändert sich dieser bei einer Volumenvergrößerung innerhalb weiter Gültigkeitsgrenzen in der Weise, daß das Produkt $p \cdot V$ konstant bleibt, dieselbe Temperatur vorausgesetzt. In Abb. 53 ist die Meßanordnung schematisch dargestellt. Das auszumessende unbekannte Volumen V_x ist an das bekannte, durch Auswägen bestimmte Volumen V über den Hahn H angeschlossen. Der Gasdruck in V wird mit der Pumpe P eingestellt und durch das Manometer M gemessen. Zunächst wird die ganze Anordnung bei geöffnetem Hahn evakuiert, dann bei geschlossenem Hahn in das Gefäß V Luft eingelassen und der Druck p beobachtet. Wird nun H geöffnet, so gleicht sich der Druck in V und V_x aus, und es wird sich der niedrigere Druck p' einstellen. Es gilt dann: $pV = p'(V + V_x)$, woraus für das unbekannte Volumen folgt:

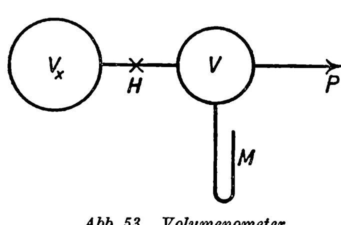


Abb. 53 Volumenometer

$$V_x = \frac{V(p - p')}{p}. \tag{5/6}$$

Die Meßgenauigkeit der Anordnung hängt vor allem von der erreichbaren Temperaturkonstanz während des Versuches ab. Um Störungen durch die Kompressionswärme bei der Volumenänderung zu verringern, arbeitet man mit sehr geringen Gasdrucken, was allerdings eine sehr genaue Messung kleiner Gasdrucke (siehe § 7,2) erforderlich macht.

Ein von Lord RAYLEIGH angegebenes Verfahren, das schädliche Räume zu ermitteln gestattet, ist von der Gültigkeit des MARIOTTEschen Gesetzes unabhängig.

5,3 Volumen fester Körper

Ist das Volumen eines festen Körpers unregelmäßig begrenzt oder bildet dieser keinen einfach zusammenhängenden Raum (poröse Stoffe), so daß eine direkte geometrische Ausmessung und Berechnung unmöglich ist, kommen für die Inhaltsbestimmung folgende Verfahren in Frage:

5,31 *Verdrängungsmethode*

Das Volumen eines festen Körpers läßt sich ermitteln, wenn man diesen in ein mit Flüssigkeit gefülltes geeichtes Meßgefäß ganz untertaucht und den scheinbaren Volumenzuwachs der Flüssigkeit an der Meßteilung abliest. Dieses Verfahren eignet sich auch für die Bestimmung des Volumens sehr kleiner Körper, wie Kristalle. Diese bringt man in ein Gefäß mit eingeschliffenem Stopfen, der in eine kalibrierte Kapillare ausläuft. Der Höhenunterschied an der Kapillare vor und nach dem Einbringen des auszumessenden Körpers multipliziert mit dem Kapillarenquerschnitt ergibt das gesuchte Volumen.

Körper, die nicht mit Flüssigkeit in Berührung gebracht werden können oder poröse Stoffe lassen sich mit dem Volumenometer (§ 5,24) mit mäßiger Genauigkeit ausmessen. Man bestimmt, wie angegeben, zunächst durch zwei Druckmessungen das Hilfsvolumen V', bringt den Körper mit dem gesuchten Volumen V_x hinein und wiederholt die Messung, woraus sich $V - V'$ ergibt. Die Differenz der beiden Messungen liefert das gesuchte Volumen V_x.

5,32 *Hydrostatische Wägung*

Nach dem Prinzip des Archimedes erleidet ein Körper gegenüber seinem Gewicht im Vakuum in einem beliebigen Medium einen scheinbaren Massenverlust, welcher der Masse des von diesem verdrängten Mediums gleich ist. Um hieraus das unbekannte Volumen V_x zu erhalten, wird der Körper zunächst in Luft von der Dichte ϱ_l gewogen, wozu ein Gewicht von der Masse M und dem Volumen V_m erforderlich ist. Es gilt also für die Masse M_x des Körpers

$$(M_x - V_x \varrho_l) = (M - V_m \varrho_l)\,.$$

Nun wird der Körper ein zweites Mal gewogen, wobei er ganz in eine Flüssigkeit von der Dichte ϱ_f getaucht wird. Das Gewicht M soll sich hierbei um das Gewicht m, das das Volumen $V_{m'}$ einnehme, verringern. Die zweite Gleichgewichtsbedingung lautet also

$$(M_x - V_x \varrho_f) = (M - V_m \varrho_l) - (m - V_{m'} \varrho_l)\,.$$

Durch Subtraktion erhält man das gesuchte Volumen zu

$$V_x = \frac{m - V_{m'} \varrho_l}{\varrho_f - \varrho_l}\,. \qquad (5/7)$$

Der zu untersuchende Körper wird in einen Drahtkorb gelegt, der an einem dünnen Draht an der Waagschale hängt. Man wägt abwechselnd den leeren und den belasteten Korb, um Temperaturschwankungen auszugleichen. Da die Vertauschungsmethode zu umständlich ist, wägt man nach der BORDAschen Tariermethode (§ 4,33). Die Schwingungen der Waage sind so stark gedämpft, daß man bequem die Ruhelage beobachten kann. Den um den dünnen Aufhängedraht sich bildenden Kapillarwulst,

der eine unsichere Einstellung zur Folge hat, vermeidet man nach F. KOHLRAUSCH dadurch, daß man einen Platindraht benutzt, der mit Platinmoor überzogen und schwach geglüht ist.

Bei den Messungen ist darauf zu achten, daß die Temperatur des Wassers sehr genau konstant gehalten wird. Durch die Aufnahme von Luft bis zur Sättigung vermindert sich die Dichte des Wassers nur um $3 \cdot 10^{-6}$.

5,4 Volumen von Flüssigkeiten und Gasen

Der Rauminhalt einer bestimmten Flüssigkeits- und Gasmasse läßt sich nach den gleichen Verfahren, die bei der Volumenmessung von festen Körpern angewendet werden, bestimmen. Die genaue Volumenmessung von Gasen wird erschwert durch die starke Abhängigkeit des Volumens von Druck und Temperatur. Neben diesen statischen Verfahren werden hauptsächlich zur Messung des Volumendurchflusses von Flüssigkeiten und Gasen Anordnungen benutzt, die deren Strömungsenergie zur Messung heranzieht.

5,41 *Verdrängungsmesser* (*314*)

Bei diesen hauptsächlich für die technische Mengenmessung bestimmten Geräten, die durch den strömenden Stoff selbst bewegt werden, fließt die Flüssigkeit bzw. das Gas durch ein Meßgefäß (Meßkammer) bekannten Inhalts, dessen Füllungen gezählt werden.

Der *nasse Gasmesser* besteht aus mehreren Kammern, die auf einer leicht drehbaren Achse befestigt sind und durch eine Flüssigkeitsfüllung abgedichtet werden. Das Gas tritt nacheinander in die einzelnen Kammern ein, bringt einen geringen Überdruck hervor, wodurch sich die zu einer Trommel vereinigten Kammern drehen. Durch diese Drehung werden die Austrittsschlitze der Kammern freigegeben, aus denen das Gas strömen kann. Die durch ein Zählwerk festgestellte Zahl der Umdrehungen ist ein Maß für das durchgeströmte Volumen. Bei Beachtung von Druck und Temperatur kann man mit Experimentiergasmessern eine Genauigkeit von 0,5% bei einem bestimmten mittleren Durchfluß erreichen.

In ähnlicher Weise arbeiten die Scheiben-, Kapsel- und Kolbenzähler, bei denen ebenfalls durch das strömende Medium Teile des Gerätes bewegt und ein bestimmtes Volumen mit einem Zählwerk gezählt wird.

5,42 *Flügelradzähler*

Diese vor allem für Flüssigkeiten bestimmten Meßgeräte bestehen aus einer in der Strömungsrichtung angeordneten, leicht drehbaren Achse, auf der eine Anzahl von kleinen Flügeln angebracht sind, die gegen die Achse um den Winkel α geneigt sind (WOLTMANN-Flügel). Beträgt der mittlere Abstand der Flügel von der Achse r, so berechnet sich für eine Strömungsgeschwindigkeit w die Anzahl n der Umdrehungen pro Sekunde aus

$$\frac{w}{\operatorname{cotg} \alpha} = n \cdot 2\pi r. \qquad (5/8)$$

Wegen der an der Achsenlagerung zu überwindenden Reibung und der hydrodynamischen Störungen muß man eine Korrektur entsprechend der Beziehung

$$w = n' \cdot 2\pi r \operatorname{cotg} \alpha - A \qquad (5/8\,a)$$

anbringen. Das Berichtigungsglied A ist bei Vollast zu vernachlässigen und macht sich erst bei kleineren Geschwindigkeiten bemerkbar. Durch eine auf der Achse befindliche Schnecke wird ein Zahnrad mit elektrischem Kontaktgeber angetrieben, wodurch die Zahl der Umdrehungen sehr genau festzustellen ist. Für die Messung in Flüssigkeiten wählt man α sehr klein und sind nur wenige (2 bis 4), strömungstechnisch günstig geformte Flügel vorhanden. Für Gasmessungen, etwa zur Bestimmung der Windgeschwindigkeit, sind sechs bis acht fast ebene Flügel vorhanden, die in einem kurzen zylindrischen Rohr laufen (*Anemometer*).

5,43 *Dynamische Volumenmessung*

Die dynamische Messung des durch eine Leitung strömenden Gas- oder Flüssigkeitsvolumens beruht auf der Anwendung des Theorems von BERNOULLI (§ 8,42) und geht damit zurück auf die Feststellung von statischen und dynamischen Drucken in Gasen und Flüssigkeiten. Da das in der Zeiteinheit durch eine Leitung strömende Gasvolumen $V = \int_F w\, df$ ist, wenn w die im Querschnittselement df festgestellte Geschwindigkeit und F der Strömungsquerschnitt ist, läßt sich die Volumenmessung auf die in § 8,4 eingehend besprochene Geschwindigkeitsmessung in Gasen und Flüssigkeiten zurückführen.

§ 6 DICHTE

6,1 **Definitionen**

Als *Dichte*, die gewöhnlich mit ϱ bezeichnet wird, kennzeichnet man das Verhältnis Masse zu Volumen eines Körpers, also $\varrho = m/V$ (g/cm³). Sie läßt sich daher aus einer Volumenmessung (§ 5) und einer Wägung (§ 4) ermitteln, wobei jedoch bei sehr genauen Messungen berücksichtigt werden muß, daß entsprechend § 5,1 das Volumen um $2{,}7 \cdot 10^{-5}$ korrigiert werden muß. Dementsprechend ist als *Dichteeinheit* die Masse von 1 cm³ Wasser bei 4° C und 760 Torr $\varrho_0 = 0{,}999972$ (g/cm³) bei sehr genauen Messungen einzusetzen.

Als *spezifisches Gewicht* s eines Körpers bezeichnet man dessen Dichte ϱ auf die Dichte von Wasser bezogen. Das spezifische Gewicht ist also ohne Dimension.

Mit *Wichte* γ wird das Verhältnis von Gewicht G eines Körpers zu seinem Volumen V bezeichnet, das mit der Dichte wie folgt zusammenhängt: $\gamma = g \cdot \varrho$. Die Wichte ist also ebenso wie das Gewicht von der Erdbeschleunigung g abhängig, wofür der Normalwert $g_n = 980{,}665$ cm/s² einzusetzen ist.

6,2 **Dichte fester Körper**

Die Dichte fester Körper läßt sich mit Hilfe der nachstehend aufgeführten Methoden auf etwa 10^{-4} genau bestimmen, wenn die Ergebnisse der Wägungen auf den leeren Raum umgerechnet werden.

6,21 *Wägung und Volumenbestimmung*

Entsprechend der Beziehung $\varrho = m/V$ kann die Dichte durch Bestimmung der Masse und des Volumens ermittelt werden. Für die Wägung gelten die in § 4 aufge-

stellten Meßvorschriften; die Bestimmung des Volumens ist im § 5,3 beschrieben. Für gröbere Messungen wird der Körper in ein mit Flüssigkeit gefülltes, kalibriertes Meßgefäß getaucht und der scheinbare Volumenzuwachs der Flüssigkeit festgestellt. An Stelle des häufig verwendeten Wassers, das schlecht benetzt, verwendet man besser Alkohol, Benzol oder Petroleum, die auch schneller abdunsten. Poröse Körper und solche, die nicht mit einer Flüssigkeit in Berührung kommen dürfen, untersucht man mit dem Volumenometer (§ 5,24).

6,22 *Pyknometer*

Das Pyknometer (Abb. 54) ist in seiner gebräuchlichsten Form ein kleines Glasfläschchen von einigen cm³ Inhalt, das mit einem geschliffenen Glasstopfen verschlossen wird, der mit einer Kapillare versehen ist. Es wird bis zum Überfließen mit Wasser oder einer anderen Flüssigkeit bekannter Dichte (Quecksilber) gefüllt. Zur Ermittlung der Dichte kleiner fester Körper wird das gefüllte Pyknometer zunächst gewogen (Masse M), dann der Körper eingebracht, die übertretende Flüssigkeit sorgfältig entfernt und nochmals gewogen (Masse M'). Wiegt der auszumessende Körper in Luft m g, so berechnet sich das gesuchte spez. Gewicht zu:

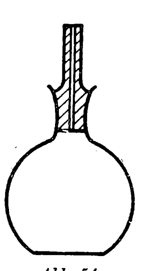


Abb. 54 Pyknometer

$$s = \frac{m}{M - M' + m}. \tag{6/1}$$

Um die große Genauigkeit der Methode ausnutzen zu können, ist zu beachten, daß durch die Wärmeausdehnung von Gefäß und Flüssigkeit Fehler entstehen können. Ferner kann das Meßergebnis durch die an dem Körper haftenden Luftbläschen verfälscht werden.

6,23 *Auftriebsmethode*

Entsprechend der in § 5,32 besprochenen Volumenbestimmung fester Körper, wird dieser zunächst in Luft gewogen, woraus sich die Masse m ergibt. Dann wird die Versuchsprobe an einem dünnen Faden oder Draht an einer Waagschale aufgehängt und unter Wasser gewogen (m'). Das Drahtgewicht m_d muß bei genauen Messungen von m' abgezogen werden, der Auftrieb des Drahtes läßt sich aus Drahtdicke und Eintauchtiefe berechnen. Das gesuchte spez. Gewicht ergibt sich dann zu:

$$s = \frac{m}{m - m' - m_d}. \tag{6/2}$$

Wasserlösliche Substanzen werden in geeignete Flüssigkeiten bekannter Dichte $\varrho_{\mathfrak{f}}$ getaucht, womit dann das Ergebnis nach Gleichung (6/2) zu multiplizieren ist.

Der Fehler, der sich durch die Benetzung des Aufhängedrahtes einstellt, läßt sich dadurch vermindern, daß man den Draht an der Durchtrittsstelle möglichst dünn macht und Platindraht verwendet, der mit Platinschwarz überzogen ist.

6,24 *Schwebemethode*

Liegt die zu untersuchende Substanz nur in Form von kleinen Kriställchen oder Pulver vor, so kann deren Dichte sehr genau bestimmt werden, wenn man sie in einer Flüssig-

keit bekannter Dichte schweben läßt. Das läßt sich erreichen durch (vollkommene) Mischung zweier Flüssigkeiten bekannter Dichte, von denen die eine leichter, die andere von größerer Dichte als der zu untersuchende Stoff ist. Die hierfür geeigneten Flüssigkeiten sind in der Tabelle V zusammengestellt.

Azetylentetrabromid	ϱ = 3,00	Chloroform	1,49
Bromoform	2,892	Benzol	ϱ = 0,881
Bromnaphthalin	1,483	Toluol	0,89
Methylenjodid	2,27	Xylol	0,870
Kalium- oder Bariumquecksilber-Jodid (THOULETsche Lösung) bis	3,2	Wäßrige Kochsalz- oder Natronsalpeterlösungen bis 1,148 bzw.	1,420

Tabelle V

Die Dichte der passend gewählten Flüssigkeitsmischung mißt man nach der in § 6,3 besprochenen Methode. Man kann die Schwebemethode noch dadurch verfeinern (*5*), daß man nach der groben Schwebeeinstellung die Temperatur der Flüssigkeit so lange verändert, bis vollkommenes Gleichgewicht herrscht.

6,25 *Messung der Dichte sehr kleiner Teilchen*

Bei röntgenographischen Messungen ist es oft erforderlich, sehr kleine Substanzmengen genau zu bestimmen. Dazu verwendet man die *Mikropyknometer* (*342*), einseitig abgeschmolzene Glasröhrchen von nur 0,07 cm³ Inhalt, die gewöhnlich mit Bromoform gefüllt sind. Außerdem eignet sich hierzu das *Spitzenpyknometer* (*171*), bei dem man in ähnlicher Weise wie bei der genauen Ablesung von Manometern (siehe § 8,5) eine feine Spitze, durch eine Einstellschraube meßbar, mit der Flüssigkeitsoberfläche in Berührung bringt.

Die Schwebemethode ist für Körner von 0,1 bis 0,2 mm Größe mit einer Genauigkeit von 10^{-4} anwendbar, wenn man die Temperatur auf 0,02° C konstant hält.

Kriställchen von 0,05 mg lassen sich noch sehr genau bestimmen, wenn man die Schwebemethode in einer Zentrifuge (*27*) durchführt. Zu diesem Zweck wird das Kriställchen mit der Flüssigkeit gleicher Dichte in ein kleines Probeglas gebracht, nachdem vorher Luftbläschen durch Evakuieren im Exsikkator entfernt worden sind, und ein bis zwei Minuten bei 2000 bis 4000 *U*/min zentrifugiert. Je nachdem, ob die Kristalle sinken oder steigen, setzt man schwere oder leichte Flüssigkeit hinzu, bis vollkommenes Gleichgewicht herrscht. Die erreichbare Genauigkeit der Dichtebestimmung beträgt einige Promille.

6,26 *Dichtemessung bei hohen Temperaturen*

DAY und SOSMAN (*65*) haben nach dem Prinzip der NICHOLSONschen Senkwaage die Dichte von Silikaten bei hohen Temperaturen gemessen. Als Flüssigkeit, in welcher der Auftrieb am Probekörper gemessen wurde, diente geschmolzenes Zinn. Die Senkwaage bestand fast ganz aus Kohle und befand sich in einem elektrischen Ofen. Die zu untersuchende Probe hing an einem dünnen Platindraht.

6,3 Dichte von Flüssigkeiten

6,31 *Wägemethode*

Die Dichte von Flüssigkeiten läßt sich sehr genau mit Hilfe von Meßflaschen und Pyknometer bestimmen, die bis zu einer bestimmten Marke oder bis zum Überfließen mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt werden und deren Gewicht leer und gefüllt bestimmt wird. Für mäßige Genauigkeit lassen sich Pipetten und Büretten verwenden, die man vor der Messung einige Male mit der Flüssigkeit durchspült.

Am häufigsten werden jedoch Pyknometer (*36*) verwendet, bei deren Gebrauch auf die Abhängigkeit des Gefäßvolumens von der Temperatur zu achten ist. Zu diesem Zweck bringt man das Pyknometer in ein Wasserbad konstanter Temperatur oder mißt diese an einem mit dem eingeschliffenen Stopfen vereinigten Quecksilberthermometer.

6,32 *Auftriebsmethode*

Wägt man einen Körper bekannten Volumens V zuerst in Luft (Masse m_l) und dann in der zu untersuchenden Flüssigkeit (Masse m_f), so ist der Massenunterschied gleich der Masse der verdrängten Flüssigkeit $\varrho_f \cdot V$. Daraus berechnet sich die gesuchte Dichte zu:

$$\varrho_f = \frac{m_l - m_f}{V}. \tag{6/3}$$

Ist das Volumen des Verdrängungskörpers nicht aus den geometrischen Abmessungen zu bestimmen, so wird eine dritte Wägung in Wasser von 4° C durchgeführt (Masse m_w), woraus sich die gesuchte Dichte zu

$$\varrho_f = \frac{m_l - m_f}{m_l - m_w} \tag{6/4}$$

berechnet. In Abb. 55 ist die Versuchsanordnung wiedergegeben. An der gleicharmigen Waage B hängt der Senkkörper S aus Glas (mit Thermometer), der vollständig in der zu untersuchenden Flüssigkeit im Gefäß G untertaucht. Ist die Waage bei der Wägung in Luft austariert, so ist die gesuchte Dichte unmittelbar aus dem Quotienten m_f/m_w zu errechnen. Es ist darauf zu achten, daß am Senkkörper keine Luftbläschen hängenbleiben. Die unregelmäßige Benetzung des Aufhängefadens, die die Hauptfehlerquelle darstellt, läßt sich vermindern, wenn man einen ausgeglühten Platindraht verwendet.

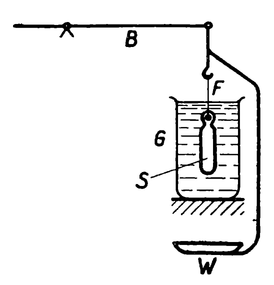


Abb. 55 Auftriebsmethode

Für die Dichtemessung bei *hohen* Temperaturen, wie z. B. von Schmelzen, benutzt man Senkkörper aus Quarzglas, das mit Wolframpulver beschwert wird, Platin oder Graphit. Das Gefäß mit der zu untersuchenden Substanz wird in einen senkrecht stehenden elektrischen Ofen gestellt, der mit durchbohrten Glimmerscheiben abgedeckt ist. Als Aufhängefäden dienen Platin- oder Quarzfäden. Zur bequemeren Durchführung dieser Meßmethode teilt man die Strecke zwischen Drehpunkt und Schneide des Waagbalkens in zehn gleiche Teile. Auf den als Reiterlineal ausgebildeten Waagbalken lassen sich Reiter aufsetzen, deren Massen sich wie 1 : 10 : 100 : 1000

verhalten. Am Ende des geteilten Waagbalkens wird ein Glaskörper (Senkkörper) angehängt, dessen Gewicht durch eine feste Masse am anderen Balkenende austariert ist. Das Gewicht des größten Reiters entspricht dem Auftrieb des Senkkörpers in Wasser von 4° C. Zur Bestimmung der Dichte einer Flüssigkeit wird der Senkkörper ganz in diese eingetaucht und durch Aufbringen der Reitergewichte wieder das Gleichgewicht hergestellt. Durch die Dezimalunterteilung der Gewichte und des Waagbalkens ist die Ablesung sehr einfach. Die Genauigkeit dieser MOHRschen Waage (*33*) beträgt etwa 10^{-4}.

6,33 *Aräometer* (*36, 169, 258*)

Die Benutzung einer Waage kann man umgehen, wenn man den Senkkörper selbst als Auftriebswaage benutzt. Zu diesem Zweck versieht man diesen mit einem tiefliegenden Ballast aus Bleischrot, damit er aufrecht in der Flüssigkeit schwimmt, und einer leichten über der Flüssigkeitsoberfläche befindlichen Waagschale. Auf diese wird nun so viel Gewicht aufgebracht, bis der Schwimmer auf eine unter der Waagschale angebrachte Marke einspielt. Beträgt die Masse des Senkkörpers M (g) und sind in Wasser m_w, in der Flüssigkeit m_f (g) aufzulegen, so berechnet sich das gesuchte spez. Gewicht der Flüssigkeit zu:

$$s_f = \frac{M + m_f}{M + m_w}. \qquad (6/5)$$

Für weniger genaue Messungen wird das in Abb. 56 dargestellte Skalenaräometer verwendet, dessen Senkkörper oben ein dünnwandiges, genau zylindrisches Glasrohr trägt, das mit einer Teilung versehen ist. Ist die Gesamtmasse M, das Volumen des Senkkörpers ohne „Spindel“ V, deren Querschnitt q, so taucht die Spindel in der Flüssigkeit von der Dichte ϱ bis zur Marke an der Stelle x ein, entsprechend der Beziehung

$$\varrho = \frac{M}{V + q\,x}. \qquad (6/6)$$

Sind die Eintauchtiefen x für zwei Eichpunkte bestimmt, läßt sich der Skalenverlauf nach Gleichung (6/6) konstruieren. Die gesuchte Flüssigkeitsdichte wird bei der Messung unmittelbar in Höhe der Flüssigkeitsoberfläche auf der Skala abgelesen. Die erzielbare Genauigkeit beträgt etwa 10^{-4}, jedoch ohne Berücksichtigung des Ablesefehlers an der Flüssigkeitsoberfläche und des Gewichtes des sich an der Spindel bildenden Kapillarwulstes, das sich zur Aräometermasse addiert und nicht konstant ist.

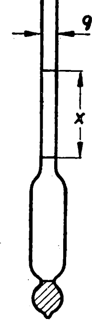


Abb. 56 Skalenaräometer

Verbreitet sind noch Aräometer, deren Skalen in willkürliche BAUMÉ-Grade geteilt sind. Die Umrechnung der BAUMÉ-Grade (B) in Flüssigkeitsdichten erfolgt aus der Beziehung

$$\varrho = \frac{144{,}3}{144{,}3 \mp B} \text{ für } \varrho \gtrless 1.$$

6,34 *Kommunizierende Röhren*

Füllt man zwei sich nicht mischende Flüssigkeiten in ein U-Rohr, so verhalten sich die Flüssigkeitshöhen umgekehrt wie die Dichten. Der Kapillarfehler läßt sich be-

deutend verringern, wenn die leichtere Flüssigkeit in beide Schenkel in verschiedener Höhe eingegossen wird, wie in Abb. 57 angedeutet ist. Mit den in der Abbildung angegebenen Bezeichnungen errechnet sich die gesuchte Flüssigkeitsdichte zu

$$\varrho_2 = \frac{\varrho_1 h_1}{h_3 - h_2}. \tag{6/7}$$

Sind beide Flüssigkeiten mischbar, wird die Anordnung nach Abb. 58 verwendet, bei der die beiden Flüssigkeitssäulen durch einen geringen Unterdruck in zwei Schenkel des umgekehrten U-Rohres hochgesaugt werden (Kapillarfehler!). Nach Thiessen, Scheel und Diesselhorst, die die Temperaturabhängigkeit der Dichte von reinem

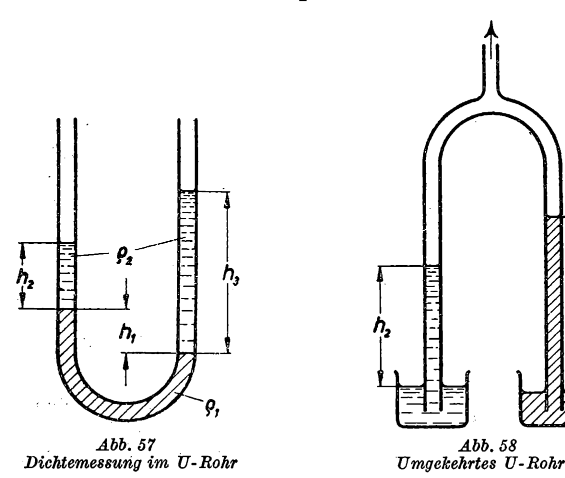


Abb. 57
Dichtemessung im U-Rohr

Abb. 58
Umgekehrtes U-Rohr

Wasser gemessen haben, läßt sich die Genauigkeit dieser Methode bedeutend vergrößern, wenn man in diesem Fall die Flüssigkeitssäulen gleich lang macht und den sich durch den Dichteunterschied einstellenden Differenzdruck als Maß für die Dichteänderung benutzt (Verwendung eines Differentialmanometers). Die 3 m hohen Wassersäulen befanden sich in einem Wasserbad, dessen Temperatur sehr genau bestimmt wurde.

6,4 Dichte von Gasen und Dämpfen

6,41 *Allgemeines*

Nach dem Gesetz von Boyle und Mariotte ist das Produkt aus Druck und Volumen einer abgeschlossenen Gasmasse bei unveränderter Temperatur konstant. Da sich die Dichten wie die Drucke und diese umgekehrt wie die Volumina verhalten, gilt

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}. \tag{6/8}$$

Erwärmt man nun bei konstantem Druck eine Gasmenge, so dehnt sich das ursprüngliche Volumen V_0 nach dem Gesetz von Gay-Lussac bei einer Temperaturerhöhung um 1° C um $\frac{1}{273,15}$ seines Volumens aus. Um denselben Betrag steigt der Druck p_0

bei konstant gehaltenem Volumen bei derselben Temperaturänderung. Durch Einführen der absoluten Temperatur T erhalten wir die Beziehungen

$$V_t = V_0 (1 + \alpha t) = V_0 \left(1 + \frac{t}{273{,}15}\right) = \frac{V_0 T}{T_0}, \tag{6/9}$$

$$p_t = p_0 (1 + \beta t) = p_0 \left(1 + \frac{t}{273{,}15}\right) = \frac{p_0 T}{T_0}. \tag{6/10}$$

In gleicher Weise erhält man für eine bestimmte Gasmasse die allgemeine Beziehung

$$p_t V_t = p_0 V_0 \cdot \frac{T}{T_0}. \tag{6/11}$$

Nach dem AVOGADROschen Gesetz, wonach verschiedene Gase in der Volumeneinheit beim gleichen Druck und bei derselben Temperatur gleich viel Moleküle enthalten, kann man den Ausdruck $p_0 V_0/T_0$ durch die Gaskonstante R_0 ersetzen, wenn man von einem Grammolekül (Mol) des Gases ausgeht. Für ein Grammolekül gilt also

$$p V = R_0 T \; (R_0 = 0{,}8314 \cdot 10^8 \text{ erg/grad}),$$

wenn man die Indizes fortläßt. Geht man von der Gasmasse m aus, so ist die rechte Seite der letzten Gleichung mit der Zahl der Mole $z = m/M$ zu multiplizieren, wobei M das Molekulargewicht des Gases ist. Es ergibt sich also

$$p V = z R_0 T = \frac{m}{M} R_0 T, \tag{6/11a}$$

woraus mit $\varrho = m/V$ eine Beziehung zwischen der Gasdichte und dem Molekulargewicht entsteht:

$$M = \varrho R_0 T/p. \tag{6/12}$$

6,42 *Wägemethode*

Für genaue Messungen der Gasdichte füllt man einen bis zu einem Liter fassenden evakuierten Glasbehälter, der mit einem Hahn verschlossen werden kann, mit dem zu untersuchenden Gas. Das Volumen des Ballons wird in bekannter Weise durch Auswägen mit Wasser ermittelt. Der leere und der mit Gas gefüllte Ballon werden nun gewogen, wobei man auf die andere Waagschale einen etwa gleich großen und gleich schweren legt, um die vom Luftauftrieb herrührende Korrektur möglichst klein zu halten. Die Gewichtsdifferenz des leeren und des gefüllten Behälters, auf das Volumen V bezogen, liefert die Gasdichte ϱ. Auf diese Weise hat man sehr genaue Messungen an chemisch reinen Gasen vorgenommen (*16*, *144*). Bei der Füllung des Kolbens, die gewöhnlich in einem Wasser- oder Eisbad vorgenommen wird, ist der Fülldruck zu berücksichtigen.

Relativ schnell und sehr genau sind Gasdichten mit Hilfe der *Gaswaage* zu bestimmen. Diese besteht (Abb. 59) aus einem sehr leichten Waagebalken B aus Glas oder Quarz, der in der Mitte spitzengelagert ist. An dem einen Balkenende ist der meist aus Glas bestehende Hohlkörper H befestigt, dem am anderen Balkenende

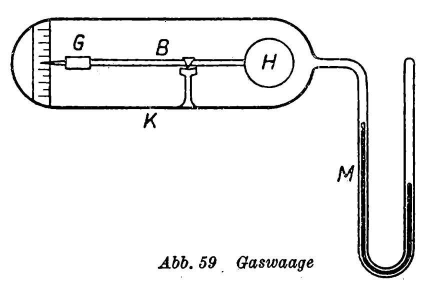


Abb. 59 Gaswaage

das massive Gegengewicht G das Gleichgewicht hält. Die Waage befindet sich in der Kammer K, in die das zu untersuchende Gas geleitet wird, wobei der dort herrschende Gasdruck durch das angeschlossene Quecksilber-Manometer M gemessen wird. Ist die Differenz der Volumina $H - G = V$ und die Waage im Vakuum im Gleichgewicht, so erfährt H in der Gasatmosphäre von der Dichte ϱ einen Auftrieb $\varrho\, V$, den man entweder durch Auflegen von Gegengewichten oder elektromagnetisch (siehe § 4,24—25) kompensieren kann. STOCK und RITTER (*337*) konnten durch ein magnetisches Kompensationsverfahren Gasdichten auf 10^{-4} genau bestimmen.

In der Technik wird für weniger genaue Messungen die LUXsche Gaswaage verwendet, bei der das zu untersuchende Gas dem Hohlkörper durch eine hohle Achse zugeführt und dessen Auftrieb in Luft bekannter Dichte gemessen wird (*346*).

6,43 *Ausströmmethode*

Bezeichnet man die auf das Mol eines Gases bezogene Gaskonstante mit R_0 und das Molekulargewicht mit M, so ist bekanntlich die mittlere Gasgeschwindigkeit $\bar{u}$ bei der Temperatur T

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3\, R_0\, T}{M}}\,. \tag{6/13}$$

Läßt man nun durch eine kleine Öffnung von der Fläche F Gas ausströmen, so liefert die strenge Durchrechnung unter Benutzung von (6/13) für die ausströmende Gasmasse m die Beziehung

$$m = 0{,}4\, F\, t\, p \sqrt{\frac{M}{R_0\, T}}\,, \tag{6/14}$$

wenn t die Zeit und p der Gasdruck sind. Setzt man die Gleichung (6/11a) ein, so bekommt man für das in der Zeit t hindurchströmende Volumen

$$V = 0{,}4\, F\, t \sqrt{\frac{R_0\, T}{M}}\,. \tag{6/15}$$

Diese Beziehung besagt also, daß sich die Durchströmzeiten gleicher Volumina verschiedener Gase wie die Wurzeln ihrer Molekulargewichte verhalten. Da sich nach Gleichung (6/12) die Dichten wie die Molekulargewichte verhalten, bekommt man die einfache Beziehung

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}}\,. \tag{6/16}$$

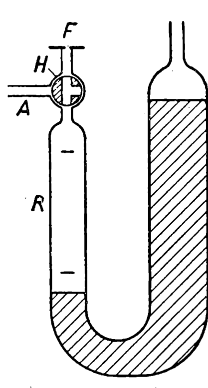


Abb. 60 Effusiometer

Das von BUNSEN und SCHILLING entwickelte Gasdichtemeßgerät (*Effusiometer*), das sich die Beziehung (6/16) zunutze macht, ist in Abb. 60 dargestellt. Ein U-förmiges Glasrohr mit verschieden weiten Schenkeln ist zum Teil mit Quecksilber gefüllt. Der engere Schenkel R ist mit zwei Strichmarken versehen. Über den Rohranschluß A wird der enge Schenkel mit dem zu untersuchenden Gas gefüllt, bis beide Marken freiliegen. Durch Umlegen des Dreiwegehahns H läßt man nun das unter dem Druck der rechten Quecksilbersäule stehende Gas durch die feine, in ein dünnes Blech gebohrte Öffnung F ausströmen. Die zwischen den Durchgängen der Marken verstreichende Zeit wird mit einer Stoppuhr

genau gemessen. Durch Vergleich der Ausströmzeit eines Gases bekannten Molekulargewichtes mit der gemessenen Zeit kann nach Gleichung (6/16) das Molekulargewicht und damit die gesuchte Dichte ermittelt werden. Die Genauigkeit der mit dem Effusiometer bestimmten Dichten ist nicht sehr groß und beträgt gewöhnlich einige Prozent. Von GMELIN (*131*) wird ein sehr genaues Instrument beschrieben, bei dem das Gas durch eine 0,3 mm weite Öffnung in einem 0,15 mm dicken Platinblech ausströmt und dünnflüssiges Öl als Füllung verwendet wird. Eine kritische Betrachtung der Meßmethode stellt KRETSCHMER (*212*) an.

6,44 *Messung der Dampfdichte nach DUMAS*

Ein leichter Glaskolben von 100 bis 500 cm³ Inhalt wird in eine feine Spitze ausgezogen, gewogen (Masse m_l) und mit einigen cm³ der Flüssigkeit gefüllt, deren Dampfdichte bestimmt werden soll, indem man den Kolben erwärmt und beim Abkühlen die Flüssigkeit durch die Spitze einsaugen läßt. Nun erhitzt man den Kolben in einem Flüssigkeitsbad, dessen Temperatur etwa 20° über dem Siedepunkt der Flüssigkeit im Kolben liegt, so lange, bis diese vollständig verdampft und der Kolben mit Dampf gefüllt ist. Daraufhin wird die Spitze zugeschmolzen, Badtemperatur t und Barometerstand b werden vermerkt und der Kolben wird nach dem Abkühlen gewogen (Masse m_d). Um das Volumen des Kolbens festzustellen, wird dessen Spitze unter Wasser abgebrochen, wodurch er sich mit Wasser füllt. Das Gewicht des mit Wasser gefüllten Kolbens sei m_w. Ist ϱ_W die Dichte des Wassers bei der Temperatur der dritten Wägung, so ist das Volumen des Kolbens $V = (m_w - m_l)/\varrho_W$ und die Masse des den Kolben füllenden Luftvolumens $m' = V \cdot \varrho_l$ bei der betreffenden Temperatur. Der luftleere Kolben wiegt also $m_l - m' = m''$. Die Dichte des Dampfes wird damit $\varrho_d = (m_d - m'')/V$. Unter Berücksichtigung der von t verschiedenen Temperatur t' bei der Bestimmung von m_d und des dabei herrschenden Barometerstandes b' erhält man für genauere Messungen die auf Luft bezogene Dampfdichte D ($D_{\text{Luft}} = 1$) aus

$$D = \frac{b'}{b}\left[\frac{m_d - m_l}{m_w - m_l}\cdot\frac{1}{\varrho_l} + 1\right]\frac{1+\alpha\, t}{1+\alpha\, t'}, \qquad (6/17)$$

worin ϱ_l die auf t und b' bezogene Luftdichte und α der mittlere Ausdehnungskoeffizient des Gases ist. Für sehr genaue Messungen ist der Volumenausdehnungskoeffizient des Glases ($3\,\beta = 0{,}000025$) zu berücksichtigen.

Die DUMASsche Methode ist auch für hohe Temperaturen (bis 1100° C) anwendbar, wobei Kolben aus glasiertem Porzellan verwendet werden, die man mit dem Knallgasgebläse zuschmilzt. Nach SCHULZE (*317*) läßt sich noch besser der im Kolben befindliche Dampf durch flüssige Luft kondensieren.

6,45 *Methode von GAY-LUSSAC und HOFMANN*

Diese bei Beachtung aller Vorsichtsmaßregeln sehr genaue Methode erfordert nur eine sehr kleine Flüssigkeitsmenge von etwa 0,1 cm³, die in ein dünnwandiges Glaskölbchen eingeschmolzen wird. Als Meßvolumen dient ein etwa 2 cm weites, oben geschlossenes Glasrohr mit Millimeter-Teilung und etwa 90 cm Länge. Dieses wird mit trockenem und luftfreiem Quecksilber gefüllt und in einer ebenfalls mit Quecksilber gefüllten Wanne umgekippt, so daß über dem Quecksilber ein vollkommenes Vakuum entsteht. Nun wird das Glaskölbchen vorsichtig von unten in das Meßgefäß

eingebracht, wobei man dieses zweckmäßig etwas neigt, damit das Kölbchen nicht zertrümmert wird. Das Meßrohr ist mit einer elektrischen Heizung oder einem Heizmantel umgeben, durch den die Dämpfe einer Flüssigkeit mit passendem Siedepunkt geleitet werden können (Wasser, Anilin). Durch den bei erhöhter Temperatur sich einstellenden Dampfdruck im Kölbchen wird dieses gesprengt und die Flüssigkeit zum Verdampfen gebracht. In dem Raum über der Quecksilbersäule herrscht nun der Druck des Dampfes der zu untersuchenden Substanz und der des Quecksilbers bei der Heiztemperatur t.

Sind m die Masse der verdampften Substanzmenge, V das vom Dampf eingenommene Volumen, b der Barometerstand, h die Länge der sich nach dem Verdampfen einstellenden Quecksilbersäule und e der Dampfdruck von Quecksilber bei der Temperatur t, wobei b und h auf 0° C zu reduzieren sind, so berechnet sich die Dampfdichte auf Luft bezogen zu:

$$D = \frac{m}{V} \cdot \frac{760}{b - h - e} \cdot \frac{1 + \alpha t}{\varrho_l}. \tag{6/18}$$

Ein Nachteil der Methode ist, daß sich der Dampfdruck des Quecksilbers, der bei höheren Temperaturen nicht vernachlässigt werden darf, nur sehr langsam einstellt. Dies läßt sich vermeiden, wenn man nach dem Vorschlag von RAMSAY und STEELE das Barometerrohr am oberen Ende seitlich ausbaucht und ein Quecksilberkügelchen hineingibt. Außerdem kann man die Methode sehr verfeinern, wenn man im Barometerrohr in bekannten Abständen Glasspitzen einschmilzt, mit denen sich ein genau bekanntes Gasvolumen einstellen läßt.

Die Abweichungen des Dampfes vom idealen Gaszustand berücksichtigt man, wenn man das Volumen des Dampfes bei mehreren Drucken beobachtet, das Produkt pV über p aufträgt und auf kleinen Druck extrapoliert.

6,46 *Methode nach V. Meyer*

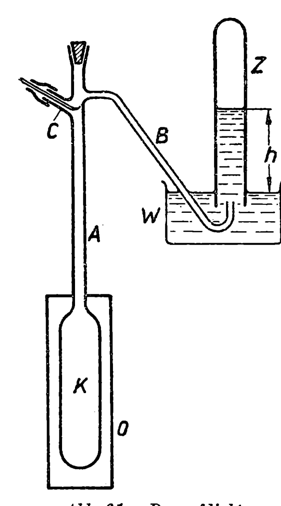


Abb. 61 Dampfdichtebestimmung nach V. MEYER

Sehr viel bequemer als die oben besprochenen Methoden ist das Luftverdrängungsverfahren nach V. MEYER. Die verdampfende Substanz verdrängt eine entsprechende Luftmenge, die über Wasser aufgefangen und gemessen wird. In Abb. 61 ist der Apparat schematisch dargestellt. Das Verdampfungsgefäß K besteht aus einem etwa 2 cm weiten Glasrohr, das sich nach oben in ein enges, langes Rohr A fortsetzt. Durch die mit einem Gummistopfen verschlossene Öffnung dieses Rohres wird die zu untersuchende Substanz in einem abgewogenen Glaskölbchen eingebracht und mittels eines durch den Ansatz C luftdicht geführten Stäbchens zunächst oben gehalten. Ein weiterer Ansatz B, der nur 1 mm weit ist, führt unter den in der mit Wasser gefüllten Wanne W stehenden Meßzylinder Z.

Mit Hilfe des elektrischen Ofens O wird der Kolben K auf die gewünschte Temperatur gebracht. Der Meßzylinder ist vollkommen mit Wasser gefüllt, und das Glaskölbchen wird auf die Fallvorrichtung gelegt, wobei das Rohr A

solange offenbleibt, bis die erforderliche Temperatur erreicht ist. Nun wird A geschlossen, das Kölbchen in den Kolben K fallen gelassen, wo es zerspringt und der entstehende Dampf die Luft in den Zylinder verdrängt.

Ist m die Substanzmenge, V das verdrängte Luftvolum, t die Temperatur im Meßzylinder und p der Druck über der Wassersäule, so berechnet sich die auf Luft bezogene Dampfdichte zu

$$D = \frac{m}{V} \frac{760\,(1 + \alpha\, t)}{p \cdot \varrho_1}. \tag{6/19}$$

Für p setzt man ein: $p = b - \frac{h}{13{,}6} - e_w$, wenn h die Höhe der Wassersäule (die auf Hg bezogen wird) und e_w den Dampfdruck von Wasser bei der Temperatur t bedeuten.

Als Gefäßmaterial werden bis 600° C Hartglas, über 600° C glasiertes Porzellan, über 1100° C Platin und zwischen 1700° und 2000° C Iridium benutzt. V. WARTENBERG hat eine Anordnung angegeben, mit der die Dampfdichten einer Reihe von Metallen bei 2000° C bestimmt wurden. Der Kolben bestand aus Iridium, der in einen Iridiumröhrenofen gebracht war. An Stelle des Meßzylinders diente eine 2 mm weite Glaskapillare, in der sich ein Quecksilbertropfen bewegte.

Nachteilig bei der Verdrängungsmethode ist, daß die zu bestimmende Dampfdichte von der verwendeten Substanzmenge abhängt, wenn sie dissoziiert.

§ 7 NIEDRIGE UND HOHE DRUCKE

7,1 **Herstellung niedriger Drucke**

7,11 *Allgemeines*

Drucke, die kleiner als der auf der Erdoberfläche herrschende atmosphärische Druck sind, werden allgemein als Vakuum bezeichnet. In diesem Druckbereich dient als Maßeinheit das *Torr*, d. h. der Druck einer Quecksilbersäule von 1 mm Höhe bei 0° C und Normalbeschleunigung. Im physikalischen Maßsystem ist die Einheit des Druckes dyn/cm^2 und wird *Mikrobar* genannt. Da die normale Dichte von Quecksilber 13,5951 g/cm^3 ist, bekommt man folgende Umrechnungsfaktoren:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Torr} = 1 \text{ mm Hg} &= 1333{,}2 \text{ dyn/cm}^2 \text{ (Mikrobar)} \\ &= 1{,}3332 \text{ Millibar.} \end{aligned}$$

Bei Drucken unterhalb von 10^{-3} Torr läßt sich das Verhalten eines Gases in einem abgeschlossenen Raum nicht mehr allein durch die kinetische Gastheorie beschreiben, da wegen der großen freien Weglänge der Gasmoleküle die äußere Reibung stark in Erscheinung tritt; hier beginnt das Gebiet des *Hochvakuums*. Wenn man weiter von Drucken, die kleiner als 10^{-8} Torr sind, als von einem „Extremvakuum" spricht, so geschieht das nur im Hinblick auf die großen Schwierigkeiten bei der Erzeugung und Messung solcher Drucke.

Über das Gesamtgebiet der physikalischen Hochvakuumtechnik vermitteln die Arbeiten (*71, 72, 75, 115, 137, 186, 219, 252, 303, 340, 363*) einen eingehenden Überblick.

In einem Gefäß erzeugt man ein Vakuum indem man das in diesem Gefäß enthaltene Gas oder den Dampf fortschafft. Dabei benutzt man die Tatsache, daß ein Gas stets den ganzen ihm zur Verfügung stehenden Raum ausfüllt. Vorrichtungen hierzu werden Pumpen genannt. Sie vergrößern den Rauminhalt des auszupumpenden

Gefäßes künstlich. Entsprechend den hierfür angewandten Verfahren lassen sich folgende Pumpenarten unterscheiden:

a) *Mechanische Pumpen*

Kolbenpumpen (Gerykpumpe) geben zweistufig ein Endvakuum von 10^{-3} Torr; dreistufig nach GAEDE 10^{-5} Torr.
Rotierende Ölluftpumpen, einstufig 10^{-3} Torr, zweistufig 10^{-5} Torr (§ 7,13).
Rotierende Quecksilberpumpen nach GAEDE (*111*), auf dem Prinzip einer umgekehrt laufenden Gasuhr beruhend, ergeben 10^{-6} Torr.

b) *Strahlpumpen*

beruhen auf der Saugwirkung eines aus einer Düse mit großer Geschwindigkeit austretenden Flüssigkeits- oder Dampfstrahles.
Wasserstrahlpumpen (*155*) liefern den Dampfdruck bei der Betriebstemperatur (z. B. 12 Torr bei 15° C).
Quecksilber-Dampfstrahlpumpen, Endvakuum 10^{-3} Torr.

c) *Molekularkinetische Pumpen*

Molekularluftpumpen nach GAEDE (*83*, *104*, *112*) erreichen bei 10^{-2} Torr Vorvakuum 10^{-7} Torr.
Diffusionspumpen (*320*) (§ 7,14).

d) *Sorptionspumpen*

Adsorption von Gasen an vorbehandelter Kohle (§ 7,15).

In der Abb. 62 sind die mit den einzelnen Pumpentypen zu erreichenden Druckbereiche übersichtlich zusammengestellt.

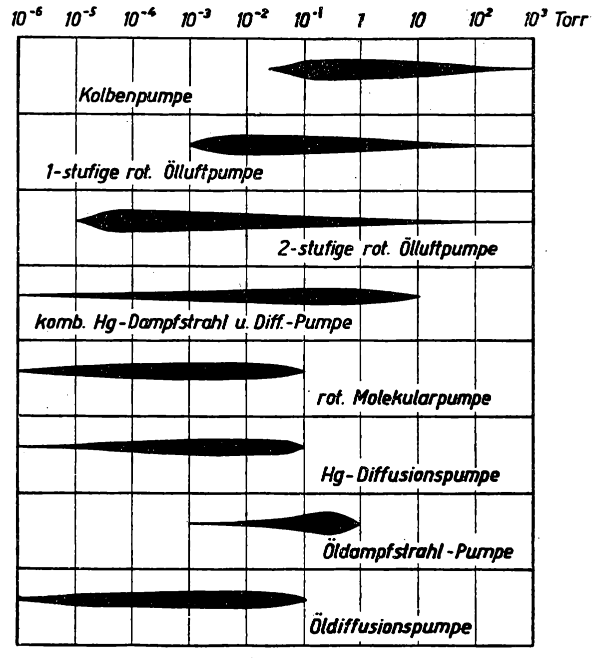


Abb. 62 Arbeitsbereiche der Hochvakuumpumpen

7,12 *Allgemeine Pumpeneigenschaften*

Beim Vergleich der einzelnen Pumpentypen und der Auswahl einer bestimmten Pumpe für einen vorgegebenen Zweck sind vor allem die folgenden 5 Punkte von entscheidender Bedeutung: 1. *Güte des Endvakuums*, 2. die sog. *Vorvakuumbeständigkeit*, d.h. das Verhältnis von Vorvakuumdruck zu Enddruck, 3. Volumendurchfluß oder *Sauggeschwindigkeit*, die in l/min oder g/min gemessen wird. Die in l/min gemessene Sauggeschwindigkeit ist bei vielen Pumpentypen über einen größeren Druckbereich konstant. Das Endvakuum läßt sich durch Extrapolieren der Sauggeschwindigkeit nach den niedrigsten Drucken bestimmen, sofern die Druckmessung nicht mehr mög-

lich ist. Die Sauggeschwindigkeit ist meistens vom Vorvakuum abhängig. 4. Erforderliches *Vorvakuum*, das gewöhnlich durch rotierende Ölluftpumpen, seltener, weil weniger betriebssicher, durch Wasserstrahlpumpen erzeugt wird. 5. *Betriebssicherheit* einschließlich Haltbarkeit, Zuverlässigkeit und Einfachheit der Wartung. Daneben ist für größere Pumpen die Frage des Wirkungsgrades von Bedeutung, der sich bei Diffusionspumpen aus der Heizleistung, bei mechanischen Pumpen aus der erforderlichen Antriebsleistung berechnet.

7,13 *Rotierende Ölluftpumpen*

In einem Rotgußgehäuse G (Abb. 63) ist drehbar ein exzentrisch angeordneter, zylindrischer Kolben K eingepaßt, in dessen radialen Schlitzen zwei oder mehrere Schieber S aus gehärtetem Stahl durch kräftige Federn F gegen die Zylinderwand gedrückt werden. Dreht sich der Kolben in Pfeilrichtung, so wird das abzusaugende Gas durch die Einlaßöffnung E angesaugt, verdichtet und durch das Ventil V nach außen gedrückt. Zur Abdichtung der Pumpe gegen die Außenluft, besonders der Achsendurchführung, ist das Pumpengehäuse mit einer Ölfüllung versehen, die gleichzeitig zur vollständigen Abdichtung des Druckventiles V dient. Die Pumpen bestehen entweder aus Einzelpumpen, wobei sie bei einer Förderleistung von 0,5 bis 100 m^3/h(von Atmosphärendruck) ein Endvakuum von etwa 10^{-2} bis 10^{-3} Torr erreichen. Zweistufig hintereinandergeschaltet (Duplexpumpen) ist ein Endvakuum von $3 \cdot 10^{-4}$ bis 10^{-5} Torr erreichbar.

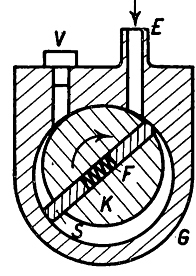


Abb. 63 Drehschieberpumpe

Die Saugleistung läßt sich aus den Abmessungen der Pumpe errechnen. Sind r der Radius des Drehkolbens, R der Innenradius des Gehäuses und L die axiale Länge des Drehkolbens, so wird bei einer Drehzahl n pro Minute der Volumendurchfluß:

$$S = n \cdot \pi \cdot L\,(R^2 - r^2)\,. \qquad (7/1)$$

S ist also der Drehzahl proportional und theoretisch wie bei allen Kolbenpumpen vom Förderdruck unabhängig, was jedoch praktisch nur bis zu 90% Vakuum erreicht wird.

Eine Abart der in Abb. 63 gezeigten Drehschieberpumpe ist die Drehkolbenpumpe (Abb. 64) mit wesentlich größerer Fördermenge. Der zylindrische Kolben K, der von dem sich in Richtung des Pfeiles drehenden Exzenter E mitgenommen wird, gleitet längs der zylindrischen Gehäusewand G und schiebt dabei die in dem Raum 1 befindliche Gasmenge vor sich her, bis sie durch das mit Öl abgedichtete Auslaßventil V ausgestoßen wird. Das abzusaugende Gas tritt an dem Ansaugstutzen A ein und gelangt durch den Saugkanal des Flachschiebers S in den Raum 2. Der Schieber S ist mit dem Kolben fest verbunden und gleitet zwischen zwei im Gehäuse drehbaren Lamellen L hin und her. Diese Pumpen werden nur einfachwirkend gebaut und besitzen eine Saugleistung von 50 bis 1000 m^3/h bei einem Endvakuum von etwa 10^{-3} Torr. Die Angaben des Endvakuums beziehen sich auf den Partialdruck der Luft, der bedeutend höhere Dampfdruck des

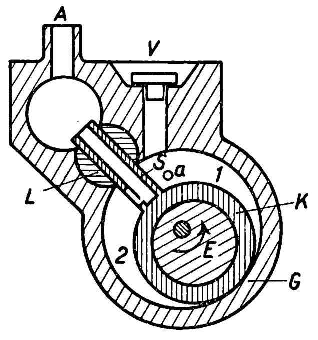


Abb. 64 Drehkolbenpumpe

Pumpenöles von 10^{-2} Torr läßt sich durch chemisch aktive Substanzen unwirksam machen.

Normale, rotierende Ölluftpumpen geben ein hohes Endvakuum, sofern man permanente Gase abpumpt. Pumpt man jedoch gesättigte oder ungesättigte Dämpfe ab, so werden diese während des Kompressionsvorganges kondensiert, wodurch das Kondensat mit dem Pumpenöl vermischt auf die Vakuumseite gelangt und das erreichte Endvakuum erheblich verschlechtert. Durch eine kleine zusätzliche Eintrittsöffnung für Luft (in Abb. 64 mit a bezeichnet) läßt sich dieser Übelstand vermeiden und die Pumpe in eine „*Gasballastpumpe*" umwandeln. Die Wirkungsweise ist dabei folgende: Wird von einer gewöhnlichen Pumpe z. B. Wasserdampf der Temperatur 20° C mit der Luft angesaugt und erwärmt sich die Pumpe in stationärem Betrieb z. B. auf 60° C, so wird sich der Wasserdampf während des Kompressionsvorganges schon kondensieren, ehe im Kompressionsraum 1 der Druck herrscht, der zum Abheben des Ventiles V erforderlich ist. Das bedeutet, daß das Kondensat im Pumpengehäuse bleibt, sich mit dem Pumpenöl emulgiert und auf die Vakuumseite gelangen kann. Durch die kleine Öffnung a, die nur während eines Teiles der Kolbenbewegung freigelegt wird, kann zu Beginn der Kompression Frischluft zuströmen, wodurch bei der Kompression schon vor dem Erreichen des zu der Temperatur 60° gehörenden Sättigungsdruckes in 1 ein Druck erreicht wird, durch den das Ventil abgehoben wird. Die Kondensation ist damit unterbunden worden. Diese Wirkung läßt sich jedoch nur erzielen, wenn die Temperatur des abzusaugenden Dampfes merklich geringer als die Pumpentemperatur ist (*117*).

Ölluftpumpen werden hauptsächlich als Vorpumpen für die im § 7,14 besprochenen Diffusionsluftpumpen und zum Abpumpen von verflüssigten Gasen zum Zwecke der Temperaturerniedrigung verwendet.

7,14 *Diffusionspumpen*

Nach GAEDE (*114*), dem Erfinder der Diffusionspumpe und eigentlichen Begründer einer Hochvakuumtechnik, läßt sich der Grundgedanke dieserPumpe folgendermaßen darstellen: In der Abb. 65 stellt D die Wandung eines Quecksilber oder Öl enthaltenden Kessels dar, in den an der Stelle F ein Rohr G eingeleitet ist, das bei C an den auszupumpenden Rezipienten angeschlossen ist. Wird der Kessel geheizt, so entwickelt sich luftfreier Quecksilber- oder Öldampf, der in der Richtung A—B an der Öffnung F schnell vorbeiströmt. An B ist die Vorvakuumpumpe angeschlossen; der Dampf wird an einem nicht gezeichneten Kühler kondensiert. Der bei F in das Rohr G eindringende Dampf wird in dem Kühler K kondensiert. Wesentlich ist, daß alle Dampfmoleküle von K eingefangen werden und weder durch Reflexion noch im freien Flug in den Hochvakuumraum gelangen können. Da in dem an F vorbeistreichenden Dampf der Partialdruck der Luft bzw. des abzusaugenden Gases Null ist, an der Stelle E im Rohr G jedoch ein endlicher Partialdruck herrscht, diffundiert das Gas in den Dampfstrom und wird von diesem mitgerissen. Voraussetzung hierfür ist, daß die Diffusionsgeschwindigkeit des Gases größer ist als die Geschwindigkeit des in G eindringen-

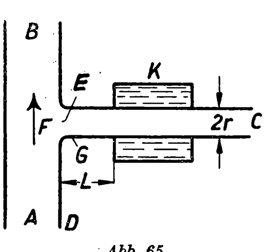


Abb. 65
Prinzip der Diffusionspumpe

den Dampfes. Es kommt also wesentlich auf den Strömungswiderstand des Rohrstückes G an. GAEDE (*113*) hat für diesen einfachen Fall den sekundlichen Volumendurchfluß berechnet und gelangte zu der Beziehung

$$S = \frac{1}{L} \frac{\pi r^3}{2 \vartheta_1} e^{-\frac{r P_1}{1520 D \vartheta_2}}. \qquad (7/2)$$

In dieser Gleichung sind r der Rohrradius, L die Rohrlänge von E bis K, D die Diffusionskonstante, P_1 der Dampfdruck bei F, ϑ_1 und ϑ_2 die Koeffizienten der Gas- und Dampfreibung an der Rohrwandung. Betrachtet man nun den Rohrradius r als Veränderliche in Gleichung (7/2), so erhält man die in Abb. 66 dargestellte Abhängigkeit von S. Solange also r groß ist, wird keine Luft aus C angesaugt, da infolge des geringen Reibungswiderstandes in G der Dampf mit einer größeren Geschwindigkeit einströmt, als die Diffusionsgeschwindigkeit des Gases beträgt. Das Gas wird daher vom Dampf nach E zurückgedrängt. Ist dagegen die Leitung genügend eng, so strömt der Dampf langsam hindurch, und die Luft kann nach F vordringen. Die Diffusionsgeschwindigkeit ist nicht von der Rohrweite, sondern nur von der Natur und dem Zustand der diffundierenden Gase abhängig. Der Verbindungsweg von E nach F ist dann sowohl mit Gas als auch mit Dampf erfüllt, die in entgegengesetzter Richtung diffundieren. Die Gasdiffusion hängt nur vom Partialdruckgefälle in Richtung E—F ab, und da der Dampfstrom bei F luftfrei, der Partialdruck des Gases bei F also Null ist, lassen sich die höchsten Vakua erzeugen. Der Dampfstrom bei F saugt daher das Gas aus G an, auch wenn der Dampfdruck sehr viel größer als der Gasdruck ist. Der in das Rohr G eindringende Dampf wird bei K oder an mehreren Stellen kondensiert. Um den Volumendurchfluß groß zu machen, muß der Exponent in Gleichung (7/2) klein werden, also $r \cdot P_1$ klein sein. Für einen bestimmten Wert erreicht S, wie aus Abb. 66 ersichtlich ist, ein ausgeprägtes Maximum. Man wird deshalb den Dampfdruck bei F klein wählen, wodurch die freie Weglänge der Dampfmoleküle groß wird. Ist die freie Öffnung bei F mit der freien Weglänge der Dampfmoleküle vergleichbar oder kleiner, so werden die Gasmoleküle ohne Behinderung in den Dampfstrom diffundieren können.

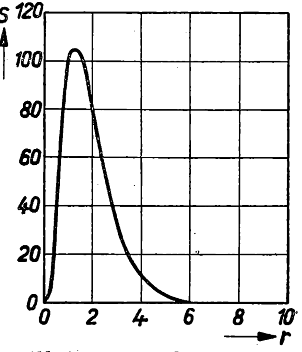


Abb. 66 Sauggeschwindigkeit und Diffusionsspaltweite

Das Wesentliche der Diffusionspumpe ist also die Größe der Diffusionsöffnung, die so gewählt werden muß, daß für die Dampfmoleküle der Durchgang zur Hochvakuumseite ausreichend gesperrt und in der Größenordnung der freien Weglänge der Gasmoleküle ist.

Die von E nach F strömende Gasmasse ist zunächst dem Partialdruckgefälle proportional gesetzt worden. Diffundiert jedoch noch der Dampf in entgegengesetzter Richtung, so bildet sich ein *Diffusionsgegendruckgefälle* aus, das offenbar

$$\varDelta p = p_2 \left(1 - e^{-\frac{r P_1}{1520 D \vartheta_2}}\right) \qquad (7/3)$$

beträgt, wenn p_2 der Partialdruck des Gases bei E ist. Die durch G fließende Gasmasse ist also nur dem Differenzdruck $p_2 - \varDelta p$ verhältnisgleich. Die Pumpe saugt nur dann, wenn $r \cdot P_1$ so klein wird, daß $\varDelta p$ kleiner als p_2 wird. Durch Verkürzen der

Strecke L in Abb. 65 läßt sich Δp wirksam verringern, weshalb man den Kühler K möglichst in die Nähe des Diffusionsspaltes bringt.

Diesen Vorstellungen GAEDES werden andere, sich besonders auf die Strahlwirkung des Treibdampfes beziehende Theorien entgegengehalten, die hauptsächlich mit dem Namen CRAWFORD verknüpft sind. Eine kritische Beurteilung der verschiedenen Theorien der Diffusionspumpe wird in der Arbeit von AVERY und WITTY (*8*) gegeben. Eine erschöpfende Theorie der Diffusionspumpen, in der die physikalischen Vorgänge in den Pumpen quantitativ erfaßt werden, ist neuerdings von JAECKEL (*185*) aufgestellt worden.

Nach JAECKEL lassen sich die beiden wichtigsten Betriebsgrößen einer Diffusionsluftpumpe, die *Vorvakuumbeständigkeit*, d. h. das Verhältnis Vorvakuumdruck p_v zu Endvakuumdruck p_0, und die *Sauggeschwindigkeit* S aus folgenden vereinfachten Annahmen ableiten. Bei der in der Abb. 67 schematisch dargestellten Pumpe trete bei A der Dampfstrom ein und werde an den gekühlten Wandungen kondensiert. Die Vorvakuumpumpe sei bei B, der auszupumpende Raum bei C angeschlossen. Die Dampfmoleküle sollen sich alle, von der Fläche ab ausgehend, mit konstanter Geschwindigkeit w parallel zur Achse AB bewegen. Die bei ab durch Diffusion in den Dampfstrom eintretenden Gasmoleküle werden von diesen mitgerissen und in das Vorvakuum abgeführt. Die Anzahl n_g der Gasmoleküle im cm³ nimmt also, wie in der Abb. 67 rechts angedeutet, mit wachsendem Abszissenwert x zu, sei jedoch überall klein gegen die Anzahl n_d der Dampfmoleküle. In einer Querschnittfläche x werden pro Sekunde und cm² $n_g w$ Gasmoleküle vom Dampfstrom nach B geführt. Infolge des Partialdruckgefälles des Gases diffundieren entgegen dem Dampfstrom in der Zeiteinheit $D \cdot \frac{d\,n_g}{d\,x}$ Gasmoleküle/cm² nach oben. Im stationären Zustand und nach Erreichen des Endvakuums muß die Anzahl der nach oben und unten fliegenden Gasmoleküle dieselbe sein, d. h.

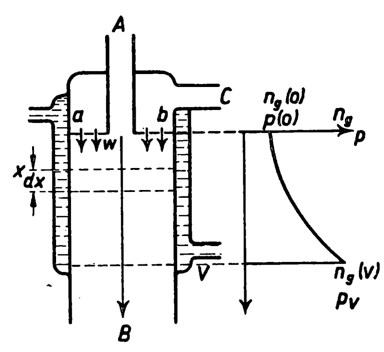


Abb. 67 Wirkungsweise der Diffusionspumpe

$$n_g w = D \frac{d\,n_g}{d\,x}, \tag{7/4}$$

worin D der Diffusionskoeffizient der Gasmoleküle im Dampf ist. Da voraussetzungsgemäß $n_d \gg n_g$ sein soll, kann man setzen

$$D_0 = n_d D,$$

wo D_0 eine von n_d unabhängige Konstante ist. Durch Einsetzen in Gleichung (7/4) und Integration über x erhält man schließlich, wenn man berücksichtigt, daß $n_g \sim p$ ist, für die Vorvakuumbeständigkeit

$$\frac{p_v}{p_0} = e^{\frac{n_d w}{D_0} L}, \tag{7/5}$$

worin L die Länge des Diffusionsweges von der Fläche ab bis zur Fläche V ist und p die Partialdrucke des Gases sind. Die Vorvakuumbeständigkeit nimmt also mit zu-

nehmender Dampfdichte und -geschwindigkeit zu und hängt in hohem Maße vom Diffusionsweg L ab. L ist für jede Pumpe eine individuelle Konstante, n_d und w wachsen mit zunehmendem Dampfdruck, d. h. mit der Heizleitung der Pumpe. Der Vergleich mit den Meßergebnissen bestätigt diese Annahme.

Die Abhängigkeit der Vorvakuumbeständigkeit von der Art des ausgepumpten Gases ist durch die Diffusionskonstante D_o gegeben, die sich nach ENSKOG (*86*) aus den Moleküldurchmessern und Molekulargewichten von Gas und Dampf berechnen läßt. Für Luft und Wasserstoff in Quecksilberdampf erhält man:

$$\frac{D_{o\,\mathrm{Luft}}}{D_{o\,\mathrm{H_2}}} = 0{,}23 .$$

Nimmt man z. B. für Luft $p_o = 10^{-7}$ Torr, $p_v = 10^{-1}$ Torr, also $p_v/p_o = 10^6$ an, so liefert dieselbe Pumpe für Wasserstoff

$$(p_v/p_o)_{\mathrm{H_2}} = (10^6)^{0{,}23} \approx 24 .$$

Die Vorvakuumbeständigkeit der Pumpe ist also beim Abpumpen von Wasserstoff um mehrere Größenordnungen kleiner als bei Luft. Diese Überlegungen stimmen quantitativ mit Versuchen von WERTENSTEIN (*369*) an verschiedenen Gasen überein.

Die Sauggeschwindigkeit S bei nicht geschlossenem Ansaugstutzen C läßt sich folgendermaßen berechnen: Sind bei C je cm³ n Gasmoleküle mit der mittleren Molekulargeschwindigkeit $\bar{c}$ enthalten, so treffen auf die Diffusionsfläche F in der Zeiteinheit $\frac{1}{4} F n \bar{c}$ Moleküle auf. In umgekehrter Richtung fliegen durch Rückdiffusion aus dem Dampfstrom $\frac{1}{4} F n'_{go} \bar{c}$ Moleküle je Sekunde nach oben, wenn n'_{go} die im cm³ Dampf enthaltene Anzahl der Gasmoleküle unterhalb a—b bedeutet. Die durch a—b angesaugte Anzahl N der Gasmoleküle ergibt sich also zu

$$N = \frac{1}{4} F \bar{c} \,(n - n'_{go}) = n\,S = n\,F\,s\,, \tag{7/6}$$

wenn S das in der Zeiteinheit abgesaugte Volumen und s die sog. spezifische Sauggeschwindigkeit auf die Flächeneinheit bezogen ist. Durch Einführen der bereits bekannten Größen erhält man schließlich

$$s = \frac{\bar{c}}{4}\,\frac{1 - \dfrac{n'_{gv}}{n}\cdot\dfrac{n_{go}}{n_{gv}}}{1 + \dfrac{\bar{c}}{4w}\left(1 - e^{-\frac{w}{D}L}\right)}, \tag{7/7}$$

worin n_{go} und n_{gv} die im cm³ enthaltene Anzahl von Gasmolekülen bei C bzw. B bedeuten. Beim Endvakuum ist $n'_{gv}/n = n_{gv}/n_{go}$, d. h. es wird $s = 0$. Mit wachsendem Ansaugdruck nimmt auch n/n'_{gv} zu, so daß der Zähler von Gleichung (7/7) nur wenig kleiner als 1 wird. Die spez. Saugleistung wird den Maximalwert

$$s = \frac{\bar{c}}{4}\cdot\frac{1}{1 + \bar{c}/4w} \tag{7/8}$$

erreichen. Nähert sich schließlich der Ansaugdruck dem Vorvakuumdruck, nimmt s wieder ab, so daß sich im Verlauf der Sauggeschwindigkeit s in Abhängigkeit vom

Saugdruck ein breites Maximum ergibt, das auch durch das Experiment bestätigt wird. Der Maximalwert von s hängt nach Gleichung (7/8) nur vom absoluten Betrag $\bar{c}$ und vom Verhältnis $\bar{c}/w$ ab. Wird $w \gg \bar{c}/4$, erreicht s seinen Höchstwert mit $\bar{c}/4$, der sich nach der kinetischen Gastheorie zu

$$s_{\max} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8\,R\,T}{\pi\,M}} \tag{7/9}$$

berechnet, wenn R die Gaskonstante, T die absolute Temperatur und M das Molekulargewicht des abgesaugten Gases sind. Diese obere Grenze der spezifischen Sauggeschwindigkeit wird praktisch nicht erreicht. Nach Gleichung (7/9) verhalten sich die Grenzwerte von $s_{\max}$ umgekehrt wie die Wurzeln aus den Molekulargewichten. Für Wasserstoff bekommt man daher

$$s_{H_2}/s_{\text{Luft}} = (28{,}8/2{,}016)^{1/2} = 3{,}78,$$

wobei allerdings das bei H_2 geänderte Verhältnis $\bar{c}/w$ nicht in Rechnung gesetzt worden ist.

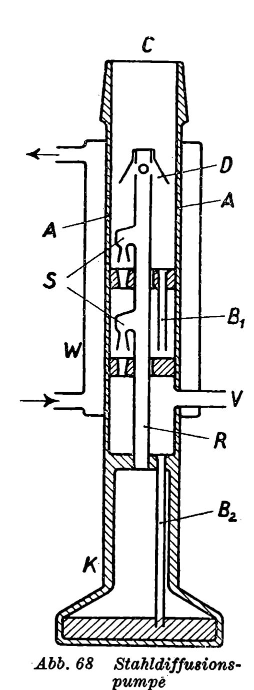


Abb. 68 Stahldiffusionspumpe

Ähnliche Überlegungen theoretischer Art, die zum Teil durch Versuchsergebnisse bestätigt wurden, sind von WITTY (*375*) und ALEXANDER (*2*) angestellt worden. Im wesentlichen stimmen diese Arbeiten mit den Ergebnissen JAECKELS überein.

Aus der Mannigfaltigkeit der verschiedenen Pumpenkonstruktionen, die aus Glas, Quarzglas oder Stahl ausgeführt sind, sollen nur zwei Pumpenarten etwas genauer beschrieben werden. In Abb. 68 ist eine dreistufige Quecksilber-Diffusionspumpe aus Stahl etwas schematisiert dargestellt. Diese besteht im wesentlichen aus einem weiten Stahlrohr A, das von dem Wasserkühler W umgeben ist. Am unteren Ende von A befindet sich das Quecksilbersiedegefäß, der Kessel K, der elektrisch geheizt wird. Am oberen Ende C, das einen Schliff trägt, ist das Hochvakuumgefäß angeschlossen. Der in K entwickelte Quecksilberdampf strömt mit großer Geschwindigkeit im Dampfsteigrohr R nach oben und tritt durch die hutförmige Dampfdüse D nach unten aus. Der eigentliche Diffusionsspalt wird durch die Ringfläche zwischen D und R gebildet. Um das zu ihrem Betrieb erforderliche Vorvakuum, das an V angeschlossen ist, nicht zu hoch wählen zu müssen, sind der Diffusionsdüse die beiden Dampfstrahldüsen S vorgeschaltet, die je aus einer Treib- und Fangdüse bestehen und deren Pumpwirkung auf der Erzeugung eines Totaldruckgefälles beruht. Durch die Rohre B_1 und B_2 kann das an der gekühlten Pumpenwandung kondensierte Quecksilber in den Kessel zurückfließen. Durch diese Konstruktion wird der erforderliche Vorvakuumdruck auf 20 Torr heraufgesetzt. Eine solche Pumpe (Modell E von Leybolds Nachf.) besitzt bei einem Saugdruck von 10^{-3} Torr eine Sauggeschwindigkeit von 15—20 l/s und erreicht ein Endvakuum, das kleiner ist als 10^{-6} Torr. Der erforderliche Heizleistungsverbrauch beträgt 1000 W. In Abb. 69 ist die für dieses Modell gefundene Abhängigkeit der Saugleistung vom Saugdruck aufgetragen. Daraus ist ersichtlich, daß der sekundliche Volumendurchfluß rasch zwischen 10^{-2} und 10^{-3} Torr ein Maximum erreicht, dann aber bei niedrigeren Drucken ein wenig abfällt. Der erzielbare Druck ist kleiner als 10^{-6} Torr, wobei allerdings zu beachten ist, daß sich diese Angabe auf den Partial-

druck des abzusaugenden Gases bezieht. Daneben ist natürlich der Partialdruck des Quecksilbers bei der Temperatur des Rezipienten vorhanden, der bei 20° C 0,0018 Torr beträgt. Aus diesem Grunde schaltet man zwischen Pumpe und Rezipienten eine *Kühlfalle*, die mit flüssiger Luft oder fester Kohlensäure gekühlt wird und an der sich der Quecksilberdampf kondensiert.

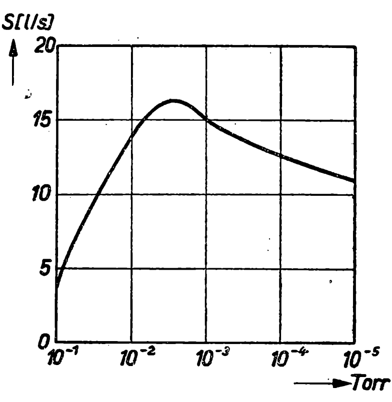


Abb. 69 Sauggeschwindigkeit der Pumpe in Abb. 68

Man hat mit Erfolg versucht, an Stelle des Quecksilbers ein Treibmittel mit sehr viel niedrigerem Dampfdruck zu verwenden, wie das in den *Öldiffusionspumpen* geschieht. Da das verwendete Apiezonöl bei Zimmertemperatur einen sehr niedrigen Dampfdruck von 10^{-5} Torr besitzt, entfällt bei diesen Pumpen die Ausfriervorrichtung. Dafür nimmt man allerdings den Nachteil in Kauf, daß diese Pumpen sehr empfindlich gegen Überheizung sind, wodurch das Öl thermisch zerfällt und das Vakuum verschlechtert wird. Bei den *Öl-Fraktions-Diffusionspumpen* wird im Innern der Pumpe das Öl destilliert, wobei die einzelnen Druckstufen gesondert beschickt werden in der Weise, daß die hochsiedenden Bestandteile (niedriger Dampfdruck!) bei niedrigstem Druck arbeiten. Im Fall von Lufteinbrüchen reinigt sich das Öl selbsttätig und bewirkt keine Verschlechterung des Endvakuums. Derartige Pumpen werden für sehr große Sauggeschwindigkeiten bis zu 2000 l/s bei 10^{-4} Torr Ansaugdruck hergestellt (*3, 165, 226 243*).

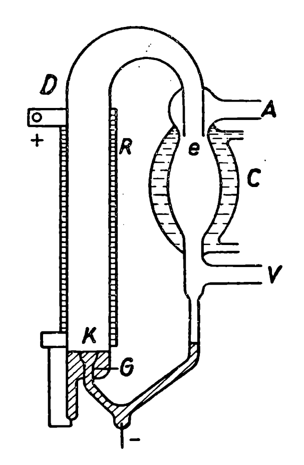


Abb. 70 Diffusionspumpe nach LANGMUIR

Eine zweite Ausführungsform nach LANGMUIR ist in einstufiger Anordnung in der Abb. 70 dargestellt. Abweichend von dem Aufbau der GAEDEschen Pumpen wird bei dieser Anordnung das Quecksilber durch einen im Kessel selbst erzeugten Lichtbogen geheizt. Der Kessel K aus Glas oder Quarzglas enthält für die Kathode einen besonderen Glaseinsatz G, der nur etwas über den Quecksilberspiegel in K reicht. Durch Neigen wird der elektrische Lichtbogen gezündet; als Vorschaltwiderstand dient die Wicklung R, die um das Dampfrohr D angebracht ist und zugleich die Abkühlung des Dampfes verhindert. Im Spalt e diffundiert das durch A zuströmende Gas in den Dampfstrom, der im Kühler C kondensiert wird. Bei V wird die Vorvakuumleitung angeschlossen. Diese einfache Konstruktion bietet den Vorteil, daß durch die Innenheizung das Glas thermisch nicht beansprucht wird. Der Volumendurchfluß beträgt bei einem Vorvakuum von 0,5 Torr etwa 150 l/min.

7,15 *Adsorptionsmethoden* (*39, 242*)

In einzelnen Fällen (kleine, einmalig auszupumpende Gefäße, nachträgliche Verbesserung und Aufrechterhaltung des Vakuums) kann man eine Pumpe umgehen und

zu den Absorptionsmethoden greifen. Unter diesem Begriff sind drei Vorgänge zusammengefaßt, deren gegenseitige Abgrenzung schwierig ist:

a) *Absorption* (Aufnahme von Gasen in Körpern ohne chemische Bindung),

b) *Adsorption* (Bildung dichter Molekülschichten an der Oberfläche von Körpern),

c) *Okklusion* (Einschluß von Gasen im Innern fester Körper).

Diese Erscheinungen hängen im einzelnen von der Natur des absorbierenden Körpers und des Gases, vom Druck des Gases und vor allem von der Temperatur ab. Man nennt die Fähigkeit fester Körper, Gase zu absorbieren, die vor allem von der molekularen Struktur der Oberfläche abhängt, Aktivität. Am wichtigsten hierfür ist *Kohle*, die aus Holz (Erle, Buche, Buchsbaum), Kokos- oder Haselnußschale oder Teer hergestellt wird. Diese Substanzen werden in einem eisernen Gefäß mehrere Stunden erhitzt, bis die Kohle grauschwarz ist und matte Bruchflächen hat. Hierauf wird die Kohle bei hoher Temperatur noch einmal in einer Wasserstoff- oder Chloratmosphäre oder im Vakuum sechs bis acht Stunden lang erhitzt, bis sie tiefschwarz geworden ist. Bei Gebrauch wird die fein zerteilte Kohle in einem Hartglas- oder Quarzglasgefäß im Vakuum erhitzt und dann mit flüssiger Luft abgekühlt. Ein Absorptionsgefäß, bei dem die Aktivkohle zur Regeneration direkt durch JOULEsche Wärme geglüht werden kann, wird von ANDERSON (*357*) angegeben. Die Aktivität der Kohle ist verschiedenen Gasen gegenüber verschieden groß und sehr stark von der Temperatur abhängig. In der Tabelle VI ist die Aktivität von Buchsbaumkohle für verschiedene Gase bei 0° C und der Temperatur des siedenden Sauerstoffes zusammengestellt.

Gas	V_a/V bei 0° C	V_a/V bei —183° C
H_2	4	135
N_2	15	155
O_2	18	230
A	12	175
He	2	15
CO_2	21	190

Tabelle VI

Helium wird also von Kohle in nur geringer Menge absorbiert, ebenso verhält sich Neon, während Xenon und Krypton stark festgehalten werden. Da die Verwendung von Kohle in flüssigem Sauerstoff gefährlich ist, zieht man dieser oft das *Silikagel* vor. Über die Druckabhängigkeit der absorbierten Mengen geben die sog. Adsorptionsisothermen Aufschluß. Sie geben ein Bild von den Gleichgewichtszuständen zwischen der freien und adsorbierten Gasphase in Abhängigkeit vom Druck der freien Phase unter Verwendung ein und desselben Sorbens bei einer konstanten Versuchstemperatur. In der Abb. 71 sind die Adsorptionsisothermen von Stickstoff an Kohle nach Messungen von TITOFF (*352*) dargestellt. Die Kurven nähern sich für höhere Drucke einem Sättigungswert, der bei um so größeren absorbierten Mengen liegt, je geringer die Temperatur ist.

Zur Kennzeichnung der „Pumpwirkung" von Kohle möge die beistehende Tabelle VII dienen, in welcher der zeitliche Verlauf der Aufnahme von Luft durch 5 g Holzkohle

aus einem Kolben von 300 cm³ Inhalt nach DEWAR angegeben ist. Die Luft hat einen anfänglichen Druck von 1,7 Torr und eine Temperatur von 15° C.

Zeit	Enddruck (Torr)
0 min in flüssiger Luft	1,684
5 min in flüssiger Luft	$5{,}45 \cdot 10^{-2}$
10 min in flüssiger Luft	$1{,}03 \cdot 10^{-2}$
30 min in flüssiger Luft	$1{,}39 \cdot 10^{-4}$
60 min in flüssiger Luft	$4{,}7 \cdot 10^{-5}$
10 min in flüssigem H_2	$1{,}54 \cdot 10^{-5}$
10 min in festem H_2	$5{,}8 \cdot 10^{-6}$

Tabelle VII

Eine weitere Möglichkeit der Gasaufzehrung im Vakuum besteht in der Verwendung der sog. *Getter* (*12, 145, 228*). Als Getterstoffe werden die Metalle Magnesium, Barium und Legierungen von Mg-Ba oder Sr-Mg-Ba verwendet. Mg bindet Kohlensäure nicht, Na ebenfalls Wasserstoff nicht; am geeignetsten ist Barium, das alle schwer verflüssigbaren Gase adsorbiert, Sauerstoff und Wasserstoff aber chemisch bindet. Die Getterstoffe, die in Form kleiner, genau abgewogener Pillen hergestellt werden, verdampft man in dem Gefäß, in dem die Gasreste aufgezehrt werden sollen, kurz vor oder nach dem Abschmelzen. Das geschieht entweder durch unmittelbares Erhitzen oder durch eine Hochfrequenzheizung. Die Gasbindung erfolgt während des Verdampfens durch chemische Umsetzungen, zum Teil aber noch später durch Adsorption des auf der Gefäßwandung aufgedampften Niederschlages (Kontaktgetterung). Von besonderer Bedeutung ist dieses Verfahren für die Erhaltung des Vakuums in Elektronenröhren. Dabei ist darauf zu achten, daß die Kathode von diesem Niederschlag geschützt bleibt.

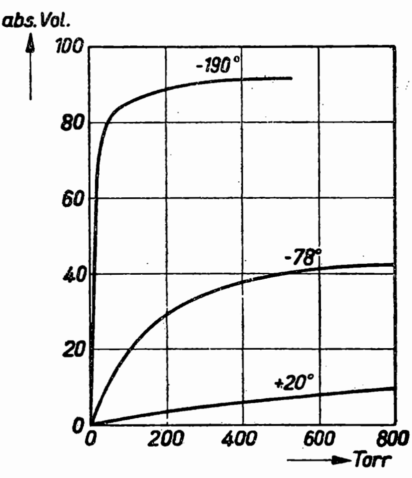


Abb. 71 Adsorptionsisothermen

Bei Gasentladungen tritt häufig ein starker Druckabfall dadurch auf, daß positive Ionen an der Gefäßwand festgehalten werden (*110*).

7,16 *Strömungswiderstand in Leitungen*

Wie bereits erwähnt, schwankt die Sauggeschwindigkeit der einzelnen Pumpen etwa in einem Bereich von einigen l/s bis zu einigen 1000 l/s. Man wird je nach der Größe des auszupumpenden Gefäßes, der hierzu (bei Reihenuntersuchungen) vorgegebenen Zeit und etwa vorhandenen Verbindungen („Fenster") mit der Außenluft die Pumpe wählen, deren Sauggeschwindigkeit bei ausreichendem Endvakuum den gegebenen Erfordernissen am besten entspricht. Man kann die Sauggeschwindigkeit der Pumpe ohne weiteres bei der Berechnung der sich ergebenden Auspumpzeit voll

einsetzen, wenn der Rezipient unmittelbar auf dem Saugstutzen der Pumpe aufsitzt, wie das z. B. bei einem Röntgenrohr oder einer Verspiegelungsapparatur möglich ist. Ist das nicht der Fall, befindet sich also zwischen Pumpe und Rezipient eine längere Rohrleitung, eine Ausfriertasche oder ein Vakuumventil, so können sich große Abweichungen von der Sauggeschwindigkeit am Pumpenstutzen ergeben.

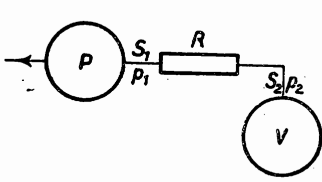


Abb. 72 Pumpe mit Leitungswiderstand

Das Schema eines solchen Aufbaues ist in der Abb. 72 wiedergegeben. Die Pumpe P saugt den Rezipienten V über die Leitung (Kühlfalle, Ventil) R ab. Der Volumendurchfluß am Saugstutzen der Pumpe beim Druck p_1 sei S_1. Die Sauggeschwindigkeit unmittelbar am Rezipienten V betrage S_2 bei einem Druck p_2. Ist V groß, so daß sich die Drucke p_1 und p_2 während der Versuchszeit nur unwesentlich ändern, so gilt:

$$S_1 \frac{p_1}{p_0} \varrho_0 = \frac{p_2 - p_1}{R}$$

und

$$S_2 \frac{p_2}{p_0} \varrho_0 = \frac{p_2 - p_1}{R},$$

wenn man mit R den Reibungswiderstand der Verbindungsleitung bei einem mittleren Druck bezeichnet und ϱ_0 die Gasdichte bei Normalbedingungen ist. Bildet man $1/S_1$ und $1/S_2$ und subtrahiert, so erhält man:

$$\frac{1}{S_2} = \frac{1}{S_1} + \frac{\varrho_0}{p_p} R \tag{7/10}$$

oder nach S_2 aufgelöst:

$$S_2 = S_1 \frac{1}{1 + \frac{\varrho_0}{p_0} S_1 R}. \tag{7/11}$$

Die Sauggeschwindigkeit am Gefäß ist also in jedem Fall geringer als am Pumpstutzen, und zwar um so mehr, je größer S_1 und R sind. Mißt man S in cm³/s, so bekommt der Reibungswiderstand R die Dimension s/cm².

Ist nun V nicht sehr groß, so daß sich kein quasistationärer Zustand einstellen kann, so kommt man zu ähnlichen Ergebnissen. Dazu setzt man die durch die Druckerniedrigung dp_2 verlorengegangene Gasmenge $V \cdot dp_2\, \varrho_0/p_0$ der in der kurzen Zeitspanne dt abgesaugten Menge $S_2\, p_2\, \varrho_0\, dt/p_0$ gleich, woraus sich ergibt:

$$V\, dp_2 = - S_2\, p_2\, dt.$$

Setzt man für den Ausgangsdruck p_2 den sich aus den obigen Beziehungen ergebenden Ausdruck ein, so erhält man schließlich durch Integration:

$$p_2 = p_1 (1 + R\, S\, \varrho_0/p_0) \exp. \frac{-S\, t}{V (1 + R\, S\, \varrho_0/p_0)}. \tag{7/12}$$

Der sich im Rezipienten einstellende Druck wird also um so höher sein, je größer wieder das Produkt aus der Sauggeschwindigkeit S und dem Reibungswiderstand der Rohrleitung ist, wobei p_1 der zur Zeit $t = 0$ am Pumpstutzen herrschende Druck

ist. Der Einfluß des Strömungswiderstandes R tritt deutlich in der Abb. 73 hervor, wo der Quotient p_2/p_1 in Abhängigkeit von $S \cdot t/V$ für verschiedene Widerstände $R\,S\,\varrho_0/p_0$ aufgetragen ist.

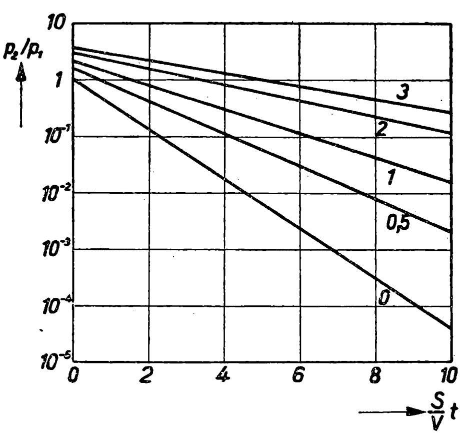


Abb. 73 Druckverhältnis beim Auspumpen eines Gefäßes

Schließlich soll noch der Fall behandelt werden, daß der Rezipient V über die Rohrleitung mit dem Strömungswiderstand R_1 abgesaugt wird, während zugleich über die Leitung mit dem Widerstand R_2 Gas zuströmt, um z. B. einen bestimmten Druck aufrechtzuerhalten oder die Gasmenge in V zu erneuern. Die Abb. 74 stellt diese Anordnung schematisch dar. Der Druck und die Sauggeschwindigkeit am Pumpenstutzen seien wieder p_1 und S_1, die Größen im Rezipienten p_2 und S_2. Über den Widerstand R_2 soll Gas vom Druck p_3 nachströmen. Bezeichnet man das durch jeden Querschnitt der Anlage in der Sekunde fließende Gasgewicht mit G, so gilt

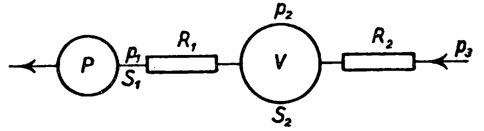


Abb. 74 Abpumpen mit Gaseinlaß

$$G = S_1\,p_1\,\varrho_0/p_0 = \text{konstant}.$$

Demnach gilt für die einzelnen Abschnitte

$$S_1 \frac{p_1}{p_0}\,\varrho_0 = \frac{p_1 - p_2}{R_1} \quad \text{und} \quad S_2 \frac{p_2}{p_0}\,\varrho_0 = \frac{p_3 - p_2}{R_2}\,;$$

außerdem gilt:

$$S_1\,p_1 = S_2\,p_2 \quad \text{und} \quad S_1 \frac{p_1}{p_0}\,\varrho_0 = \frac{p_3 - p_1}{R_1 + R_2}\,.$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich der gesuchte Druck p_2 im Rezipienten berechnen. Es ergibt sich für $R_2 \gg R_1$, was in den meisten Fällen angenommen werden darf,

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{1 + R_1\,S_1\,\varrho_0/p_0}{1 + R_2\,S_1\,\varrho_0/p_0}\,. \tag{7/13}$$

Ein beträchtliches Vakuum läßt sich also im Rezipienten nur dann aufrechterhalten, wenn das Produkt $R_1\,S_1\,\varrho_0/p_0$ größer als eins wird. In diesem Fall (große Sauggeschwindigkeiten) errechnet sich der Rezipientendruck zu: $p_2 = p_3\,\dfrac{R_1}{R_2}$. In der Abb. 75 ist für ein vorgegebenes Widerstandsverhältnis R_1/R_2 der sich einstellende Rezipientendruck p_2 abhängig vom Volumendurchfluß S_1 der Pumpe aufgetragen. Die Darstellung zeigt, daß das Druckverhältnis zuerst proportional mit $1/S_1$ abnimmt, um sich dann dem oben angegebenen Endwert asymptotisch zu nähern.

Abb. 75 Abhängigkeit der Rezipientendrucks vom Volumendurchfluß

Für die Berechnung des *Reibungswiderstandes* von Rohrleitungen in verdünnten Gasen für den Fall, daß die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle die Größenordnung der Gefäßdimensionen (Rohrdurchmesser) erreicht, gelten die hydrodynamischen Gesetze, besonders das HAGEN-POISEUILLEsche Gesetz, nicht mehr. Die durch eine Kapillare strömende Gasmasse wird bei gleichem Druckverhältnis sehr viel größer als die nach diesem Gesetz berechnete. Nach KNUDSEN (*203*) beträgt das in der Zeiteinheit durch eine Kapillare vom Durchmesser D und der Länge L strömende Gasvolumen beim Druckunterschied Δp

$$Q = \frac{\sqrt{3\,\pi/2}\;D^3\,g}{3\,\bar{c}\,L\,\varrho}\,\Delta p\,, \tag{7/14}$$

wenn g die Erdbeschleunigung und $\bar{c}$ die mittlere Molekulargeschwindigkeit des Gases ist. Die Zähigkeit ist also ohne Einfluß auf die Durchflußmenge. Damit gewinnt man für den Reibungswiderstand R eines zylindrischen Rohres den Ausdruck

$$R = \frac{3\,\bar{c}\,L}{\sqrt{3\,\pi/2}\;D^3\,g}\;(\mathrm{s/cm^2})\,. \tag{7/15}$$

Für eine *Bohrung* vom Durchmesser D in einer dünnen Wand erhält man:

$$R = \frac{4\,\bar{c}}{\sqrt{3\,\pi/2}\;D^2\,g}\,. \tag{7/16}$$

Die Bohrung entspricht also einer Kapillaren, deren Länge etwa gleich dem Durchmesser ist.

7,17 *Messung der Saugleistung*

In den meisten Fällen ist die Pumpenleistung — das bei einem bestimmten Druck in der Zeiteinheit abgesaugte Gasvolumen — vom Hersteller angegeben. Will man die Saugleistung experimentell bestimmen, so kann man in Zusammenhang mit dem im § 7,16 Gesagten folgende Verfahren anwenden:

a) *Methode des konstanten Druckes*

Nach dem Schema der Abb. 74 läßt man durch einen regelbaren Strömungswiderstand R_2 (Nadelventil) ein Gas vom Druck p_3 nachströmen. Ist das in der Zeiteinheit einströmende Volumen V_t, so berechnet sich die Sauggeschwindigkeit S_2 beim Druck p_2 zu

$$S_2 = p_3\,V_t/p_2\,.$$

V_t ist mit Hilfe eines geeichten Gasometers oder einer Gasuhr bequem meßbar.

b) *Methode des konstanten Volumens*

Nach dem Schema der Abb. 72 mißt man die Drucke p_2 und p_2', die während des Evakuierens des Rezipienten vom Volumen V zur Zeit t bzw. t' herrschen. Bezeichnet man den Druck beim Endvakuum mit p_0, so berechnet sich die Saugleistung aus der Beziehung

$$S = \frac{V}{t - t'}\,\ln\frac{p_2 - p_0}{p_2' - p_0}\,. \tag{7/17}$$

Die Saugleistung unmittelbar am Pumpstutzen erhält man nach Berücksichtigung des zwischen V und der Pumpe geschalteten Leitungswiderstandes entsprechend Gleichung (7/11).

c) *Kapillarmethode*

Man schaltet zwischen Vor- und Hochvakuumseite eine Kapillare mit bekanntem Strömungswiderstand R ein. Ist der Druck des Vorvakuums p_v, der der Hochvakuumseite unmittelbar nach dem Öffnen der Kapillare p_h, so berechnet sich die Sauggeschwindigkeit aus

$$S = \frac{p_0}{\varrho_0} \frac{p_v - p_h}{p_h R}. \tag{7/18}$$

7,2 Messung niedriger Absolutdrucke

Bei der Bestimmung der Güte eines Vakuums handelt es sich im wesentlichen darum, niedrige Drucke von Gasen und Dämpfen zu messen. Unter niedrigem Druck versteht man dabei den Zustand, bei dem die freie Weglänge der Gase im Vergleich zu den Gefäß- und Leitungsdimensionen groß ist. Solange die Gase und Dämpfe noch als Kontinuum aufgefaßt werden können, sind zur Druckmessung Vakuummeter auf manometrischer und elastischer Grundlage verwendbar. Häufig genügt jedoch diese Annahme für die theoretische Betrachtung des Meßgerätes nicht. So werden bei einigen Manometern die Ergebnisse der kinetischen Gastheorie zugrunde gelegt oder auch die Erscheinung des Durchganges von Elektrizitätsträgern durch ein verdünntes Gas zur Vakuummessung verwendet. Hiernach ergibt sich zwangsläufig eine Einteilung der Vakuummeter in *gaskinetische* und *elektrische* Geräte (*363*), zu denen sich einige auf *manometrischer* Grundlage gesellen.

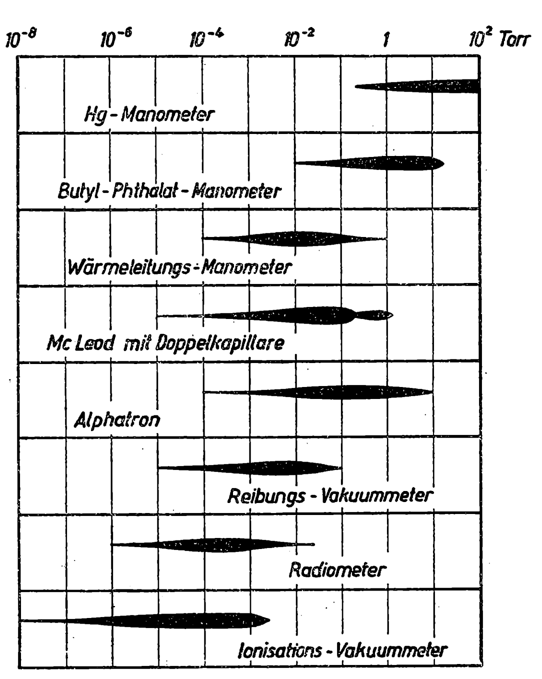


Abb. 76. Meßbereich von Vakuummetern.

In Abb. 76 sind die Meßbereiche der im folgenden zu besprechenden verschiedenen Vakuummeterarten zusammengestellt.

7,21 *Quecksilber-Vakuummeter*

Für die Messung nicht zu kleiner Drucke wird das Prinzip der kommunizierenden Röhren herangezogen, indem man den langen Schenkel des Barometers stark verkürzt und die Höhendifferenz an beiden Schenkeln beobachtet. Durch Verfeinerung der Beobachtungsvorrichtungen lassen sich hiermit Drucke von 10^{-2} Torr noch feststellen. Für die Messung von sehr kleinen Druckdifferenzen bei zugleich sehr niedrigem

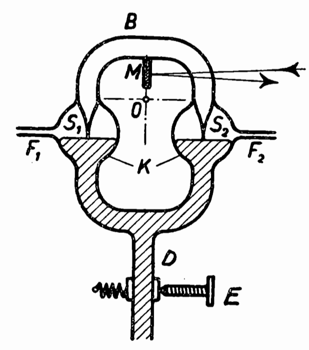


Abb. 77 Differentialmanometer

Absolutdruck eignet sich ebenfalls dieses Meßprinzip. In Abb. 77 ist das von SCHEEL und HEUSE konstruierte *Differentialmanometer* schematisch dargestellt. Dieses Neigungsmanometer besteht aus zwei gleich großen Glaskugeln K, die ein kurzes U-Rohr bilden und durch die Zuleitung *D* mit Quecksilber gefüllt werden. Sie sind durch die federnden Glasrohre F_1 und F_2 mit den Druckmeßstellen verbunden. In die Kugeln ist je eine feine Glasspitze S_1 und S_2 eingeschmolzen, deren Enden den stabilen Bügel B bilden. Dieses Manometer ist mit Hilfe der Einstellschraube E um die zur Zeichenebene senkrechte Achse 0 schwenkbar, wobei die Winkeländerung am Spiegel M mit Fernrohr und Skala beobachtet wird. Die Glasspitzen erlauben eine sehr genaue Einstellung der Quecksilbermenisken unter dem Mikroskop. Die zu messende Druckdifferenz wird nun in der Weise festgestellt, daß durch Neigen des U-Rohres und Einstellen der Quecksilberhöhe mittels eines an D angeschlossenen Quecksilberbehälters beide Glasspitzen gerade zur Berührung mit den Menisken gebracht werden und der Neigungswinkel am Spiegel abgelesen wird.

Dieses Manometer hat einen Meßbereich von etwa 5 Torr und eine Ablesegenauigkeit von $\frac{1}{2000}$ Torr. Natürlich lassen sich mit diesem Instrument auch Absolutdrucke bestimmen, wenn man eine Rohrhälfte vollständig evakuiert. Eine weitere Verfeinerung der Ablesung erhält man nach BARUS (*15*), der die Flüssigkeitssäulen interferometrisch vergleicht.

Durch die Verwendung organischer Substanzen, die als Pumpenöle dienen, lassen sich mit normalen U-Rohr-Manometern bequem Drucke von etwa 10^{-3} Torr messen. Dazu gehören: Butylphtalat $C_6H_4(COOC_4H_9)_2$, spez. Gewicht 1,047, Dampfdruck bei Zimmertemperatur 10^{-5} Torr; Octoil $C_6H_4(COOC_8H_{17})_2$, spez. Gewicht 0,980, Dampfdruck bei 20° C 10^{-6} Torr; Apiezonöle und Silicone.

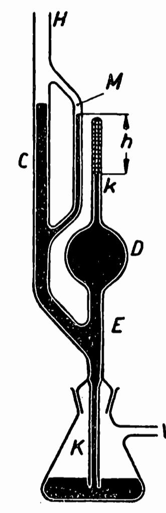


Abb. 78 Kompressionsmanometer nach McLEOD

Wesentlich einfacher im Gebrauch und zur Messung bedeutend niedrigerer Drucke verwendbar ist das weitverbreitete *Kompressionsvakuummeter* nach McLEOD, das ebenfalls den Partialdruck mißt. Dieses besteht, wie in der Abb. 78 angedeutet ist, aus einem Glasgefäß D bekannten Inhalts V' und einer angeschmolzenen, oben geschlossenen Kapillare k, deren lichter Querschnitt q ebenfalls bekannt ist. Durch das Rohr C ist das Instrument mit dem Hochvakuumraum verbunden. Parallel zu k ist eine zweite Kapillare M derselben Weite an C angeschmolzen, um die Differenzablesung zu erleichtern und die Kapillardepression zu eliminieren. Bei der Messung wird durch den Druckunterschied zwischen Vorvakuum V und dem Hochvakuumanschluß H im Verbindungsrohr E Quecksilber aus dem Vorratsgefäß hochgehoben und dabei der Kompressionsraum D von der Verbindung mit dem Vakuum abgetrennt. Der abgetrennte Raum mit dem Volumen $V' + V_k = V$ enthält somit Gas und Dampf vom gesuchten Druck p_x im Augenblick der Abtrennung. Läßt man das Quecksilber weitersteigen, so wird das Gasvolumen schließlich auf das kleine Volumen v der Kapillaren zusammengedrückt, wobei es unter dem Druck $p + p_x$ steht. Die Menisken

in den beiden Kapillaren k und M zeigen den entsprechenden Höhenunterschied von h mm an. Die einzige Annahme, die zur Berechnung von p_x gemacht werden muß, ist die Gültigkeit des BOYLEschen Gesetzes, wonach das Produkt aus Volumen und Druck bei konstanter Temperatur gleichbleibt. Es gilt daher

$$V \cdot p_x = (p + p_x) \cdot v ,$$

woraus folgt

$$p_x = \frac{p\,v}{V - v} . \tag{7/19}$$

Da v im Vergleich zu V sehr klein ist, darf es in Gleichung (7/19) vernachlässigt werden. Es sind zwei Ablesearten gebräuchlich: 1. Aus dem an den beiden Kapillaren gemessenen Druckunterschied von h mm Hg läßt sich bei bekanntem v/V aus (7/19) der gesuchte Druck p_x berechnen. 2. Wird die Quecksilberkuppe in M gleich hoch mit dem Ende der Kapillaren K eingestellt und ist h in mm der dem Druck p entsprechende Höhenunterschied, so bekommt man bei bekanntem Kapillarquerschnitt (cm²) und Gefäßvolumen (cm³) für den Druck

$$p_x = \frac{h^2\,q}{10\,V - h\,q} . \tag{7/20}$$

Bei der Verwendung des MCLEOD-Vakuummeters ist stets der Gültigkeitsbereich des BOYLEschen Gesetzes zu überprüfen. Es können nur Drucke solcher Gase gemessen werden, die beim Komprimieren nicht kondensieren. Bei genauen Messungen muß daher auf die Beseitigung solcher Dämpfe (Wasser!) geachtet werden. Mit Hilfe der Gleichung (7/19) kann man die Gültigkeit prüfen, wenn man auf verschiedene Druckhöhen einstellt. Es empfiehlt sich, unterhalb eines Druckunterschiedes von 5—10 mm nicht zu messen.

Der Meßbereich dieses Instrumentes erstreckt sich bis zu etwa 10^{-6} Torr. Setzt man die Kompressionskapillare aus Teilen verschiedener Weite zusammen und gibt auch den Meßkapillaren dieselben Querschnitte, so lassen sich auch höhere Drucke noch genau messen. Die Erweiterung des Meßbereiches nach niedrigeren Drucken ist begrenzt durch die bei großem Kompressionsvolumen erforderliche Quecksilbermenge und die nicht beliebig eng zu wählende Kapillare.

Erwähnenswert sind die Versuche (*378*), das Kompressionsvakuummeter mit einem der unten zu besprechenden Instrumente zu verbinden. Es wird dann am oberen Ende der Kapillare ein anderes Vakuummeter eingebaut, das die dort herrschenden Drucke nach der Kompression genau zu messen gestattet. PFUND (*272*) hat ein Wärmeleitungsvakuummeter mit dem MCLEODschen vereinigt, indem er in der verschlossenen Kapillare des letzteren einen kurzen, sehr dünnen Heizdraht anordnete; unter besonderen Voraussetzungen ließen sich damit Drucke bis zu 10^{-10} Torr herab messen.

7,22 *Wärmeleitungsvakuummeter*

Die Energie eines elektrisch geheizten Drahtes wird außer durch Strahlung und Konvektion durch Wärmeleitung, die vom Gasdruck abhängig ist, abgegeben. Eine merkliche Abhängigkeit vom Gasdruck ist nur bei kleinen Drucken zu erwarten. Die Strahlungswärme ist druckunabhängig, und die Strömung hört bei niedrigen Drucken von etwa 1 Torr auf. Die Wärmeleitfähigkeit eines Gases ist nach den Vor-

stellungen der kinetischen Gastheorie der Gasdichte und der freien Weglänge proportional. Da die Dichte dem Druck direkt, die freie Weglänge jedoch diesem umgekehrt proportional ist, wird das Wärmeleitvermögen so lange vom Druck unabhängig sein, wie die freie Weglänge unbehindert größer werden kann. Bei sinkendem Druck wird schließlich die freie Weglänge so groß, daß nach einem Zusammenprall zweier Moleküle in der Nähe des Drahtes diese auf die Gefäßwand treffen, ehe ein neuer Zusammenstoß stattfinden kann. Für das Gebiet der „Wandstöße" gilt für die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = \frac{3}{8}\, p \sqrt{\frac{3\,R}{M\,T}}, \qquad (7/21)$$

worin R die Gaskonstante, M das Molekulargewicht, p den Druck und T die mittlere Temperatur aus Wand- und Drahttemperatur bedeuten, also $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$. In diesem Bereich ist also das Wärmeleitvermögen druckproportional und von den Gefäßdimensionen unabhängig. Der Übergang ist dann zu erwarten, wenn die freie Weglänge des Gases in die Größe des Gefäßradius kommt. Für Luft ist die freie Weglänge bei 0° C und dem Druck 1 Torr $4{,}62 \cdot 10^{-3}$ cm. Ist r der Radius des Gefäßes, so ist der Übergang zur druckproportionalen Abhängigkeit der Wärmeleitung etwa bei $p = 4{,}6 \cdot 10^{-3}/r$ zu erwarten. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß die freie Weglänge einer Maxwell-Verteilung folgt ist und ein Teil der Moleküle ein Mehrfaches der mittleren freien Weglänge bis zum Zusammenstoß durchläuft. Da etwa noch 1% der Moleküle die fünffache Strecke zurücklegt, ist der Übergang bei etwa $2 \cdot 10^{-2}/r$ zu suchen. Bringt man daher einen elektrisch beheizten Körper (Draht) in das Gefäß, dessen Gasdruck bestimmt werden soll, so wird in einem bestimmten Druckbereich dessen Temperatur ein Maß für den Druck sein. Fast gleichzeitig haben Warburg, Leithäuser und Johannsen (*366*) sowie Voege (*357*) und Pirani (*277*) brauchbare Vorschläge für Wärmeleitungsvakuummeter gemacht, bei denen entweder die Temperatur des beheizten Drahtes durch dessen elektrischen Widerstand oder durch ein Thermoelement bestimmt wurde. Die große Annehmlichkeit dieser Instrumente liegt darin, daß der Druck laufend gemessen werden kann und eine leichte Entgasung der im Meßgeräte enthaltenen Metallteile möglich ist.

Das Hitzdrahtvakuummeter nach Pirani benutzt die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes eines Drahtes von der Temperatur zur Vakuummessung. Ein dünner Platin- oder Nickeldraht ist in einem Glasgefäß isoliert ausgespannt und wird schwach erwärmt. Unterhalb des oben definierten kritischen Druckes hängt die sich einstellende Temperatur außer von der Heizleistung nur von der Wärmeableitung durch das Gas und die metallischen Zuleitungen ab, wenn man von den Strahlungsverlusten absieht. Die Widerstandsänderung des Drahtes ist also ein Maß für die Güte des Vakuums.

Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, diese Widerstandsänderung zu messen, nämlich

a) bei konstanter Spannung die Stromänderung,

b) bei konstantem Widerstand die Heizleistung und

c) bei konstantem Strom den Spannungsabfall am Draht.

Setzt man die durch die Halterung des Drahtes abfließende Wärmemenge ebenfalls der wirksamen Temperaturdifferenz zwischen Draht und Glasgefäß proportional, so lautet die Energiebilanz für die Methode a)

$$\frac{U^2}{R_0\,(1 + \alpha\, T_1)} = (A\, p\, \lambda' + B)\,(T_1 - T_2)\,, \tag{7/22}$$

wenn U die angelegte Spannung, R_0 der elektrische Widerstand bei der Außentemperatur T_2, α der Temperaturkoeffizient des Heizdrahtes, λ' die auf den Ausgangsdruck bezogene Wärmeleitungszahl des Gases, T_1 die Drahttemperatur und A und B Apparatekonstante sind. Für abnehmende Drucke p steigt die Hitzdrahttemperatur T_1 und damit der etwa mit einer Brückenschaltung meßbare Widerstand des Drahtes. In Abb. 79 ist der im Diagonalzweig einer den Hitzdraht enthaltenden

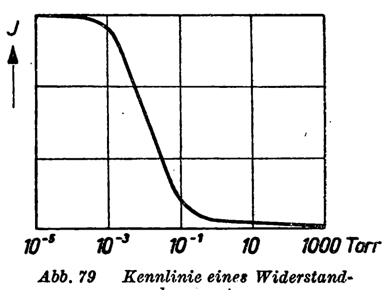


Abb. 79 Kennlinie eines Widerstand-vakuummeters

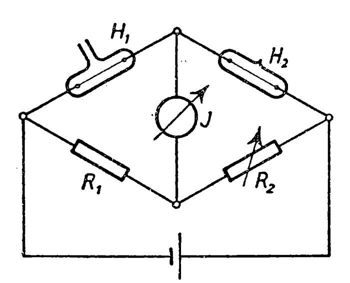


Abb. 80 Kompensiertes Widerstand-vakuummeter

Meßbrücke fließende Strom abhängig vom Gasdruck aufgetragen. Wie zu erwarten, wird die Druckänderung des Widerstandes für relativ große und sehr kleine Drucke Null, da bei kleinen Drucken die Wärmeableitung durch Strahlung und durch die Halterung überwiegt, während sich bei höheren Drucken die druckunabhängige Konvektion bemerkbar macht. Die Strahlungsverluste und die Wärmeableitung durch die Zuführung und Halterung lassen sich durch eine von Hale und fast gleichzeitig von Daut (*64*) vorgeschlagene Schaltung, die schematisch in der Abb. 80 dargestellt ist, eliminieren. Eine Wheatstonesche Brücke wird aus den beiden Hitzdrahtmanometern H_1 und H_2 und den Ohmschen Widerständen R_1 und R_2 gebildet. In H_1 herrscht der zu messende Druck, H_2 ist vollständig evakuiert. Mit Hilfe des veränderlichen Widerstandes R_2 wird die Brücke abgeglichen; der Heizstrom wird an einem Strommesser abgelesen. Durch den völlig gleichartigen Aufbau von H_1 und H_2 werden die sonstigen Wärmeverluste eliminiert und zugleich eine erhebliche Erweiterung des Meßbereiches erzielt. Für einen bestimmten Heizstrom kann das Brückeninstrument J sogleich in Torr geeicht werden. Der Meßbereich erstreckt sich von 0,3 bis 10^{-5} Torr (*195*).

Statt des Drahtes kann man als Widerstand auch Quecksilber verwenden, das sich in einer sehr dünnen Glaskapillare befindet. Dadurch kann das Manometer auch da verwendet werden, wo Gase und Dämpfe die Metalle angreifen würden. Solche Instrumente sind für Drucke bis herauf zu 2 Torr brauchbar.

Eine bereits erwähnte Möglichkeit, die Temperatur eines in einer Gasatmosphäre veränderlichen Druckes befindlichen Heizdrahtes als Druckmaß zu verwenden, besteht darin, diese durch ein Thermoelement zu messen. Doch gilt für diese Anordnung

ebenfalls das oben Gesagte bezüglich der Einschränkung des Meßbereiches durch die Ableitung der Wärme durch die Halterung (*13, 118*).

Ein interessanter Vorschlag zur Erweiterung des Meßbereiches eines *Thermo-Vakuummeters* stammt von BURGER und MOLL (*54*) und ist in der Abb. 81 schematisch dargestellt. Innerhalb des Vakuumgefäßes (in der Abbildung punktiert gezeichnet) sind zwei Paare von Thermoelementen als symmetrische Zweige einer Brücke geschaltet. Die Thermodrähte zwischen den Klemmen AB und AC sind relativ lang und dünn gewählt, während zwischen BD und CE dicke und kurze Elemente eingelötet sind. Außerhalb des Meßgefäßes wird die Brücke durch die Widerstände R und R' ergänzt. In bezug auf das Anzeigegerät J in der Brückendiagonalen sind die einzelnen Thermoelemente hintereinandergeschaltet. Durch eine an A und F angeschlossene Heizstromquelle werden die im Vakuum liegenden Brückenzweige erwärmt und ergeben bei abgeglichener Brücke einen vom Druck abhängigen Ausschlag an J. Mit Vorteil verwendet man zur Heizung Wechselstrom, der einen Abgleich der Brücke unnötig macht. Bezeichnet man mit t_0 die etwa konstante Temperatur der Klemmen, und nimmt man ferner an, daß die Thermoelemente aus derselben Kombination bestehen, so entsteht an J die Gesamtspannung

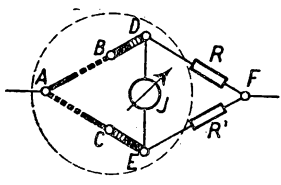


Abb. 81 Thermo-Vakuummeter

$$U_1 = 2\,u_{t_1} - 4\,u_{t_0} + 2\,u_{t_2},$$

wenn t_1 und t_2 die an den dünnen bzw. dicken Thermoelementen herrschenden Temperaturen und u die dazugehörigen Spannungen sind. Da sich die Anzeige aus den Einzelspannungen der Thermoelemente zusammensetzt, ist eine Erweiterung des Meßbereiches nach höheren Drucken zu erwarten, was durch die Meßergebnisse vollauf bestätigt wird. Es lassen sich, wie aus Abb. 82 hervorgeht, bequem Drucke zwischen 10 und 10^{-3} Torr messen, wobei als Anzeigeinstrument ein Millivoltmeter mit 10 mV Gesamtausschlag verwendet wird.

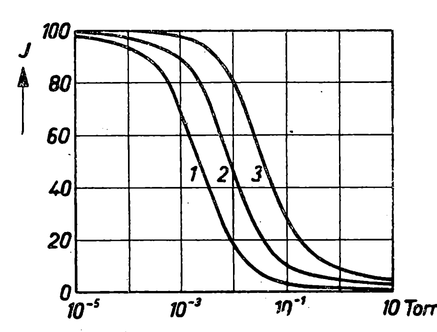


Abb. 82 Kennlinien des Thermo-Vakuummeters bei kleiner (1), mittlerer (2) und großer (3) Wärmeabfuhr durch die Zuleitungen

7,23 *Reibungsvakuummeter*

Nach den Gesetzen der kinetischen Gastheorie hängt, ähnlich wie die Wärmeleitfähigkeit, auch die innere Reibung eines Gases von einem bestimmten Druck an von diesem ab. Der durch die Versuche von KUNDT und WARBURG bestätigte Zusammenhang zwischen den molekularen Größen, dem Druck und der Wandgeschwindigkeit u ergibt für die auf die Flächeneinheit wirkende Reibungskraft bei geringen Drucken

$$K = \frac{p}{4}\sqrt{\frac{3\,M}{R\,T}}\,u, \tag{7/23}$$

wenn M das Molekulargewicht des Gases, T dessen Temperatur und R die Gaskonstante sind. Die Impulsübertragung ist nach Gleichung (7/23) dem Druck und der Geschwindigkeit u proportional, vom Wandabstand jedoch unabhängig.

Für Drucke bis zu 10^{-5} Torr herab eignen sich besonders die Vakuummeter nach HABER und KERSCHBAUM (*146*) sowie nach LANGMUIR (*217*), bei denen die Abnahme der Amplitude eines schwingenden Quarzfadens im Vakuumgefäß beobachtet wird, die außer von der inneren (sehr geringen) Dämpfung des Fadens selbst von der Gasreibung abhängt. Mißt man die Zeitdifferenz t, in der die Amplitude auf den halben Wert zurückgegangen ist, so kann aus

$$p = \left(\frac{b}{t} - a\right) / \sqrt{M} \qquad (7/24)$$

der Druck bestimmt werden, da die Konstanten a und b nur von den Abmessungen des Fadens abhängen.

Ein theoretisch leicht zugänglicher Vorschlag, der von LANGMUIR (*218*) stammt, verwendet zwei kreisrunde Scheiben, die sich in geringem Abstand im Vakuum gegenüberstehen und von denen eine von außen her in schnelle Drehung versetzt wird. Die zweite Scheibe ist an einem Torsionsfaden aufgehängt und wird über ein mit ihr verbundenes Spiegelchen beobachtet. Unterhalb 10^{-2} Torr ist der Ausschlag dem Druck direkt proportional und nach Gleichung (7/23) von der Winkelgeschwindigkeit und dem Molekulargewicht abhängig. Bei 10000 U/min lassen sich noch Drucke von 10^{-7} Torr messen.

7,24 *Vakuummeter nach dem Radiometerprinzip* (*109*)

Anknüpfend an die CROOKschen Versuche über die Radiometerwirkung fand KNUDSEN (*204*) das Prinzip eines bequemen und äußerst empfindlichen Vakuummeters, das den Gesamtdruck anzeigt, also den Druck einschließlich dem der gesättigten und ungesättigten Dämpfe, die sich im Gasraum befinden.

Nach KNUDSEN ist die mechanische Kraft, mit der ein zwischen zwei Platten von verschiedener Temperatur befindliches Gas auf die Platten wirkt, in sehr einfacher Weise vom Gasdruck, der Plattengröße und deren Temperaturen abhängig. Der Abstand der beiden Platten muß jedoch klein gegen die freie Weglänge des Gases sein, wodurch der Meßbereich nach höheren Drucken begrenzt ist. Der Aufbau dieses Vakuummeters ist in Abb. 83 schematisch dargestellt. An einem dünnen Torsionsfaden F hängt die Platte AA′, deren Drehwinkel durch einen an dem Spiegel S reflektierten Lichtzeiger verfolgt werden kann. AA′ stehen in geringem Abstand die beiden festen Platten BB′ gegenüber, die elektrisch erwärmt werden können. Nach KNUDSEN ist der Druck in einem Gas, das in einem Behälter von sehr viel kleineren Abmessungen als die freie Weglänge des Gases eingeschlossen ist, an jedem Ort der Quadratwurzel der absoluten Temperatur verhältnisgleich. Die Temperatur des Gases und der beweglichen Platte sei T_1, die der beheizten Platte T_2. Ist die Differenz $T_2 - T_1$ klein gegen die Absoluttemperaturen, so

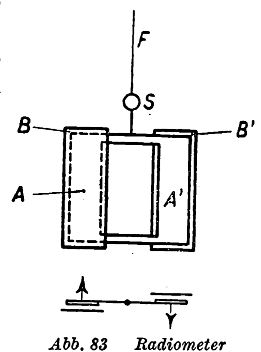


Abb. 83 Radiometer

kann man dem zwischen die Platten AA' und BB' eingeschlossenen Gas eine Temperatur $(T_1 + T_2)/2$ zuschreiben. Das Gas übt dann beim Gasdruck p auf die Platten den Druck p' aus, der sich berechnet aus:

$$p' = p \sqrt{\frac{T_1 + T_2}{2\,T_2}} \approx p\left(1 + \frac{T_2 - T_1}{4}\right), \qquad (7/25)$$

wenn die Temperaturdifferenz $T_2 - T_1$ klein gegen T_1 ist. Die auf die Flächeneinheit der beweglichen Platte wirkende, abstoßende Kraft K ist offensichtlich $p' - p$, woraus für p folgt:

$$p = \frac{4\,K\,T_2}{(T_2 - T_1)\,\gamma}\ (\mathrm{Dyn/cm^2}). \qquad (7/26)$$

Der Faktor γ in Gleichung (7/26) stellt einen Korrekturfaktor dar, der den Abstand zwischen der beweglichen und der festen Platte berücksichtigt und von Spiwak (*330*) berechnet wurde. Bezeichnet man mit b die Plattenbreite und mit d deren Abstand, so wird γ für:

d/b	0,1	0,2	0,4	0,6	1,0	2,0
γ	0,889	0,787	0,624	0,467	0,280	0,101

Gaede (*116*) hat auf Grund dieses Prinzips ein Gerät gebaut, das von ihm *Molvakuummeter* genannt wurde. Es besitzt innerhalb eines zylindrischen Glasgefäßes ein sehr leichtes Plattenpaar, das an einem dünnen Quarzfaden aufgehängt ist. Zwei gegenüberliegende Stellen der Glaswand sind beheizbar, um den Radiometereffekt hervorbringen zu können. Dasselbe Instrument ist bei höheren Drucken außerdem als Reibungsvakuummeter verwendbar.

Unter Verzicht auf den absoluten Charakter des Knudsenschen Vakuummeters wurde von Riegger (*293*) ein Instrument angegeben, bei dem ein kreisförmiges Platin-Heizband von 7 mm Breite einer an einem dünnen Wolframdraht aufgehängten, geschlitzten Aluminiumscheibe gegenüber steht. Die Aluminiumscheibe mit ihren um 45° gegen die Drehachse geneigten kleinen Flügeln wird bei geheiztem Band durch den Radiometereffekt verdreht.

Die Größenordnung der mit allen Instrumenten dieser Art zu messenden geringsten Drucke beträgt 10^{-7} Torr.

7,25 *Ionisationsvakuummeter*

Wurde bisher das Verhalten der Gasmoleküle im ungeladenen Zustand für die Messung niedriger Drucke herangezogen, so sollen jetzt noch jene Methoden erwähnt werden, bei denen die elektrisch geladenen oder angeregten Gasmolekeln Rückschlüsse über die Güte des Vakuums erlauben. Eine qualitative Methode, aus den bei Stromdurchgang durch Gase sich zeigenden Leuchterscheinungen auf den Gasdruck zu schließen, wird mit Vorteil bei der Suche nach einer undichten Stelle einer Vakuumapparatur und bei groben Messungen angewendet. Im allgemeinen hören Leuchterscheinungen bei 10^{-2} Torr auf. Eine Möglichkeit, den Meßbereich zu erweitern, besteht darin, die Laufzeit der Elektronen bzw. Ionen zwischen Anode und Kathode einer Entladungsröhre, d. h. die Stoß- und Ionisierungswahrscheinlichkeit so stark zu vergrößern, daß auch bei niedrigeren Gasdrucken ein noch nachweisbarer Entladungs-

strom bei niedriger Zündspannung fließt. Ein solches Instrument, bei dem durch einen kräftigen Permanentmagneten die Ladungsträger in kreisförmige Bahnen gezwungen werden, wurde von PENNING (*153, 269, 270*) angegeben und ist bis 10^{-5} Torr brauchbar.

Wie in Abb. 84 angedeutet ist, befinden sich im Gefäß G die beiden plattenförmigen Kathoden K und eine ringförmige Anode A im magnetischen Feld des Permanentmagneten NS. Dadurch erhöht sich die Ionisationswahrscheinlichkeit so sehr, daß auch sehr kleine Totaldrucke noch leicht nachgewiesen werden können (*40*).

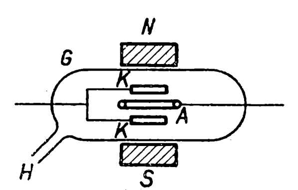


Abb. 84 Philips-Ionisationsvakuummeter.

Wesentlich genauere und bis zu sehr hohen Vakua reichende Messungen lassen sich durch Verwendung von Glühkathoden erzielen. Als Entladungsraum dient eine gewöhnliche Elektronenröhre (mit Wolframfaden) mit drei Elektroden, deren Glasgefäß mit dem eigentlichen Meßraum verbunden ist. Wird nun, wie in der Abb. 85 angedeutet ist, das Gitter G der Röhre schwach negativ, die Anode A stark positiv aufgeladen so stellt sich neben dem normalen Anodenstrom I_a bei nicht vollkommenem Vakuum ein Gitterstrom I_g ein, dessen Stromrichtung entgegengesetzt dem der Elektronen ist, wie sie bei positivem oder schwach negativem Gitterpotential fließen. Diese Umkehr der Stromrichtung bei allmählich gesteigerter Gittervorspannung ist ein sicheres Zeichen dafür, daß Gasreste vorhanden sind, die durch die zur Anode fliegenden Elektronen ionisiert werden.

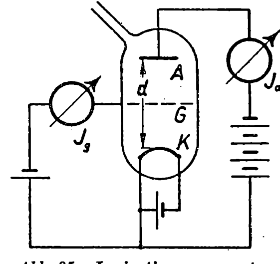


Abb. 85 Ionisationsmanometer

Für eine angenäherte Abschätzung des Verhältnisses von Gitter- zu Anodenstrom betrachten wir n_e Elektronen, die pro Sekunde den Entladungsraum durchqueren. Ist ihre mittlere Geschwindigkeit v und die mittlere freie Weglänge λ, so ist die Gesamtzahl der Stöße pro Sekunde

$$\nu = n_e \frac{v}{\lambda}.$$

Ist nun $W_i\,(v)$ die Ionisationswahrscheinlichkeit je Stoß, so entstehen in der Sekunde

$$n_i = n_e \frac{v}{\lambda} W_i\,(v)$$

Ionen. Mit $\lambda = \lambda_0 \frac{p}{p_0}$ und $W_i\,(v) = \lambda_0\, a\, (U - U$ und der bekannten Energiebeziehung für die Elektronengeschwindigkeit $v = (2\, e\, U/m)^{1/2}$ (e und m bezeichnen Ladung und Masse des Elektrons) erhält man schließlich, wenn man die Ionisierungsspannung des Gases U_i gegen die Anodenspannung U vernachlässigt, die gesuchte Beziehung:

$$\frac{n_i}{n_e} = p \left(2 \frac{e}{m}\right)^{1/2} U^{3/2} \cdot a = p \cdot \frac{1}{A} \tag{7/27}$$

aus der sich der gesuchte Druck p zu

$$p = A \frac{I_i}{I_a} \tag{7/28}$$

berechnet. a stellt eine von der Gasart abhängige Konstante dar, in der Größe A ist außerdem noch die Anodenspannung U enthalten. I_i ist der im Gitterkreis der Röhre gemessene Ionenstrom, I_a der Anodenstrom. Es wird also eine Druckproportionalität des Verhältnisses der beiden Ströme gefunden, ein Ergebnis, das durch die Untersuchungen von SIMON (*324*) und DUSHMAN und FOUND (*73*) sehr gut experimentell bestätigt wurde. In Abb. 86 sind die Meßergebnisse für eine Reihe von Gasen für eine bestimmte Röhrentype graphisch dargestellt. Die mit A bezeichneten Geraden beziehen sich auf die in Abb. 85 dargestellte Schaltung, mit B bezeichnete Meßergebnisse sind mit einer Anordnung gemessen worden, bei der die Funktionen von Anode und Gitter vertauscht waren.

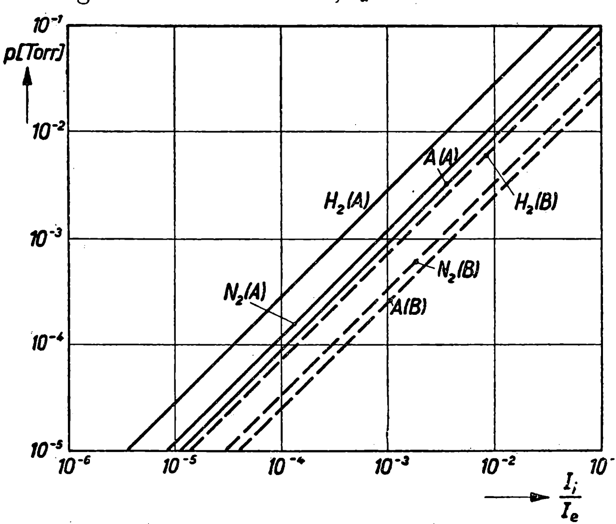


Abb. 86 Eichkurven des Ionisationsmanometers für verschiedene Gase

Einen ähnlichen Zusammenhang wie in Gleichung (7/27) erhält man auch, wenn man die Raumladung und die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen in der Röhre berücksichtigt. Nach BARKHAUSEN (*10*) läßt sich der Gasdruck im Vakuummeter in grober Annäherung wie folgt abschätzen: $I_i/I_a = 10^{-3}$ bedeutet nichts anderes, als daß im Mittel jedes tausendste Elektron ein Gasmolekül ionisiert. Es ist also die im Gasraum vom Elektron durchlaufene Strecke von der Kathode zur Anode der tausendste Teil der freien Weglänge der Elektronen in dem Gas. Da diese bei Normaldruck etwa 10^{-5} cm beträgt und umgekehrt proportional dem Druck ist, herrscht in diesem Beispiel im Gasraum der Druck:

$$p = 10^{-5} \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{d} = 10^{-8} \cdot 760 \cdot \frac{1}{d}\,\text{Torr},$$

wenn d die wirklich durchlaufene Strecke ist. Mit der freien Weglänge λ_0 der Elektronen bei 1 Torr gilt dann allgemein:

$$p = \lambda_0 \frac{I_i}{I_a \cdot d}\,\text{Torr}. \tag{7/29}$$

Um sehr kleine Drucke feststellen zu können, sind zur Messung des Ionenstromes am Gitter sehr empfindliche Spiegelgalvanometer oder elektronische Geräte (*268*, *285*) notwendig. Diesen Nachteil umgeht eine von TEICHMANN (*348*) angegebene Methode, die schematisch in der Abb. 87 dargestellt ist. Die Dreielektrodenröhre E wird mit

der Gitterspannung U_g und der Anodenspannung U_a betrieben. Der im Anodenkreis fließende Strom I_a wird mit Hilfe der Spannungsquelle U_k und des veränderlichen Widerstandes R_k auf Null kompensiert, wobei der Umschalter S direkt mit dem Röhrengitter verbunden ist. Ist in der Röhre eine Restgasatmosphäre vorhanden, so fließt über das Gitter ein durch Ionisation erzeugter Strom I_i. Legt man den Schalter S an einen hohen Gitterwiderstand R_g, so entsteht in diesem der Spannungsabfall $I_i \cdot R_g$, der die Gittervorspannung U_g um diesen Betrag erniedrigt und einen um ΔI_a vergrößerten Anodenstrom zur Folge hat. Zwischen dem Druck p und den Röhrendaten ergibt sich folgende einfache Beziehung:

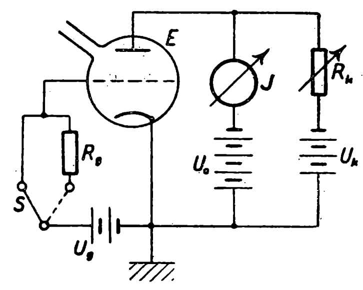


Abb. 87. Ionisationsmanometer nach TEICHMANN

$$p = \frac{A}{S\,R_g}\,\frac{\Delta I_a}{I_a}, \tag{7/30}$$

worin A eine Konstante und S die Röhrensteilheit bedeutet. Durch passende Wahl des Gitterwiderstandes R_g läßt sich mit dem relativ unempfindlichen Strommeßgerät J ein Druck von 10^{-7} Torr bequem feststellen. Ebenso wäre die Verwendung einer Röhre mit veränderlicher Steilheit (Regelröhre) denkbar, deren Spannungsverstärkung von der Lage des Arbeitspunktes, d. h. von der Größe des Ionenstromes abhängt.

Der Vorteil dieser Methode besteht darin, daß die schwachen Gitterströme nur bis zum Gitterwiderstand R_g unbeeinflußt zu fließen und daher nicht gesondert abgeschirmt zu werden brauchen.

BLEARS (*32*) weist darauf hin, daß bei Druckmessungen an Öldiffusionspumpen mittels Ionisationsmanometer das Zuleitungsrohr genügend weit sein muß, um Meßfehler durch die schweren Moleküle zu vermeiden.

Da der Ionenstrom I_i mit Vergrößerung des Stoßraumes nach Gleichung (7/29) zunimmt, kann man nach HUNTON und ELLITT (*178*) zur Erweiterung des Meßbereiches ein homogenes Magnetfeld in Richtung des Heizfadens anlegen. Nach diesem Verfahren sollen noch 10^{-10} Torr feststellbar sein.

Die Ionisationsmanometer haben den Vorteil, daß nur geringe Metallmengen zu ihrem Aufbau benötigt werden, die leicht im Vakuum auszuheizen sind. Die Eichung des Vakuummeters, die mit einem MCLEOD mit eingeschalteter Ausfriertasche für jedes Gas gesondert erfolgen muß, ist nach Einlaß von Gas und erneutem Auspumpen zu wiederholen, da sich die Emission des Heizfadens durch Gasbeladung ändert

7,26 *Alphatron* (*69*)

Die grundsätzliche Wirkungsweise dieses Ionisationsmanometers besteht darin, daß die von einem α-Strahler ausgehende Korpuskularstrahlung in einem abgeschlossenen, den zu messenden Druck enthaltenden Raum in der Sekunde eine dem Druck proportionale Ionenzahl erzeugt. Durch eine an eine Sammelelektrode gelegte Saugspannung bis zu 100 V wird zwischen dieser und dem Meßgerät ein Strom hervorgerufen, der außer von der Aktivität des radioaktiven Präparates vom Druck abhängt. Da der Ionenstrom pro 10^{-6} g Ra und 10^{-3} Torr nur etwa 10^{-15} A beträgt, muß dieser durch eine Elektrometerröhre weiter verstärkt werden. Der Verstärker muß dabei in dem

ganzen in Frage kommenden Spannungsbereich linear arbeiten. Für verschiedene Gase ergeben sich als Eichkurven Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt mit verschiedener Neigung. Geräte mit 10^{-4} g Ra lassen sich zwischen 10^{-3} und 10 Torr verwenden.

7,3 **Erzeugung hoher Drucke** (*48*)

Unter hohen Drucken werden Drucke von mehr als 100 kg/cm² verstanden, im engeren Sinne erstreckt sich der Bereich von etwa 500 bis 100000 kg/cm². An dieser Stelle sollen nur die physikalischen Methoden der Erzeugung und Messung hoher Drucke erwähnt, die technischen Mittel (Höchstdruckkompressoren) außer acht gelassen werden.

7,31 *Definitionen*

Da als Definition des Druckes das Verhältnis von Kraft durch Fläche festgelegt ist, ergibt sich als physikalische Einheit entweder

$$\text{dyn/cm}^2 = 1 \text{ Mikrobar} = 10^4 \text{ dyn/m}^2$$

oder, wenn man das kg als Einheit der Kraft betrachtet,

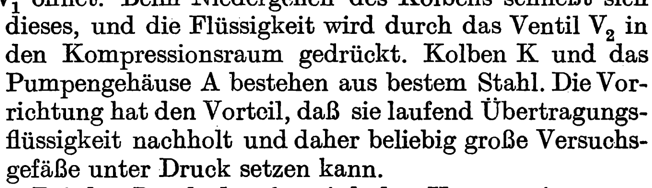
$$\text{kg/cm}^2 = \text{techn. Atmosphäre} = 1 \text{ at.}$$

Zur Druckmessung werden die nach dem Prinzip der kommunizierenden Röhren arbeitenden Flüssigkeitsmanometer ebenfalls verwendet, für die man im Falle des Quecksilbers als Füllflüssigkeit die Druckeinheit 1 Torr = 1 mm Hg-Säule gewählt hat. Es gelten folgende Beziehungen:

$$1 \; Bar = 1{,}01972 \; kg/cm^2 = 750{,}06 \; Torr = 1 \; at$$
$$760 \; Torr = 1 \; Atm. \; (physik. \; Atmosphäre).$$

7,32 *Ventilpresse*

Cailletet hat eine *Druckpumpe* für hohe Flüssigkeitsdrucke konstruiert, mit der Drucke bis zu 2000 at, in Extremfällen bis zu 5000 at erzeugt werden können. Ein gut eingeschliffener Kolben K (Abb. 88), der durch den Hebel H bewegt werden kann, saugt beim Aufwärtsgang aus dem Vorratsgefäß B Quecksilber oder Öl an, wobei sich das Ansaugventil V_1 öffnet. Beim Niedergehen des Kolbens schließt sich



dieses, und die Flüssigkeit wird durch das Ventil V_2 in den Kompressionsraum gedrückt. Kolben K und das Pumpengehäuse A bestehen aus bestem Stahl. Die Vorrichtung hat den Vorteil, daß sie laufend Übertragungsflüssigkeit nachholt und daher beliebig große Versuchsgefäße unter Druck setzen kann.

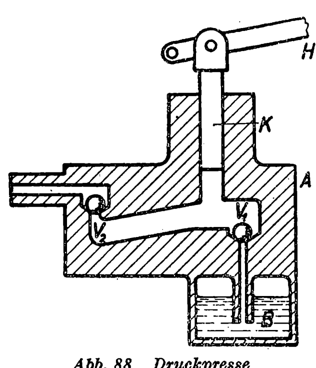


Abb. 88 Druckpresse

Bei der *Druckschraube* wird der Kompressionsraum durch einen sorgfältig abgedichteten Kolben verkleinert, der durch eine Schraubenspindel bewegt wird. In diesem Falle ist das Nachholen der Flüssigkeit nicht ohne weiteres möglich. In vielen Fällen ist die Druckschraube mit der Druckpumpe zusammengebaut und dient zum genauen Einstellen vorgegebener Drucke.

7,33 *Hydraulische Presse*

Statt der Druckschraube kann man, besonders über 3000 kg/cm², das hydraulische Prinzip anwenden. Eine von EBERT (*76*) angegebene Konstruktion ist in der Abb. 89 schematisch dargestellt und kann für Drucke bis zu 15000 at verwendet werden. Die Pumpe enthält in dem Stahlgehäuse A einen Doppelkolben, dessen Hochdruckteil K_2 mit dem an den Stutzen R_3 angeschlossenen Hochdruckraum in Verbindung steht. Durch eine an dem Stutzen R_2 angeschlossene CAILLETET-Pumpe wird zunächst im Versuchsgefäß ein bestimmter Vordruck eingestellt. Nun verbindet man den Stutzen R_1 mit der Hochdruckpumpe, wodurch der Doppelkolben in den Hochdruckraum gepreßt wird und erst bei einem Druck zum Stillstand kommt, der dem Übersetzungsverhältnis der beiden Kolbenflächen, multipliziert mit dem auf den Niederdruckkolben K_1 wirkenden Druck entspricht. Durch das Hochdruckventil V ist der Kompressionsraum von der Pumpe abzuschalten. Zur Druckmessung dient das Widerstandsmanometer W (§ 7,44)

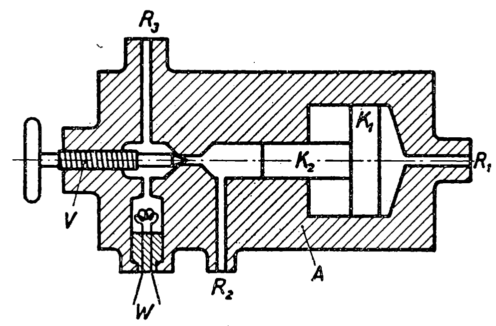


Abb. 89 Hydraulische Presse

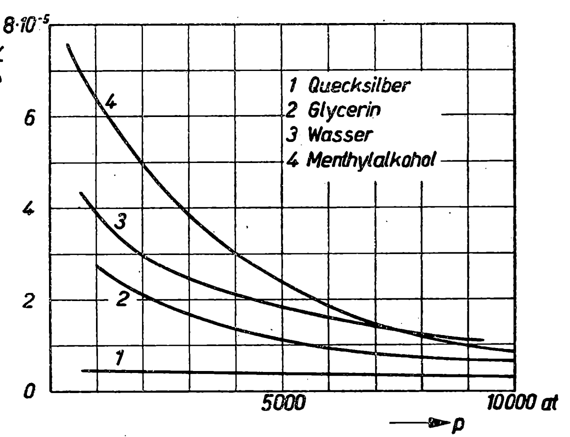


Abb. 90 Kompressibilität von Flüssigkeiten

Dieses Prinzip bietet die größten Aussichten, höchste Drucke zu erzeugen, wenn man für das Material, aus dem die Presse besteht, eine sehr hohe Festigkeit und geringe elastische Dehnung voraussetzt. Ferner dürfen sich nirgends Gasblasen festsetzen. Jede dieser Blasen verhindert infolge ihrer großen Kompressibilität, daß höchste Drucke erreicht werden. Zum andern muß je nach der Höhe des gewünschten Druckes eine Übertragungsflüssigkeit gewählt werden, die noch gut flüssig bleibt, wohl aber mit steigendem Druck an Zähigkeit zunimmt, um die Abdichtung der Kolben zu erleichtern. Ferner ist zu fordern, daß die Kompressibilität der Flüssigkeit gering ist. Wie für einige Flüssigkeiten in Abb. 90 gezeigt, nimmt die Kompressibilität mit dem Druck stark ab. Durch einen möglichst hohen Vordruck kann man die zum Erreichen eines bestimmten Druckes erforderliche Kompressionsarbeit bedeutend verringern.

7,34 *Höchste Drucke bis zu 100000 at*

In dem Bestreben, den Druckbereich wesentlich zu erweitern, wurden in neuerer Zeit große Fortschritte erzielt (*49, 50*), die vor allem auf der Verwendung eines geeigneten Materials für Kolben und Druckzylinder und auf besonderen Konstruktionsprinzipien beruhen. Für die Kolben der Druckpresse wird nunmehr *Carboloy* verwendet, eine Stahlsorte mit etwa 70000 kg/cm² Druckfestigkeit und einer Dehnung von einigen Prozent; der Elastizitätsmodul ist um den Faktor 3 größer als bei gewöhnlichen Stahlsorten.

Auch bei Verwendung von Carboloy würde mit gewöhnlichen Druckpressen die obere Druckgrenze bald erreicht werden, da an der Kolbeninnenwand durch die plastische Deformation des Materials das Kolbenspiel zu groß wird. Dem kann man dadurch vorbeugen, daß man die Kolbenaußenwand unter hohen Druck (bis zu 20—30000 at) setzt, wodurch an der Kolbeninnenfläche im unbelasteten Zustand hohe Druckspannungen auftreten. Eine zweite Möglichkeit wird von Bridgman angegeben und ist in Abb. 91 schematisch dargestellt. Der Druckzylinder Z ist außen konisch abgedreht und sitzt in einem genau passenden Preßteil P aus bestem Stahl. Wird nun auf den Kolben K der Kompressionsdruck ausgeübt, so wird zugleich der Zylinder Z in die schwach kegelige Bohrung des unten gelagerten Preßteils P gepreßt und damit ein Aufweiten des Kolbens verhindert. Mit dieser Anordnung sind bei 6 mm Kolbendurchmesser Drucke bis zu 50000 kg/cm² erreicht worden.

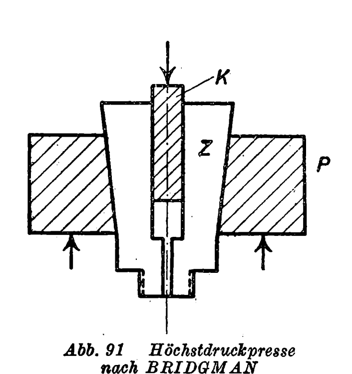


Abb. 91 Höchstdruckpresse nach BRIDGMAN

Auch durch Kühlen mit flüssiger Luft oder Wasserstoff lassen sich die Festigkeitseigenschaften von Kolben und Zylinder bei gleichzeitiger Verminderung der Dehnung verbessern.

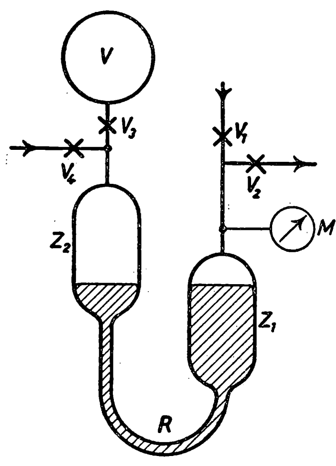


Abb. 92 Quecksilber-Hochdruckpumpe für Gase

7,35 *Quecksilber-Hochdruckpumpe*

Zum Komprimieren reiner Gase benutzt man Quecksilberpumpen, die periodisch durch Preßluft betätigt werden. Nach Holborn und Schultze (*173*) besteht die Pumpe (Abb. 92) aus zwei dickwandigen Stahlzylindern Z_1 und Z_2 von je einem Liter Inhalt, die durch das Druckrohr R verbunden sind. Die beiden Zylinder sind in der gezeichneten Weise mit Quecksilber gefüllt. Das durch Öffnen des Ventils V_4 von Z_2 angesaugte Gas wird bei geschlossenen V_2 und V_4 und offenen V_1 und V_3 durch die an V_1 angeschlossene Druckluftflasche in das Versuchsgefäß V gepreßt. Dieser Vorgang kann wiederholt werden, bis der vom Manometer M angezeigte Druck dem in V herrschenden Druck entspricht.

7,4 Messung hoher Drucke

7,41 *Flüssigkeitsmanometer* (*295*)

Für die Fundamentalmessung eines Druckes eignet sich nur das Flüssigkeitsmanometer, bei dem der durch den Druck auf eine Fläche wirkenden Kraft durch das Gewicht der Flüssigkeitssäule das Gleichgewicht gehalten wird. Bei hohen Drucken kommt als Manometerflüssigkeit nur Quecksilber in Frage. Für wissenschaftliche Zwecke sind Quecksilbermanometer bis zu 600 kg/cm² gebaut worden, deren Handhabung und Ablesung jedoch große Schwierigkeiten bereiten (Bestimmung der mittleren Temperatur der Hg-Säule). Als weitere Korrektion kommt der Einfluß der Kompressibilität des Quecksilbers hinzu, dessen Dichte, wie aus Abb. 90 zu ersehen ist, bei hohen Drucken merklich erhöht wird. Bezeichnet man mit $\varkappa$ die Kompressibilität ($\varkappa_{Hg} = 3{,}8 \cdot 10^{-6}$ cm²/kg), so beträgt das Korrekturglied $\Delta\, p = \varkappa\, p^2/2$.

Ein in der ehemaligen Phys.-Techn. Reichsanstalt aufgestelltes, durch mehrere Stockwerke reichendes Quecksilbermanometer ist in der Abb. 93 dargestellt. Der lange Schenkel S aus Stahlrohr besitzt sechs Abzweigungen L aus Glas, die einzeln ablesbar und abzuschalten sind. Q ist das Quecksilbervorratsgefäß. Das Manometer besitzt einen Meßbereich von 25 at.

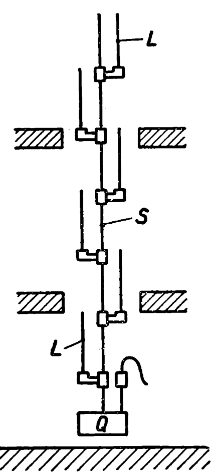


Abb. 93 Quecksilbermanometer bis 25 at

Weniger umständlich wird die Handhabung und Ablesung, wenn man die lange Quecksilbersäule in einzelne Teilstücke unterteilt, deren Drucke sich addieren. Das von THIESEN gebaute Normalmanometer besteht aus einer Reihe von starkwandigen Röhren aus Jenaer Verbundglas, die an beiden Enden in waagrecht liegende Stahlrohre eingelassen sind und miteinander kommunizieren. Die Röhren sind zur Hälfte mit Quecksilber und darüber mit Wasser gefüllt. Für größere Drucke als 50, allenfalls 100 at, werden diese Geräte unhandlich und für Fundamentalmessungen ungenau.

7,42 *Kolbenmanometer* (*197*, *356*)

Für sehr hohe Drucke sind bisher keine Meßverfahren bekannt, die als fundamental gelten können. Die für dieses Gebiet benutzten Druckmeßgeräte müssen daher an das Flüssigkeitsmanometer angeschlossen werden. Als zuverlässigstes Gerät für die Messung sehr hoher Drucke gilt das *Kolbenmanometer* (*Druckwaage*), das zuerst von ALTSCHUL und BUCHHOLZ 1883 und 1893 konstruiert worden ist. Das Prinzip der Druckwaage besteht darin, daß man den zu messenden Druck auf einen beweglichen Kolben bekannter Kolbenfläche wirken läßt und diesen durch aufgelegte Gewichte belastet, bis Gleichgewicht herrscht. Je nach der Anordnung der Belastungsgewichte in bezug auf den Kolben unterscheidet man oberschalige Kolbenmanometer, bei denen der Kolben selbst eine tellerartige Verbreiterung an seinem oberen Ende besitzt, und unterschalige Kolbenmanometer, bei denen die Gewichte an einem Gehänge senkrecht unter dem Kolben hängen und Kolbenmanometer, deren Kolben auf einen Hebelarm wirken (Druckwaagen).

Die Kolbenform ist zylindrisch und meistens für einen geraden Querschnitt (1 cm² oder 0,5 cm²) bemessen. Um einen für die Messung sehr hoher Drucke bestimmten Kolben nicht zu dünn machen zu müssen, bedient man sich vielfach des in der Abb. 94 dargestellten *Differentialkolbens*. Dieser besitzt zwei verschiedene Durchmesser d_1 und d_2 und daher als wirksame Druckfläche die Differenz der beiden Kolbenflächen. Nachteilig sind die zwei Dichtungsstellen. Mit diesem Kolben wird das Anbringen der Belastungsgewichte besonders einfach, da diese nur in der Verlängerung des unteren Kolbens zentrisch anzuhängen sind. Der Zylinder Z aus Stahl ist mit einem geeigneten Öl, wie Paraffin- oder Rizinusöl, gefüllt, wodurch gleichzeitig der Kolben K abgedichtet und der Druck übertragen wird. Um die Reibung des Kolbens möglichst klein zu halten und damit die Meßgenauigkeit zu steigern, läßt man den Kolben nebst Gewichten ständig rotieren. Dabei bildet sich zwischen Kolben und Zylinder ein Schmierfilm, der eine unmittelbare Berührung der Teile vermeidet. Für den mittleren Druckbereich ist der dadurch bedingte Ölaustritt unwesentlich. Für sehr hohe Drucke dagegen wird der Kolben am besten nach einem Vorschlag von Bridgman in der in der Abb. 95 angedeuteten Weise abgedichtet. Rings um die Kolbenführung wird in den Zylinder eine Hohlnut N gefräst. Der dünne, den Kolben K umfassende zylindrische Teil wird durch den hydrostatischen Druck an die Kolbenfläche gepreßt und ergibt eine ausgezeichnete Dichtung.

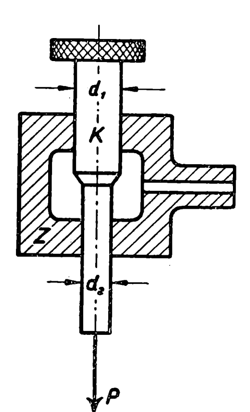


Abb 94. Differentialkolben

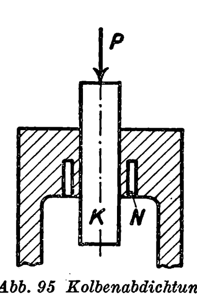


Abb. 95 Kolbenabdichtung nach BRIDGMAN

Die erreichbare Meßgenauigkeit hängt im wesentlichen von der genauen Kenntnis des *wirksamen* Kolbenquerschnittes ab. Dabei ist zu beachten, daß beim ungedichteten Kolben der wirksame Querschnitt das Mittel zwischen dem des Zylinders und des Kolbens ist, während beim gedichteten Kolben je nach dem Sitz der Dichtung entweder der Kolben- oder Zylinderdurchmesser einzusetzen ist. Jedoch genügen die im unbelasteten Zustand gemessenen Werte der Durchmesser nicht, um den wirksamen Querschnitt festzulegen, denn unter der Druckeinwirkung wird der Zylinder aufgeweitet bzw. der Kolben zusammengepreßt. W. Meissner (*239*) hat den Fall des gedichteten Kolbens durchgerechnet. Danach beträgt die spezifische Dehnung des Zylinderdurchmessers beim Druck p

$$\varepsilon_z = \frac{p}{E} \frac{(1+\mu)\, r_a^2 - (1-\mu)\, r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = \frac{p}{E} \cdot K\,, \tag{7/31}$$

wenn r_i und r_a der innere und äußere Halbmesser des Zylinders, E der Elastizitätsmodul und μ die Poissonzahl des Werkstoffes bedeuten. Die relative Flächenvergrößerung hat, da $\varepsilon_z \ll r_i$, den Betrag $2\,\varepsilon_z$. Die Korrektion k, die zur Anzeige p der Druckwaage hinzuzufügen ist, findet man zu:

$$k = -2\,\varepsilon_z \cdot p = -\frac{p^2}{E} K\,. \tag{7/32}$$

Ähnliche Berechnungen für die anderen Arten von Kolbendichtungen sind von Ebert (*77*) durchgeführt worden.

7,43 *Elastische Manometer* (*166*)

Für weniger genaue Messungen im Hochdruckbereich eignen sich auch *Röhrenfedermanometer* und solche, die als druckempfindlichen Teil eine kreisförmige, dünne Stahlplatte besitzen, deren Durchbiegung vergrößert angezeigt wird. Für hohe Drucke ist die Röhrenfeder (BOURDON-Rohr) von elliptischem Querschnitt so zu einem Halbkreis gebogen, daß die große Achse des Querschnitts auf einem Kreiszylinder liegt. Durch den hohen Innendruck wird der Röhrenquerschnitt verändert und das Federende etwas aufgebogen (*11*). Eine wiederholte Nacheichung mit einer Druckwaage ist erforderlich.

7,44 *Elektrisches Widerstandsmanometer* (*1*)

Da Kolbenmanometer aus technischen Gründen nur bis höchstens 5000 at verwendbar sind, erhebt sich die Frage nach einem genauen Druckmeßverfahren über diesen Bereich hinaus.

Das von BRIDGMAN (*43*) eingeführte elektrische Widerstandsmanometer erweist sich für physikalische Messungen als genaues Meßgerät bis zu den höchsten erreichbaren Drucken. Es beruht auf der Erscheinung, daß sich der elektrische Widerstand eines Drahtes infolge Verringerung von Länge und Querschnitt bei Druckeinwirkung in genau bekannter Weise ändert. Das Widerstandsmanometer besteht aus einer frei und bifilar gewickelten Spule aus dünnem Draht, die dem zu messenden Druck allseitig ausgesetzt ist. Innerhalb eines großen Druckbereiches ist dann der Widerstand eine lineare Funktion des Druckes. In dieser Beziehung ist auch die Abhängigkeit der spezifischen Leitfähigkeit des Drahtmaterials vom Druck enthalten.

Sind R_0 bzw. R der Widerstand beim Druck Null bzw. p und dementsprechend die Länge l_0 (l), der Querschnitt q_0 (q), der spezifische Widerstand ϱ_0 (ϱ) und α der Gesamtdruckkoeffizient, so gilt:

$$\begin{aligned} R_0 = R\,(1+\alpha\,p) = \varrho\,\frac{l}{q} &= \varrho_0\,(1+\alpha_1\,p)\,\frac{l_0\,(1-\alpha_2\,p)}{q_0\,(1-2\,\alpha_2\,p)} \\ &= R_0\,[1+(\alpha_1+\alpha_2)\,p]\,. \end{aligned} \tag{7/33}$$

Dabei ist α_1 der Druckkoeffizient des spezifischen Widerstandes, α_2 der Druckkoeffizient (Kompressibilität) des Materials für die Länge und dementsprechend $2\,\alpha_2$ der für den Querschnitt. Unter der Kompressibilität $\varkappa$, der isothermischen, kubischen Zusammendrückbarkeit eines festen Körpers bei allseitigem Druck p, versteht man die relative Volumenänderung $-\frac{\partial v}{v}$ für die Druckänderung dp, also

$$\varkappa_v = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T. \tag{7/34}$$

Beobachtet man nur die lineare Dimensionsänderung, so ist die dafür maßgebende lineare Zusammendrückbarkeit in entsprechender Weise gebildet:

$$\varkappa_l = -\frac{1}{l}\left(\frac{\partial l}{\partial p}\right)_T. \tag{7/35}$$

Sind die linearen Kompressibilitäten in den einzelnen Kristallachsen bekannt, so kann daraus die kubische Zusammendrückbarkeit berechnet werden. Für das kubische Gitter gilt: $\varkappa = 3\,\alpha_l$; für das hexagonale: $\varkappa = 2\,\varkappa_{l\perp} + \varkappa_{l\,\parallel}$, wenn $\varkappa_{l\,\parallel}$ die lineare Zu-

sammendrückbarkeit in Richtung der Hauptachse und $\varkappa_{l\perp}$ diese senkrecht dazu bedeutet. Für homogenes Material ist Gleichung (7/33) ohne weiteres anwendbar, für Einkristalle ist α_2 gesondert zu bestimmen. Für sehr viele Substanzen ist α negativ und von der Größenordnung 10^{-6} cm²/kg. Da der Effekt also außerordentlich klein ist und der Temperaturkoeffizient diesen bei den meisten Widerstandsmaterialien um Größenordnungen übertrifft, können für Widerstandsmanometer nur Leiter mit extrem kleinem Temperaturkoeffizienten verwendet werden. *Manganin*, bei dem α allerdings positiv ist und zwischen 2,3 und $2{,}6 \cdot 10^{-6}$ beträgt, eignet sich wegen seines außerordentlich kleinen Temperaturkoeffizienten besonders gut zur Druckmessung. Es werden daher fast ausschließlich Manganin-Manometer bis zu Drucken von 20000 at verwendet. Dabei ist zu beachten, daß der Manganindraht eine möglichst gleichmäßige Gefügestruktur besitzt, da sonst Strukturänderungen und damit Nullpunktsschwankungen auftreten. Durch Tempern bei 300 bis 400° C erhält man geeignete Drähte; bei emailliertem Draht erübrigt sich diese Nachbehandlung (*318*).

Nach Einbau des Widerstandselementes altert man dieses durch längere Einwirkung eines Druckes, der etwas größer sein soll als der maximal zu messende. Die zu messenden, äußerst geringen Widerstandsänderungen werden durch empfindliche Kompensationsmethoden (Bd. III) festgestellt.

In Abb. 96 ist der Druckkoeffizient für eine Anzahl Legierungen nach Messungen von Ebert und Gielessen (*78*) dargestellt. Bridgman (*47*) benutzte einen Draht von 0,12 mm Durchmesser, zweifach mit Seide umsponnen und bifilar in Form eines Toroids von etwa 100 Ω Widerstand gewickelt.

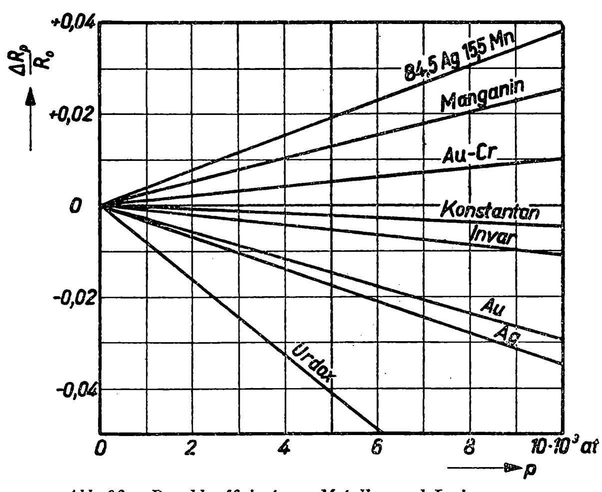


Abb. 96 Druckkoeffizient von Metallen und Legierungen

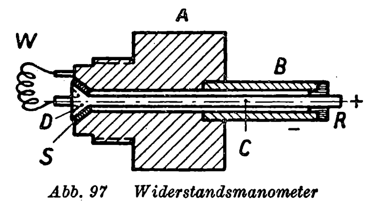


Abb. 97 Widerstandsmanometer

Der Widerstand steigt linear mit dem Druck um 2,3% für 10^5 kg/cm². Unter gewöhnlichen Bedingungen ist bei Manganin eine Temperaturkontrolle unnötig. Da die Druckkoeffizienten verschiedener Drahtsorten voneinander abweichen, ist für jedes Einbauelement eine besondere Eichung erforderlich. Das kann mit Hilfe eines einzigen Druckfixpunktes geschehen. Von Bridgman sind folgende *Druckfixpunkte* vorgeschlagen worden:

Erstarrungspunkt von Quecksilber bei	0° C	7640 at
	30° C	13715 at
Übergang I → II-Wismut bei	30° C	25420 at
	75° C	23350 at.

Die druckdichte und elektrisch einwandfreie Durchführung der Elektroden des Widerstandes W kann nach Abb. 97 geschehen. Das zylindrische Anschlußstück A aus Stahl besitzt an dem im Hochdruckraum befindlichen Ende eine kegelige Ausbohrung, die durch eine dünne Turbaxschicht S isolierend ausgekleidet ist. Die Inennelektrode C trägt am gleichen Ende das kegelige Gegenstück D, das etwas ausgedreht ist, wodurch die Druckübertragung auf S fast in Normalrichtung erfolgt. Die isolierte Innenelektrode wird lediglich durch die Isolationsstücke S und R im Außenrohr B gehalten.

In Tabelle VIII sind für einige Stoffe Druck- und Temperaturkoeffizent gegenübergestellt.

	cm^2/kg	$1/°C$
Urdox	$\alpha = -8{,}20 \cdot 10^{-6}$	$\gamma = 5 \cdot 10^{-5}$
Silber	— 3,5	410
Gold	— 2,9	390
Manganin	+ 2,55	1,5
Invar	— 1,15	85
Gold-Chrom	+ 1,0	4,05
Konstantan	— 0,45	5,0

Tabelle VIII

7,5 Messung der Kompressibilität (*51*)

Nach § 7,44 läßt sich die Kompressibilität fester Körper aus der linearen Kompression in den einzelnen Kristallachsen unschwer berechnen, wenn das Kristallsystem bekannt ist. Zur Messung der Kompressibilität bringt man den zu untersuchenden Körper in den Hochdruckraum (*Piezometer*) und mißt die relative Längenänderung gegenüber dem Druckgefäß. Die hierfür erforderliche Messung sehr kleiner Längenänderungen läßt sich nach den Angaben in § 2,5 durchführen. Durch besonders ausgebildete Verfahren kann jedoch auch die absolute Kompressibilität bestimmt werden, wie z. B. mit dem von Ebert (*76*) angegebenen Piezometer, das in Abb. 98 dargestellt ist. Es besteht aus dem starkwandigen Stahlzylinder A, dessen Bohrung die zu untersuchende Probe P in Stabform aufnimmt. Die beiden Verschlußstücke B

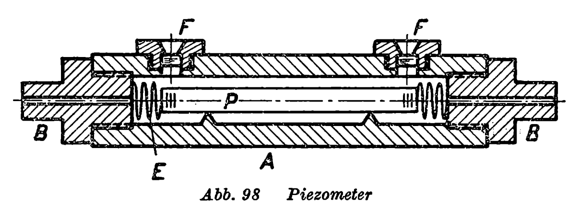


Abb. 98 Piezometer

dienen zur Druckzuleitung und zum Einbringen der Probe. Unter der Teilmaschine werden an den Enden des Versuchsstabes einige Meßstriche eingeritzt. Zur Beobachtung der Längenänderung unter Druck sind zwei Fenster F senkrecht zur Rohrachse angeordnet, die aus mehreren Einzelscheibchen aus Glas bestehen und ohne Dichtungsmittel in die Stahltülle eingeschliffen sind. Das Piezometer wird mit klarem, gut durchsichtigem Öl oder Petroleum gefüllt. Die Längenänderung wird mit Hilfe von zwei feststehenden Mikroskopen mit Okularmikrometer festgestellt und daraus die Kompressibilität berechnet. Durch Federn E wird die Probe gegen Verschieben gesichert.

§ 8 MESSUNG DER GESCHWINDIGKEIT

8,1 Messung der Bahngeschwindigkeit

8,11 *Grundsätzliches*

Die Geschwindigkeit eines materiellen Teilchens wird durch die erste Ableitung des zurückgelegten Weges s nach der Zeit t dargestellt, ist also ds/dt. Sie wird vorzugsweise auf eine Wegmessung zurückgeführt, aus der durch Differentiation nach der Zeit Augenblickswerte, nach Division durch die Beobachtungszeit Mittelwerte der Geschwindigkeit gewonnen werden. Je nach der Größe und Art des bewegten Teilchens lassen sich für die Weg- und Zeitmessung die in den §§ 2 und 3 angegebenen Meßverfahren anwenden und kombinieren. Die Zeitdifferenz kann bei größeren Meßzeiten durch Aufzeichnen einer Normalfrequenz auf einen Registrierstreifen zugleich mit der Wegmessung und Markierung der Endpunkte gemessen werden. Die bei großen Geschwindigkeiten zu messenden sehr kleinen Zeitdifferenzen lassen sich mit großer Genauigkeit mit Hilfe der in § 3,6 beschriebenen Methoden bestimmen.

8,12 *Doppler-Effekt*

Sendet ein bewegter Körper während seiner Bewegung eine irgendwie wahrnehmbare Schwingung (akustische, elektrische, optische) konstanter Frequenz aus, so läßt sich seine Geschwindigkeit, sofern sie nicht sehr klein gegen die Ausbreitungsgeschwindigkeit der ausgesandten Schwingung ist, mit Hilfe des Doppler-Effektes bestimmen.

Das von Doppler im Jahre 1842 ausgesprochene Prinzip, das überall in der Physik der Wellenbewegungen von Bedeutung ist, besagt, daß sich die Schwingungszahl einer Wellenbewegung an einem Beobachtungsort eindeutig ändert, wenn sich dieser gegen den Entstehungsort der Welle relativ bewegt.

Es läßt sich leicht zeigen, daß für den Fall, wo sich ein Beobachter einer Schallquelle mit der Geschwindigkeit v nähert, dieser nicht die ausgestrahlte Frequenz ν_0 wahrnimmt, sondern eine von der Relativgeschwindigkeit abhängige Frequenz ν, die sich berechnet zu

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right), \tag{8/1}$$

wenn c die Schallgeschwindigkeit bzw. allgemein die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist. Bewegt sich der Beobachter von der Schallquelle fort, so nimmt er die niedrigere Frequenz $\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$ wahr. Für den anderen Fall, daß sich die Schallquelle mit der Geschwindigkeit v gegen den ruhend gedachten Beobachter bewegt, ergibt die Rechnung

$$\nu'' = \frac{\nu_0}{1 \mp \frac{v}{c}}, \tag{8/2}$$

wobei das Minuszeichen für die sich dem Beobachter nähernde Schallquelle gilt. Gleichung 8/2 berücksichtigt die Tatsache, daß sich im zweiten Fall das Medium, in

dem sich die Wellenbewegung fortpflanzt, nicht mit der Schwingungsquelle mitbewegt. Gleichung (8/2) geht für $\frac{v}{c} \ll 1$ in Gleichung (8/1) über, wie man aus der Reihenentwicklung von (8/2) ersieht:

$$\nu = \nu_0 \left(1 \mp \frac{v}{c}\right)^{-1} = \nu_0 \left(1 \pm \frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots\right).$$

Bewegt sich die Schallquelle nicht auf den Beobachter zu, sondern passiert diesen im Abstand p (siehe Abb. 99), so nimmt der Beobachter in B die Frequenz

$$\nu'' = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v}{c} \frac{x}{\sqrt{p^2 + x^2}}} \qquad (8/3)$$

Abb. 99 DOPPLER-Effekt

wahr, wenn x der Abstand des Fußpunktes 0 von der Quelle S ist. Die von B wahrgenommene Frequenz ist für ein Beispiel, abhängig von der dimensionslosen Größe x/p, graphisch in Abb. 100 aufgetragen. Ist ν_0'' die Frequenz für eine große Entfernung x, so ergibt sich aus (8/2) die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Schallquelle zu

$$v = c \left(1 - \frac{\nu_0''}{\nu}\right). \qquad (8/2\,\mathrm{a})$$

Kennt man also ν oder mißt sie bei $x = 0$, so kann man durch Messung von ν_0'' die Geschwindigkeit v bestimmen.

Besonders in zwei Fällen hat der DOPPLER-Effekt weitgehende Anwendung in der physikalischen Meßmethodik gefunden. In der Astrophysik stellt er die einzige Möglichkeit dar, aus der Verschiebung bekannter Linien im Emissionsspektrum der Sterne deren Relativgeschwindigkeit zur Erde zu bestimmen. So entspricht z. B. an der Linie F, deren Wellenlänge 4861 Å (1 Ångström = 10^{-8} cm) beträgt, eine Verschiebung von 1,0 Å, die man in einem guten Spektrographen unschwer nachweisen kann, einer Geschwindigkeit von 62 km/s.

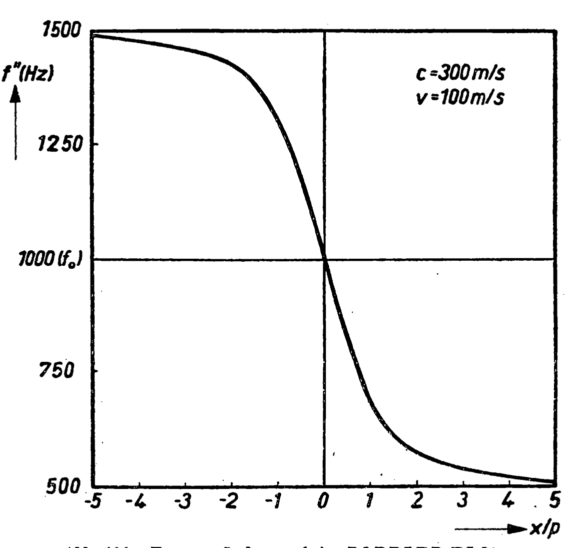


Abb. 100 Frequenzänderung beim DOPPLER-Effekt

Die zweite Anwendung bezieht sich ebenfalls auf die Änderung der Wellenlänge λ eines angeregten Atoms bzw. Ions: J. STARK hat 1905 eine DOPPLER-Verschiebung im Spektrum der Kanalstrahlen gefunden, deren Messung die Bestimmung der Geschwin-

digkeit der Kanalstrahlen erlaubt. In diesem Fall sind die Verschiebungen so beträchtlich, daß sie mit einem einfachen Prismenspektrographen zu erfassen sind, da die Geschwindigkeit der strahlenden Ionen 10^7 bis einige 10^8 cm/s beträgt. Die Verschiebung einer Emissionslinie

$$\varDelta \lambda = \lambda \frac{v}{c} \tag{8/4}$$

würde für die F-Linie dann 2 bis 50 Å betragen.

8,13 *Geschwindigkeitsmessung durch Integration der Beschleunigung*

In gewissen Fällen ist eine unmittelbare Messung der Geschwindigkeit nicht möglich oder zu umständlich, weshalb man oft einfacher die Geschwindigkeit entsprechend der Definition der Beschleunigung $b = dv/dt$ durch Integration der Beschleunigung gewinnt. Es gilt dann

$$v = \int_{t_1}^{t_2} b\, dt + C, \tag{8/5}$$

wobei die Integrationskonstante C aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen ist; sie wird Null, wenn für $t = 0$ die Geschwindigkeit Null war. Die Beschleunigung läßt sich nach dem dynamischen Grundgesetz als Kraft auf die der beschleunigten Bewegung ausgesetzte Masse experimentell genau und einfach messen, worüber in § 9 ausführlich gesprochen wird. Je nach Art des „Beschleunigungsmessers" erhält man als Maß für die zu messende Beschleunigung einen geometrischen Ausschlag oder eine elektrische Größe, wie Strom oder Spannung, die der Beschleunigung b proportional sind. Im ersten Fall gewinnt man v durch Planimetrieren unter Beachtung der Anfangsbedingungen. Ist b durch elektrische Größen gegeben, z. B. durch den Strom i, so läßt sich die Integration nach Gleichung (8/5) auf elektrischem Wege durchführen, indem man z.B. einen Kondensator der Kapazität C durch einen veränderlichen, der Beschleunigung proportionalen Strom auflädt. Die am Kondensator gemessene Spannung U

$$U = \frac{1}{C} \int i\, dt + \text{const.} \tag{8/6}$$

ist dann, wie ein Vergleich mit Gleichung (8/5) zeigt, der Geschwindigkeit proportional. Eine andere, nur auf geringe Beschleunigungen anwendbare Methode besteht darin, den Strom einem Amperestunden-Zähler zuzuführen, dessen Umdrehungszahl ebenfalls dem zeitlichen Integral entspricht.

Auch die umgekehrte Operation, durch Differentiation des Weges die Geschwindigkeit zu erhalten, ist auf elektrischem Wege durchführbar. Verbindet man das Objekt, dessen Geschwindigkeit gesucht ist, mit einer Tauchspule, die sich im Ringspalt eines Permanentmagneten bewegen kann, so ist nach dem Induktionsgesetz die elektrische Spannung an den Spulenenden der Geschwindigkeit proportional.

8,2 Drehzahl-Messung

8,21 *Konstante Winkelgeschwindigkeit*

Bei konstanter Umdrehungszahl bzw. um eine mittlere Winkelgeschwindigkeit zu erhalten, genügt es, die Zahl von Umdrehungen innerhalb einer gemessenen Zeit-

differenz zu bestimmen. Dazu sind die sog. *Stichzähler* eingerichtet, die aus einem mechanischen Zählwerk bestehen, und entweder von Hand oder elektromagnetisch ein- und ausgeschaltet werden können.

Ist eine solche Messung aus räumlichen Gründen nicht möglich, soll also eine Fernmessung durchgeführt werden, so bringt man einen Umlaufkontakt oder besser eine den Kontakt schließende Nockenscheibe an der drehenden Welle an und bekommt ein periodisches Schließen oder Öffnen eines Stromkreises. Ist diese Vorrichtung aus mechanischen Gründen oder bei zu großen Winkelgeschwindigkeiten nicht anzubringen, kann man auch einen Lichtstrahl durch eine auf der Welle befestigte Blende oder durch eine radiale Bohrung periodisch unterbrechen oder durch eine Photozelle elektrische Impulse erzeugen. In beiden Fällen werden diese Impulse einem elektromagnetischen Zählwerk zugeführt, dessen angezeigte Impulszahl durch die Meßzeit dividiert die gesuchte Umdrehungszahl pro Zeiteinheit ergibt. Bei sehr großen Umdrehungszahlen, für die mechanische Zählwerke (auch bei elektrischer Betätigung) versagen, kann man die Kontaktwelle durch ein kleines Schneckenradgetriebe untersetzen. Die Genauigkeit dieses Verfahrens, das weder temperaturempfindlich ist noch auf das zu untersuchende System rückwirkt, kann beliebig gesteigert werden, wenn man die Meßzeit verlängert. Allerdings hat das nur bei genau konstanter Winkelgeschwindigkeit Sinn.

Für Präzisionsmessungen verwendet man zur Zählung ein Registrierverfahren, bei dem auf dem Registrierstreifen die Kontaktmarken und genaue Zeitmarken zum Beispiel von einer Sekundenuhr oder einer Quarzuhr aufgezeichnet werden.

8,22 *Drehzahlmesser* (*Tachometer*)

Die mechanischen Drehzahlmeßgeräte beruhen auf der Fliehkraftwirkung rotierender Massen. Wird eine Masse m mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Abstand r von der Drehachse herumgeführt, so wirkt die Fliehkraft $F = m\,\omega^2\,r$. Dieser Kraft kann man durch eine entsprechende Gegenkraft (Schwerkraft beim Fliehkraftpendel, Federkraft beim gewöhnlichen Tachometer) das Gleichgewicht halten und die Federdehnung bzw. Biegung als Meßgröße benutzen.

Bei Messungen an Geräten mit senkrechter Achse (Zentrifugen) wird oft das sehr genaue und einfache *Flüssigkeitstachometer* angewandt. Die Oberfläche einer Flüssigkeit nimmt im Gleichgewichtsfall bei konstanter Winkelgeschwindigkeit und Drehung um die Achse des zylindrischen Gefäßes die Gestalt eines Rotationsparaboloids an, dessen Scheitel um so tiefer sinkt, je größer die Winkelgeschwindigkeit ist. In Abb. 101 ist das um die Achse 0 rotierende Gefäß dargestellt, das bis zur Höhe h mit Flüssigkeit, z. B. Glyzerin, gefüllt ist. r sei der Halbmesser des Gefäßes. Es läßt sich zeigen, daß zwischen dem Abstand $OS = s$, d. h. der Höhe des Scheitels S der Parabel über der Grundfläche, und der Winkelgeschwindigkeit folgende einfache Beziehung besteht:

$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{g\,(h - s)}, \qquad (8/7)$$

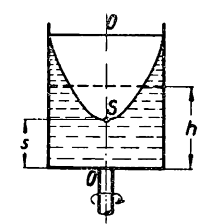


Abb. 101 Flüssigkeitstachometer

wenn g die Erdbeschleunigung ist. Nach GÖPEL ist die Meßgenauigkeit recht hoch (10^{-3}) und für physikalische Messungen ausreichend.

Für die Überwachung von Maschinen und für Messungen, die nicht allzu große Genauigkeit erfordern, sind die *Wirbelstromtachometer* weit verbreitet. Die Geräte sind entweder direkt mit der Drehachse oder über eine biegsame Welle mit dieser verbunden. Ihr schematischer Aufbau ist in der Abb. 102 angegeben. Mit der Welle, deren Drehzahl gemessen werden soll, rotiert um die Achse A ein permanenter Magnet NS, dessen Pole zylindrisch ausgedreht sind. Zwischen den beiden Polen ist ein sich mit der Welle drehender Eisenanker E von etwas geringerem Durchmesser als die Polschuhbohrung befestigt, so daß ein enger Luftspalt mit hoher magnetischer Feldstärke entsteht. Ein becherförmiger Zylinder W aus Kupfer oder Aluminium ist leicht drehbar in diesen Luftspalt montiert. Auf der Achse dieses Blechzylinders sitzt der Zeiger Z, den eine Spiralfeder F in seine Nullstellung zieht. Bei der Drehung des Magneten werden in W Wirbelströme induziert, die der Winkelgeschwindigkeit, der Magnetfeldstärke und dem spez. Widerstand des Zylinders W proportional sind und ein diesen Größen verhältnisgleiches Drehmoment um A zur Folge haben. Ist das von der Feder ausgeübte Gegendrehmoment eine lineare Funktion des Zeigerwinkels, so ist der auf der Skala Sk abzulesende Ausschlag ebenfalls eine lineare Funktion der Winkelgeschwindigkeit. Von Vorteil ist die Einfachheit des Aufbaus und die Erschütterungsunempfindlichkeit des Gerätes, ein Nachteil seine Abhängigkeit des Ausschlages von der Temperatur.

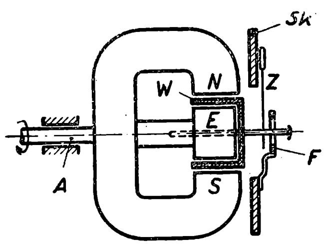


Abb. 102 Wirbelstromtachometer

8,23 *Fernmessung der Winkelgeschwindigkeit* (*271*, *292*)

In vielen Fällen, in denen aus räumlichen Gründen oder für die Registrierung die Messung selbst nicht an der Welle, deren Drehzahl bestimmt werden soll, ausgeführt werden kann, bedient man sich eines *Drehzahlgebers*. Der Geber ist ein kleiner Wechselstromgenerator, der mit einem mehrpoligen permanenten Feldmagneten ausgerüstet ist und in den feststehenden Induktionsspulen eine Wechselspannung induziert, deren Spannung und Frequenz genau der Drehzahl proportional sind. Ein Wechselstrommesser gibt unmittelbar die Drehzahl an. Für sehr genaue Messungen verwendet man einen geeichten Frequenzmesser, besonders dann, wenn eine bestimmte Drehzahl sehr genau überwacht werden soll. Diese Drehzahlgeber sind sehr widerstandsfähig gegen rauhe Behandlung und geben bei 1000 *U*/min etwa 0,1 VA bei 20 V Spannung ab. Die Anzeigegenauigkeit, die hauptsächlich durch die des Meßgerätes gegeben ist, beträgt etwa 1% bei der Spannungsmessung und bis zu 10^{-4} bei der Frequenzmessung. Diese Methode eignet sich bis zu Drehzahlen von 10^5 U/min (*150*).

8,24 *Impuls-Drehzahlmessung*

Für rotierende Systeme geringen Drehmomentes eignen sich die oben beschriebenen Verfahren nicht, da die Rückwirkung der Drehzahlmessung auf das Meßobjekt Meßfehler zur Folge hat. In diesem Fall wird die Impuls-Drehzahlmessung angewandt, die in Abb. 103 als Schaltskizze dargestellt ist. Durch einen mit der umlaufenden Welle verbundenen Schaltkontakt K oder eine Lichtblende, die über eine Photozelle

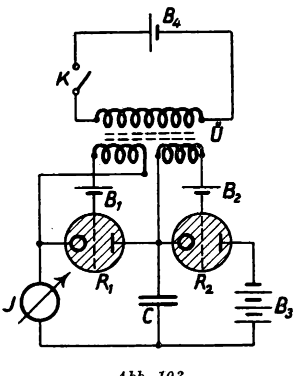


Abb. 103
Impulsdrehzahlmessung

ebenfalls Stromimpulse erzeugt, wird in der Primärspule des Übertragers Ü durch die Batterie B_4 ein kurzer Stromstoß bei jeder Umdrehung erzeugt. Die auf der Sekundärseite des Transformators induzierten Spannungsimpulse addieren sich zur konstanten negativen Sperrspannung der Gitterbatterien B_1 und B_2 der Gasentladungstrioden R_1 und R_2 (Tyrathron), und zwar sind die Sekundärwicklungen, wie in der Abbildung angedeutet ist, mit entgegengesetztem Wicklungssinn an die Gitter gelegt. Wird nun K geschlossen, so wird R_2 positiv vorgespannt, also gezündet, und der Kondensator C kann durch die Batterie B_3 aufgeladen werden. R_1 ist zur gleichen Zeit gesperrt. Beim Öffnen des Kontaktes werden die Funktionen der beiden Röhren vertauscht, also R_1 gezündet und R_2 gesperrt, wodurch der geladene Kondensator sich über das Anzeigegerät J entlädt. Ist der Entladungskreis so dimensioniert, daß sich die Ladung des Kondensators C während der Öffnungszeit vollständig über J ausgleichen kann, so ist der arithmetische Mittelwert des Meßstromes i der Umlaufsfrequenz f proportional entsprechend der Beziehung

$$f = \frac{\bar{i}}{C\,U}, \qquad (8/8)$$

wenn U die Spannung (V) der Batterie B_3 und C die Kapazität in Farad bedeuten. Dieses Verfahren eignet sich auch zur Summierung mehrerer Drehzahlen, wenn man die mittleren Entladungsströme der einzelnen Kondensatoren durch ein Instrument addiert. Die Genauigkeit des Verfahrens ist durch die Anzeigegenauigkeit des Instrumentes und die Spannungskonstanz der Batterie bestimmt und kann 0,05% erreichen (*284*).

8,3 Hohe Drehzahlen und Beschleunigungen (Ultrazentrifuge) (*17*)

Die höchsten Drehzahlen bis zu 20000 U/s und dementsprechend außerordentlich hohe Beschleunigungen bis zu $10^7\,g$ ($g = 981$ cm/s^2) lassen sich mit den sog. *Ultrazentrifugen* erzielen. Diese sind von großer Bedeutung für die Untersuchung physiologischer Lösungen und Molekulargewichtsbestimmungen.

Die von Svedberg (*341*) entwickelte Bauart mit einer oberen Grenzdrehzahl von 2000 U/s hat einen flachzylindrischen Läufer, der durch eine Drucköltürbine angetrieben wird. Die maximale am Läuferumfang auftretende Beschleunigung beträgt 600000 g.

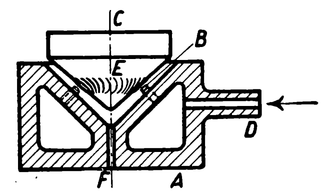


Abb. 104 Ultrazentrifuge nach Henriot und Huguenard

Die weitere Entwicklung stützte sich zum Teil auf Versuche von Henriot und Huguenard (*158*), die sich die Aufgabe stellten, sehr hohe Drehzahlen mit Drehkörpern ohne feste Achsenlagerung zu erreichen. Der Aufbau der kleinen Turbine ist sehr einfach und in Abb. 104 dargestellt. Der hohle Ständer A, in den die Druckluftzuführung D mündet, ist an der Oberseite als Hohlkegel mit einem Öffnungswinkel von 90° aus-

gebildet. Auf der Innenseite sind vier oder mehr über den Umfang verteilte, tangential einmündende Düsen B angebracht, durch die Druckluft aus A in den Spalt zwischen Ständer und Läufer C strömt. Der Läufer stellt einen Kegel mit einem Öffnungswinkel von 100 bis 120° dar, dessen Mantel gerade oder gebogene Rillen E besitzt, die als Turbinenschaufeln wirken. Der Läufer wird durch die durch den Spalt strömende Druckluft getragen und zugleich in schnelle Umdrehung versetzt. Eine mittige Bohrung F, die die Spitze des Hohlkegels mit dem Außendruck verbindet, hat einen wesentlich gleichförmigeren Gang des Läufers zur Folge. Mit einer solchen Turbine, deren Läufer 11,7 mm Durchmesser hatte, wurden 11000 *U*/s erreicht, was einer Geschwindigkeit am äußeren Umfang von 404 m/s entspricht. Ein 9-mm-Läufer konnte mit 20000 *U*/s angetrieben werden, wodurch eine maximale Beschleunigung von $7 \cdot 10^6\ g$ erzielt wurde.

In Weiterentwicklung dieses Gedankens wurde von Jefferies (*191*) ein Läufer konstruiert, der zwei Kegel nach Abb. 104 durch ein zylindrisches Rohr verbindet und beiderseits in Hohlkegel mit Druckluftantrieb gelagert ist. Der zylindrische Hohlraum zwischen den Kegeln diente zur Aufnahme der in laufender Beschickung untersuchten Lösungen.

Bei größeren Läufern ist eine sehr erhebliche Leistung zur Überwindung der Luftreibung vom Antriebsmotor aufzubringen. Beams und Linke (*21*) beschreiben eine Ultrazentrifuge, deren Läufer im Vakuum rotiert und dadurch nur geringe Reibungsverluste besitzt. In Abb. 105 ist die Konstruktion vereinfacht dargestellt. Der Läufer A aus Duraluminium von 100 mm Durchmesser ist starr durch eine 1,6 mm starke Stahlachse B mit dem Turbinenlaufrad T verbunden und an zwei Stellen L_1 und L_2 druckdicht im Turbinengehäuse G gelagert. Die Turbine von 2,1 cm Durchmesser wird durch tangentiale Düsen D im Druckluftkanal L angetrieben. Durch eine Verbindung der Druckluftleitung mit dem unter der Turbine liegenden Raum C wird zwischen diesem und der Läuferunterseite ein Luftpolster geschaffen, das den axialen Druck des Läufers A aufnimmt und eine äußerst geringe Reibung besitzt. Die Schleuder A ist von der Vakuumkammer K umschlossen.

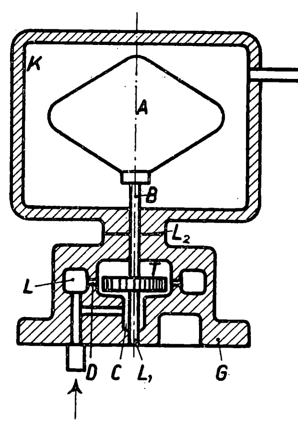


Abb. 105 Ultrazentrifuge nach BEAMS und LINKE

Eine Ultrazentrifuge, die die bisher höchsten Drehzahlen erreichte, wird von Mac Hattie (*232*) beschrieben. Der Läufer aus hochwertigem Stahl wird dabei durch ein geregeltes Magnetfeld in einem Vakuumraum aufgehängt, wobei der Abstand in senkrechter Richtung durch eine Photozellenanordnung stabilisiert wird. Der Antrieb erfolgt durch das magnetische Drehfeld eines 112-kHz-Generators. Ein zylindrischer Stahlstab von 5 mm Durchmesser und 22 mm Länge erreichte eine Frequenz von 30 kHz; eine 3/16″-Kugellagerkugel widerstand, ohne zu zerplatzen, einer Frequenz von 110 kHz, was einer maximalen Beschleunigung am Umfang von $6 \cdot 10^6\ g$ entspricht. Neuerdings erreichte Beams (*18, 19*) mit einer magnetisch aufgehängten, kleinen Stahlkugel eine Beschleunigung von $5 \cdot 10^8\ g$.

Die Theorie der analytischen Ultrazentrifuge ist von Stauffacher, Beams und Snoddy (*331*) entwickelt worden.

8,4 Messung der Geschwindigkeit in Gasen und Flüssigkeiten

8,41 *Grundlagen, Kontinuitätsgleichung* (*79. 281*)

Die strömende Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen zeigt so viel Gemeinsames, daß es zweckmäßig erscheint, ihre Behandlung nicht zu trennen. Die Kompressibilität der Gase ist zwar viel größer als die der praktisch als inkompressibel geltenden Flüssigkeiten; bis zu mittleren, unter der Schallgeschwindigkeit liegenden Strömungsgeschwindigkeiten, sowie bei mittleren Höhen der Gassäule bleiben die Druckänderungen im Vergleich zum mittleren Druck jedoch gering. Betrachtet man Druckänderungen von 10% noch als zulässig, so kann man Strömungsgeschwindigkeiten bis zu 150 m/s bei Luft ohne Berücksichtigung der Kompressibilität behandeln.

Für die rechnerische und graphische Behandlung von Strömungsaufgaben ist der Begriff des *Stromfadens* ein wertvolles Hilfsmittel. Man definiert ihn als Begrenzungskanal mit im stationären Zustand der Strömung unverrückbaren Wänden, die in Richtung der Geschwindigkeit v verlaufen, durch die also weder Flüssigkeit ein- noch austritt. Ist F der Querschnitt des Stromfadens an einer bestimmten Stelle, v die mittlere Geschwindigkeit in diesem Querschnitt und ϱ die dort herrschende Flüssigkeitsdichte, so ist das in der Zeiteinheit durch den Querschnitt fließende Flüssigkeitsvolumen $F \cdot v$. Die pro Sekunde durchfließende Masse beträgt dann $\varrho \cdot F \cdot v$. Die Kontinuitätsbeziehung fordert, daß das Produkt $\varrho F v$ in allen Querschnitten desselben Stromfadens denselben Wert haben muß. Hieraus geht hervor, daß ein Stromfaden einer stationären Strömung im Inneren einer Flüssigkeit nirgends aufhören oder beginnen kann. Ist die Kompressibilität der Flüssigkeit zu vernachlässigen, so gilt allgemein

$$F \cdot v = \text{const.}, \qquad (8/9)$$

d. h. die Geschwindigkeit ist dem Querschnitt des Stromfadens umgekehrt proportional. Teilt man den ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raum in aneinanderliegende Stromfäden auf, durch die im einzelnen in der Zeiteinheit dieselbe Flüssigkeitsmenge fließen soll, so werden sich an den Stellen großer Geschwindigkeit die Stromfäden zusammendrängen, pro cm² senkrecht zur Strömungsrichtung sich also mehr Stromfäden befinden. Damit gibt die Zahl der Stromfäden pro Flächeneinheit ein anschauliches Maß für die an der betreffenden Stelle herrschende Geschwindigkeit (Abb. 106). Besonders einfach wird die Beziehung (8/9) in solchen Fällen, wo man die ganze Strömung als einen einzigen Stromfaden behandeln darf, wie etwa bei einer Rohrströmung. Die vorgegebenen Rohrquerschnitte stellen dann zugleich die Stromfadenquerschnitte dar, woraus sich die mittlere Geschwindigkeit an jeder Stelle aus der Beziehung $F \cdot v = Q$ ermitteln läßt, wenn das in der Zeiteinheit durchströmende Flüssigkeitsvolumen mit Q bezeichnet wird. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer eindimensionalen Strömung, da die Strömungsgeschwindigkeit nur noch von einer Koordinate, nämlich von der längs der Röhrenmittellinie gemessenen Entfernung des betreffenden Querschnittes abhängt.

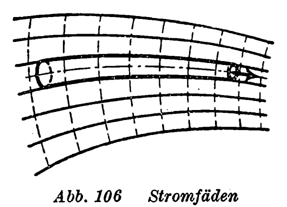


Abb. 106 Stromfäden

Bei der dreidimensionalen Behandlung der Aufgabe, für die wir die drei Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y und v_z als Funktionen der Raumkoordinaten x, y, z einführen, drückt man die Kontinuität dadurch aus, daß man verlangt in

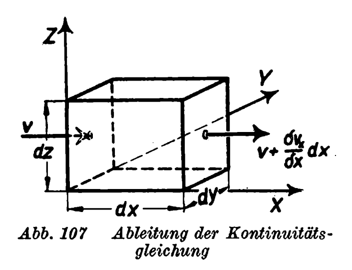


Abb. 107 Ableitung der Kontinuitätsgleichung

ein kleines Parallelepiped mit den Kanten dx, dy und dz solle ebensoviel einströmen wie ausströmen. Für volumen beständige Strömungen (Abb. 107) angewendet, erhält man für die X-Richtung die pro Sekunde einströmende Menge $dy\ dz \cdot v_x$, die auf der entgegengesetzten Seite ausströmende Menge beträgt $dy \cdot dz \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx\right)$. In das abgegrenzte Volumenelement tritt also in der Zeiteinheit die Menge $dx\ dy\ dz \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x}$ mehr ein als aus. Für die beiden anderen Koordinaten gelten analoge Beziehungen. Die Kontinuitätsbedingung bekommt also die mathematische Form:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0. \qquad (8/10)$$

Gleichung (8/10) gilt nur für den Fall der inkompressiblen Flüssigkeit im stationären Zustand.

8,42 *Bernoulli*sche Gleichung

Wir fragen nun nach den Kräften, die bei der Bewegung einer Flüssigkeit in Erscheinung treten. Wir wissen, daß wir hierzu die Druckkräfte und die Schwere (und andere Massenkräfte) zu rechnen haben, zu denen noch die Flüssigkeitsreibung tritt, die als Widerstand gegen Formänderung anzusehen ist. Von ihr wird im § 13 ausführlicher die Rede sein, für die vorliegende Betrachtung soll sie vernachlässigt werden. Die dynamische Beziehung für die Flüssigkeitsbewegung soll also für das Idealbild der reibungslosen Flüssigkeit entwickelt werden, was für die meisten Anwendungen gerechtfertigt erscheint.

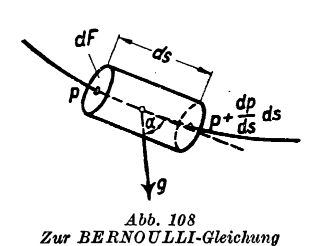


Abb. 108 Zur BERNOULLI-Gleichung

Für die Ableitung der gesuchten Beziehung sei ein Flüssigkeitselement (Abb. 108) betrachtet, das die Länge ds und den Querschnitt dF besitze und dessen Beschleunigungskomponente in der Bewegungsrichtung s berechnet werden soll. Ist v die Geschwindigkeit des Flüssigkeitselementes, so lautet das totale Differential für eine gleichzeitig räumliche und zeitliche Geschwindigkeitsänderung

$$dv = \frac{\partial v}{\partial s} ds + \frac{\partial v}{\partial t} dt.$$

Mit $ds = v \cdot dt$ ergibt sich die Beschleunigung längs des Stromfadens s zu

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad (8/11)$$

worin $v \frac{\partial v}{ds}$ den Beschleunigungsanteil bedeutet, der dadurch entsteht, daß das Teilchen an Orte mit veränderter Geschwindigkeit kommt und $\frac{\partial v}{\partial t}$ die zeitliche Änderung

der Geschwindigkeit bei festgehaltenem Ort angibt. Für die stationäre Strömung verschwindet der zweite Anteil.

Bezeichnet man die Flüssigkeitsdichte mit ϱ, so wirken auf das Teilchen mit dem Volumen $d\,s \cdot d\,F$ folgende Kräfte: Ist der Druck an dem stromaufwärts gelegenen Ende des Zylinders p, so wirkt dort eine Druckkraft $p\,dF$ und auf das stromabwärts gelegene Ende $-\left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\,ds\right) dF$, so daß sich die Resultierende der beiden Druckkräfte zu $-\frac{\partial p}{\partial s}\,ds\,dF$ ergibt. Durch den Einfluß der Erdbeschleunigung g wirkt ferner auf das Teilchen die Massenkraft $\varrho\;dF\;ds\;g\cos\alpha$, wenn α der Winkel zwischen den Richtungen von g und s ist. Nach Division durch ϱ erhält man schließlich die Gleichgewichtsbedingung

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\cos\alpha = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{8/12}$$

Legt man das Koordinatensystem so, daß die Erdbeschleunigung in der Z-Richtung wirkt, dann wird $\cos\alpha = -\frac{\partial z}{\partial s}$. Handelt es sich um eine stationäre Bewegung $\left(\frac{\partial v}{\partial t} = 0\right)$ und wird die Dichte ϱ als konstant angenommen, so wird aus (8/12)

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0. \tag{8/12a}$$

Durch Integration erhält man schließlich die Bernoullische Gleichung (1738)

$$\frac{p}{\varrho} + gz + \frac{v^2}{2} = \text{const.}, \tag{8/13}$$

die eine besondere Form der Energiegleichung darstellt. Ihre Glieder stellen die auf die Masseneinheit bezogene Druckenergie, potentielle Energie im Schwerefeld und kinetische Energie der Bewegung dar. Der Wert der Konstanten kann für verschiedene Stromfäden verschiedene Werte annehmen; kommen diese jedoch aus einem Raum, in dem ein stationärer Zustand herrscht, so wird die Konstante für alle Stromfäden dieselbe.

8,43 *Geschwindigkeitsmessung durch Staugeräte*

Neben den noch ausführlicher zu besprechenden dynamischen Meßverfahren als Anwendung der Bernoulli-Gleichung sei der bei Flüssigkeitsmessungen häufig verwendete *hydrometrische Flügel* nach Woltman (1790) erwähnt, der aus einer mehrflügeligen Schraube besteht, deren Umdrehungszahl pro Minute als Maß für die Strömungsgeschwindigkeit verwendet wird (§ 5,42).

Für die Messung der Geschwindigkeit in Gasen, besonders für meteorologische Messungen, ist das *Flügelradanemometer* in Verwendung, das aus einem leicht drehbaren Flügelrad besteht, dessen Umdrehungszahl entweder direkt oder mit Hilfe eines Kontaktgebers gemessen wird. Der Meßbereich liegt zwischen 0,1 und 10 m/s. Eine Abart stellt das Robinsonsche *Schalenkreuzanemometer* dar, das zur meteorologischen Standardausrüstung gehört. Es besteht aus einem rechtwinkligen Kreuz, das um eine zu seiner Ebene senkrechte Achse drehbar gelagert ist und vier hohle, halb-

kugelige Schalen trägt. Der Wind trifft immer gleichzeitig eine Schale auf der konkaven und eine auf der konvexen Seite. Da der Luftwiderstand für beide Anströmrichtungen sehr voneinander verschieden ist, dreht sich das Schalenkreuz, und zwar mit der konvexen Seite voraus, im Wind. Die obere Meßgrenze liegt bei 50 m/s.

Die eigentlichen dynamischen Meßverfahren gehen von Gleichung (8/13) aus. Befindet sich in einer stationären Strömung von der Geschwindigkeit v ein Hindernis, so staut sich unmittelbar vor diesem die Strömung und fließt um dieses herum. Im Mittelpunkt der sich teilenden Strömung, dem *Staupunkt*, kommt die Flüssigkeit völlig zur Ruhe. Gleichung (8/13) liefert für die durch den Staupunkt gezogene Stromlinie, wenn der Druck im Staupunkt p und der ungestörte Druck in derselben Höhe p_0 ist,

$$\frac{p}{\varrho} + 0 = \frac{p_0}{\varrho} + \frac{v^2}{2}, \quad \text{woraus } p = p_0 + \frac{v^2 \varrho}{2} \qquad (8/14)$$

folgt. Im Staupunkt nimmt also der Flüssigkeitsdruck um den Betrag der kinetischen Energie $\frac{\varrho}{2} v^2$, den man *Staudruck* oder auch dynamischen Druck nennt, zu. Die Beobachtung dieses Druckes liefert ein bequemes Mittel zur genauen Messung der Strömungsgeschwindigkeit. In der einfachsten Weise dient hierzu ein rechtwinklig umgebogenes Rohr (Abb. 109), das nach seinem Erfinder *PITOT-Rohr* heißt und mit seinem kurzen Schenkel in Richtung der Strömung angebracht wird, so daß das offene

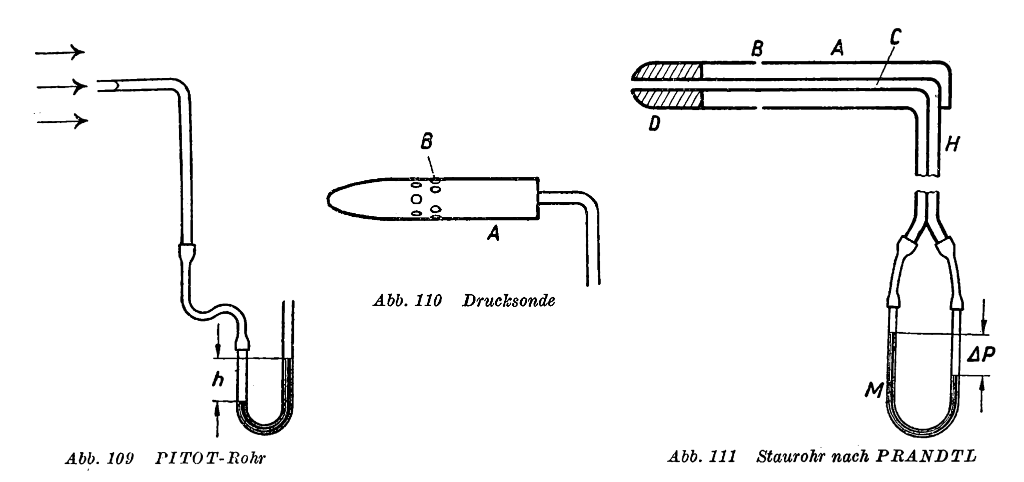


Abb. 109 PITOT-Rohr

Abb. 110 Drucksonde

Abb. 111 Staurohr nach PRANDTL

Ende der Strömungsrichtung entgegenweist. Verbindet man das PITOT-Rohr mit einem Druckmeßgerät (§ 8,53), so zeigt dieses die Summe aus dem statischen Druck p_0 und dem Staudruck an. p nennt man gewöhnlich den Gesamtdruck. Um den Staudruck und damit die Strömungsgeschwindigkeit v bestimmen zu können, muß außerdem der statische Druck gemessen werden. Dessen Messung bereitet größere Schwierigkeiten, da durch die eingebrachte Sonde der zu messende statische Druck verändert wird. Eine bewährte und genaue Meßmethode bedient sich der in der Abb. 110 dargestellten Drucksonde, die aus einem zylindrischen Anströmkörper A besteht, dessen Spitze strömungstechnisch günstig geformt ist, und eine Reihe von feinen Bohrungen B ent-

hält. Besonders wichtig ist hierbei, daß die Meßbohrungen am zylindrischen Teil der Sonde angebracht sind und diese genau in Strömungsrichtung steht. Durch Vereinigung der Drucksonde mit dem Staurohr erhält man ein einfaches Meßgerät, um in Verbindung mit den im § 8,5 zu besprechenden Manometern Strömungsgeschwindigkeiten in Flüssigkeiten und Gasen genau zu messen. In Abb. 111 ist das bekannteste dieser Geräte, das Staurohr nach PRANDTL, dargestellt, das in verschiedenen Größen hergestellt wird. Es besteht aus dem zylindrischen Rohr A, dessen Achse parallel zur Strömungsrichtung verläuft und in einiger Entfernung vom Staurohrende schmale Schlitze oder Bohrungen B zur Messung des statischen Druckes besitzt. Ein zweites, konzentrisch zu A in das abgerundete Kopfstück D eingelötetes Rohr C dient zur Messung des Gesamtdruckes. Der Druck an den beiden Meßstellen wird durch zwei Zuleitungen im Haltestiel H dem Manometer M zugeführt, das in der Abbildung als einfaches U-Rohr gezeichnet ist. Die sich einstellende Flüssigkeitshöhe Δp, das ist die Differenz zwischen dem statischen Druck und Gesamtdruck, ist also der Staudruck und damit dem Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit proportional. Durch eine günstige Ausbildung des Sondenkopfes ist die Anzeige innerhalb eines Winkelbereiches von 17° von der Anströmrichtung unabhängig. Durch Verwendung besonders feiner PRANDTL-Rohre kann man die Geschwindigkeit in einem Strömungsfeld punktweise ausmessen, was für bestimmte Aufgaben von großer Bedeutung ist.

8,44 *Durchflußmessung*

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit $\bar{v} = \int v\, df$ ist am bequemsten über die sich bei Querschnittsänderungen einstellenden Druckdifferenzen zu bestimmen. Nach der Kontinuitätsbeziehung (8/9) für die eindimensionale Strömung verhalten sich die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 in den dazugehörigen Querschnitten F_1 und F_2 bei einer inkompressiblen Flüssigkeit wie

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Setzt man diese Beziehung in die BERNOULLIsche Gleichung ein, so erhält man für die Differenz der statischen Drucke den Ausdruck

$$p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2} v_1^2 \left[\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 - 1\right]. \qquad (8/15)$$

Bei bekanntem Querschnittsverhältnis F_1/F_2 läßt sich die gesuchte Geschwindigkeit v_1 aus der gemessenen Druckdifferenz berechnen. Bei Verengungen, die schroff verlaufen, tritt eine *Strahlkontraktion* auf, d.h. der kleinere Querschnitt F_2 ist nicht mehr identisch mit dem engsten Querschnitt der Leitung (siehe Abb. 112). Da man F_2 im allgemeinen nicht genau kennt, dieser auch von der Strömungsgeschwindigkeit abhängt, rechnet man mit dem meßbaren Querschnitt F_2' und drückt dessen Zusammenhang mit F_2 durch die Kontraktionszahl μ aus: $F_2' = \mu F_2$. Bezeichnet man das Quer-

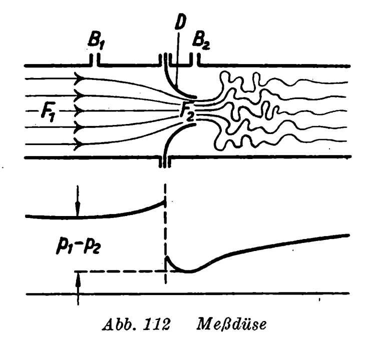


Abb. 112 Meßdüse

schnittsverhältnis $F_1 : F_2$ mit m, so folgt aus Gleichung (8/15) für die im engsten Querschnitt herrschende mittlere Geschwindigkeit v_2

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2 m^2}} \sqrt{\frac{2}{\varrho}(p_1 - p_2)}, \tag{8/16}$$

woraus sich die durch die Leitung sekundlich fließende Flüssigkeitsmenge Q bestimmt zu

$$Q = \frac{\mu F_2}{\sqrt{1-\mu^2 m^2}} \sqrt{\frac{2}{\varrho}(p_1 - p_2)}.$$

Die an einer Stelle eingeengte Leitung läßt sich also zur Messung von Flüssigkeitsmengen bestimmen, wozu nur eine Differenzdruckmessung nötig ist. Bei genauen Mengenmessungen mit Gasen darf der Einfluß der Kompressibilität auf die Dichte und die Kontraktionszahl μ nicht mehr unberücksichtigt bleiben. Für die genauen Messungen mittels definierter Meßblenden und Düsen bestehen ins einzelne gehende Meßvorschriften (*380*).

Eine meßbare Einengung der Flüssigkeitsleitung, deren Durchfluß bestimmt werden soll, läßt sich relativ einfach durch Einbau einer Meßdüse D (oder einer Meßblende) erreichen. Der Druck vor und hinter der Düse wird an feinen Wandbohrungen B_1 und B_2 in Höhe der Düsenmündung und in größerem Abstand davor gemessen. In der unteren Bildhälfte der Abb. 112 ist der Druckverlauf in der Rohrachse angegeben. Es ist ersichtlich, daß man den Druck p_1 nicht unmittelbar vor der Düse messen darf, da dieser dort wegen des Anstaues größer als in der ungestörten Strömung ist. Die Kontraktionszahl für gut geformte Düsen wird ≈ 1. Weitgehend von der Strömungsgeschwindigkeit unabhängig und daher für genaue Messungen besonders geeignet ist die sog. *Venturidüse*, die aus einer Meßdüse mit angesetztem *Diffusor* besteht, wie in Abb. 113 angedeutet ist. Infolge der glatten Form und eines langgestreckten Diffusors löst sich die Strömung an keiner Stelle ab, wodurch die Kontraktionszahl genau 1 wird. Der Meßfehler ist geringer als 1% (*38*).

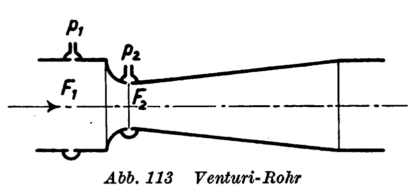


Abb. 113 Venturi-Rohr

8,45 *Hitzdrahtanemometer* (*56*)

Für die Messung von Gasgeschwindigkeiten sind neben Staugeräten und Düsen Hitzdrahtinstrumente in Gebrauch, die gegen die vorgenannten Instrumente den Vorteil geringerer Anzeigeträgheit besitzen, was für besondere Meßaufgaben von Bedeutung sein kann. Die Konstruktion eines Hitzdrahtanemometers ist denkbar einfach, wie aus Abb. 114 hervorgeht. Zwischen den federnden Trägern T, die den Faden immer gespannt halten, ist ein sehr dünner Draht F ausgespannt, der elektrisch geheizt wird. Durch die senkrecht zur Fadenrichtung vorbeiströmende Luft wird der Heizdraht abgekühlt, wodurch sich sein elektrischer Widerstand ändert. Als Drahtmaterial verwendet man meistens Platin oder Platin-Iridium, bei geringeren Ansprüchen an Genauigkeit ist auch Nickel brauchbar. Die Länge des Hitzdrahtes richtet sich nach den Abmessungen des zu untersuchenden Strömungsfeldes; es können Drahtlängen bis herunter zu wenigen Millimetern noch bequem verwendet werden.

Die Messung der Geschwindigkeit kann auf zweierlei Art geschehen: 1. Man hält die Temperatur (d. h. den elektrischen Widerstand) des Hitzdrahtes konstant und bestimmt den hierzu erforderlichen Strom in Abhängigkeit von der Gasgeschwindigkeit; 2. man hält den Heizstrom konstant und mißt den Widerstand abhängig von der Anströmgeschwindigkeit. Beide Methoden lassen sich angenähert theoretisch durch Einführen der Wärmeübergangszahl in Abhängigkeit von der REYNOLDSschen Kennzahl berechnen (*198*), doch ist eine Eichung nach einer der angegebenen Methoden –

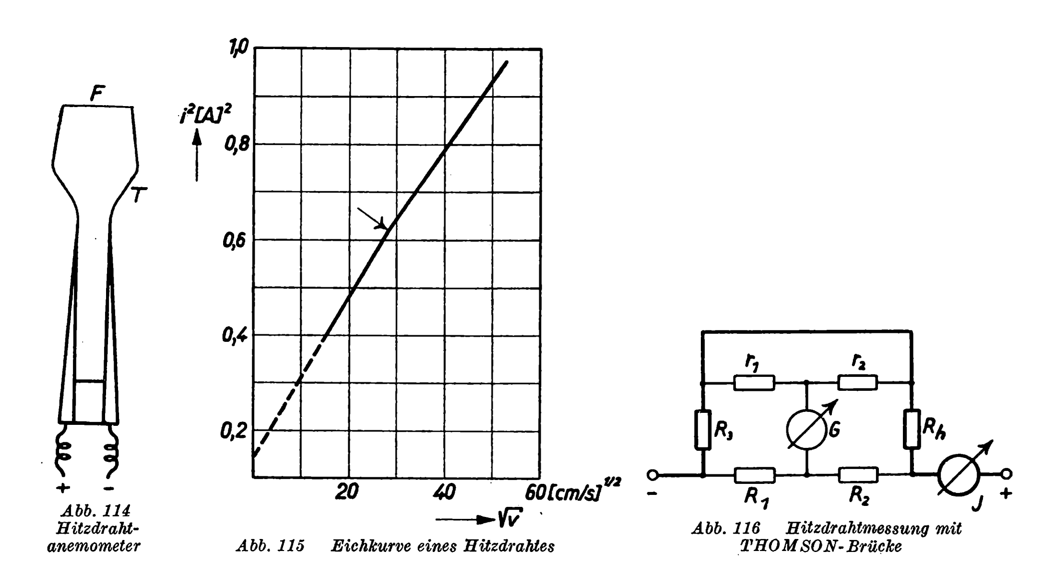


Abb. 114 Hitzdraht-anemometer

Abb. 115 Eichkurve eines Hitzdrahtes

Abb. 116 Hitzdrahtmessung mit THOMSON-Brücke

auch nach einigem Gebrauch – in jedem Fall durchzuführen. In Abb. 115 ist eine derartige Eichkurve eines Platin-Iridiumfadens von 0,05 mm Dicke und 25,8 mm Länge wiedergegeben. Wie ersichtlich, setzt sich die Kurve aus zwei geraden Stücken zusammen, wenn man das Quadrat der Stromstärke über der Wurzel aus der Geschwindigkeit aufträgt. Der Knick liegt an der Stelle, wo der laminare Wärmeübergang in den turbulenten überschlägt. Zur Messung des elektrischen Widerstandes bedient man sich am besten der Brückenschaltungen nach WHEATSTONE oder THOMSON. Letztere ist zu empfehlen, wenn die Zuleitungen vom Hitzdraht zum Instrument lang sind und sich ändern könnten, da deren Widerstand bei dieser Schaltung nur zu einem geringen Bruchteil in das Meßergebnis eingeht. Ein Beispiel der Schaltung ist in Abb. 116 dargestellt, bei der am Hitzdraht getrennte Strom- und Spannungszuführungen vorhanden sind. R_1, R_2, R_3 und R_h (Hitzdraht) stellen die vier Widerstände der gewöhnlichen WHEATSTONE-Brücke dar; r_1 und r_2 sind Hilfswiderstände, die der direkten Zuleitung zum Hitzdraht parallelgeschaltet sind. Zum Abgleich dient das Nullinstrument G, zur Messung des Gesamtstromes das Amperemeter J. Beim Nullabgleich muß gelten:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_h} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Ein Nachteil der Hitzdrahtmethode ist der Umstand, daß Temperaturänderungen des Gasstromes in das Meßergebnis eingehen. Durch geeignete Schaltungen ist dieser Fehler jedoch zu eliminieren. Ein weiterer Nachteil besteht darin, daß die Eichung für verschiedene Gase nicht übereinstimmt, daher gesondert zu machen ist. Sollen schnelle Schwankungen der Gasgeschwindigkeit gemessen werden, wie das bei Turbulenzmessungen erforderlich ist, so läßt man zweckmäßig den Heizstrom konstant, indem man größere Widerstände vorschaltet, und beobachtet die Ausschläge des Nullinstrumentes. Die Einstellung des Hitzdrahtes erfolgt um so schneller, je geringer seine Wärmekapazität, d. h. sein Durchmesser, und je größer die Gasgeschwindigkeit ist (*55*).

Grundsätzlich stehen der Anwendung des Hitzdrahtverfahrens für Untersuchungen in Flüssigkeiten keine Bedenken im Wege. Praktisch besteht jedoch eine Einschränkung bezüglich des Siedepunktes der Flüssigkeit und der unbequem großen Empfindlichkeit gegen Schwankungen der Flüssigkeitstemperatur wegen der großen Wärmeübergangszahl.

8,46 *Messung der Richtung einer Strömung*

Zur Beobachtung und Messung der Anströmrichtung lassen sich solche Geschwindigkeitsmeßverfahren verwenden, bei denen der Meßwert eindeutig von der Richtung abhängt. So kann man z. B. zwei PITOT-Rohre so anordnen, daß sie einen Winkel einschließen, und die Anordnung so lange drehen, bis das an die beiden Staurohre geschaltete Manometer keinen Ausschlag mehr zeigt. Zur dreidimensionalen Bestimmung der Strömungsrichtung dient das TAYLOR-Rohr (*355*), das aus einer Kugel mit fünf feinen Anbohrungen besteht, deren Differenzdrucke an drei Manometern abgelesen werden. Eine sehr genaue Bestimmung der Strömungsrichtung läßt sich mit zwei Hitzdrähten durchführen, die einen spitzen Winkel einschließen und vom gleichen Heizstrom durchflossen werden. Wie aus Abb. 117 zu ersehen ist, ist die zur Aufrechterhaltung einer bestimmten Temperatur erforderliche Stromstärke eines einzelnen Drahtes sehr stark von der Anströmungsrichtung abhängig. Wie zu erwarten, besitzt die Kurve für den Winkel 90⁰, also bei Parallelanströmung, ein ausgeprägtes, scharfes Minimum. Schaltet man die beiden Hitzdrähte in eine abgeglichene Meßbrücke, so verschwindet der Ausschlag des Nullinstrumentes, wenn die Strömung in Richtung der Winkelhalbierenden fließt.

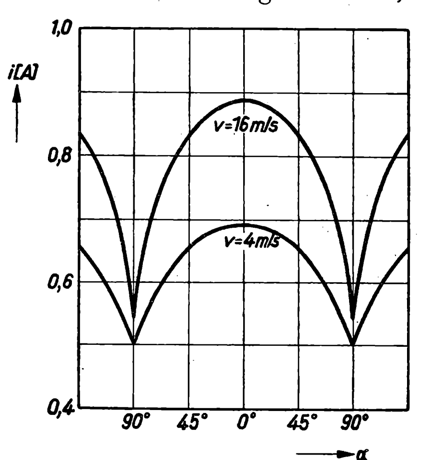


Abb. 117 Einfluß der Anströmrichtung

8,5 Messung kleiner Differenzdrucke

8,51 *Allgemeines über Manometer*

Zur Messung der Druckdifferenzen, die bei Anwendung der im vorigen Abschnitt beschriebenen Staugeräte auftreten, werden vorwiegend *Flüssigkeitsmanometer* ver-

wendet. In der einfachsten Form bestehen diese aus einem U-förmig gebogenen Rohr, dessen beiden Schenkeln die Drucke zugeleitet werden und das zum Teil mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Der sich einstellende Niveauunterschied der beiden Menisken dient als Druckmaß und berechnet sich zu

$$p = \varrho \cdot h,$$

wenn ϱ die Dichte der Manometerflüssigkeit und h die gemessene Höhendifferenz ist. Als praktische Maßeinheit wird vielfach 1 mm WS (Wassersäule) = 10^{-4} kg/cm^2 = 1 kg/m^2 verwendet. Für genaue Messungen muß die Temperatur und die Abhängigkeit der Dichte von dieser bekannt sein. Für die gebräuchlichsten Füllflüssigkeiten ist die Dichte ϱ in der Tabelle IX angegeben.

Quecksilber	13,5951	(1 — 0,000182 t)
Petroleum	0,847	(1 — 0,00090 t)
Olivenöl	0,920	(1 — 0,00068 t)
Tetralin	0,984	(1 — 0,00076 t)
Wasser	0,999099	(t = 15° C)
Glyzerin	1,260	(1 — 0,0005 t)
Monobromnaphthalin	1,52	(1 — 0,00015 (t — 15))
Äthylalkohol	0,78934	(t = 20° C)

Tabelle IX

Nach Ablesen der Flüssigkeitshöhe zur Druckbestimmung sind neben der Umrechnung auf den Normalwert der Erdbeschleunigung ($g = 980{,}665$ cm/s^2) besondere Korrekturen anzubringen, von denen die Berücksichtigung der Dichteänderung durch die Temperatur die größte und daher wichtigste ist. Die abgelesenen Druckhöhen sind erst nach Umrechnung auf Normalbeschleunigung und 0° C miteinander vergleichbar.

Ist β' der kubische Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit, so ist die bei der Temperatur t abgelesene Flüssigkeitshöhe $h = h_0'(1 + \beta' t)$ und somit die auf 0° reduzierte Flüssigkeitshöhe

$$h_0' = \frac{h}{1 + \beta' t}. \tag{8/17}$$

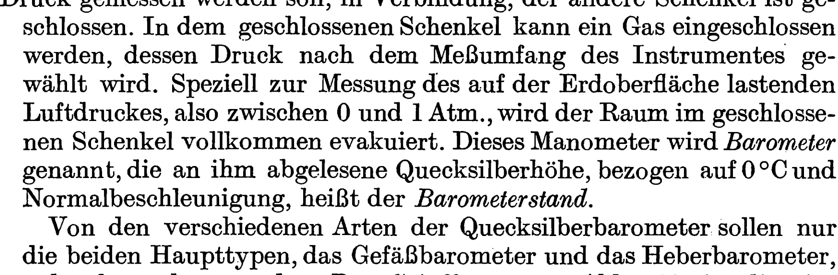
Des weiteren ist die Temperatur des Maßstabes, mit dem die Flüssigkeitshöhe gemessen wird, zu berücksichtigen. Da diese auf den Eispunkt zu beziehen ist, der Maßstab sich also, wenn z. B. bei Zimmertemperatur gemessen wurde, ausgedehnt hat, ist die wirkliche Höhe h_0 etwas größer. Ist β der lineare Ausdehnungskoeffizient des Maßstabes, so gilt

$$h_0 = h\,\frac{1 + \beta t}{1 + \beta' t} \approx h\,[1 - (\beta' - \beta)\,t]. \tag{8/18}$$

Für Messing gegen Quecksilber wird $\beta' - \beta = 0{,}000163$. Schließlich ist noch zu berücksichtigen, daß bei nicht benetzenden Flüssigkeiten sich im Manometerrohr eine konvexe Kuppe ausbildet, die die sog. *Kapillardepression* zur Folge hat. Diese ist tabelliert und beträgt beispielsweise für ein 10 mm weites Rohr bei Quecksilber 0,36 mm, wobei die Kuppe 1,0 mm hoch ist. Bei benetzenden Flüssigkeiten steigt infolge der Kapillarwirkung der Meniskus an, und zwar für Wasser um $30/d$, Toluol $13/d$ und Alkohol $11/d$, wenn d der Innendurchmesser des Rohres in mm ist. Diese

Korrektur ist allerdings nur anzubringen, wenn der Nullpunkt nicht abgelesen werden kann oder an verschiedenen Rohrweiten abgelesen werden muß.

8,52 *Geschlossene Manometer, Barometer* (*200*)



Bei den geschlossenen Flüssigkeitsmanometern steht ein Schenkel mit dem Raum, in dem der Druck gemessen werden soll, in Verbindung, der andere Schenkel ist geschlossen. In dem geschlossenen Schenkel kann ein Gas eingeschlossen werden, dessen Druck nach dem Meßumfang des Instrumentes gewählt wird. Speziell zur Messung des auf der Erdoberfläche lastenden Luftdruckes, also zwischen 0 und 1 Atm., wird der Raum im geschlossenen Schenkel vollkommen evakuiert. Dieses Manometer wird *Barometer* genannt, die an ihm abgelesene Quecksilberhöhe, bezogen auf 0 °C und Normalbeschleunigung, heißt der *Barometerstand.*

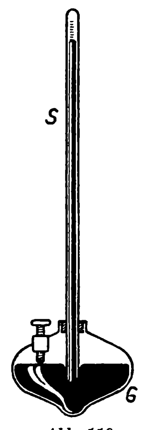
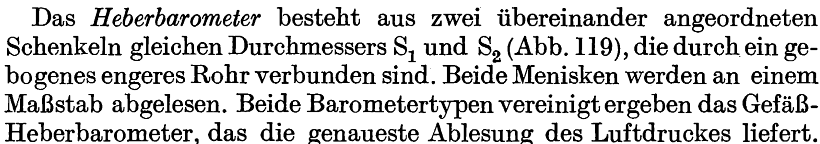


Abb. 118
Gefäßbarometer

Von den verschiedenen Arten der Quecksilberbarometer sollen nur die beiden Haupttypen, das Gefäßbarometer und das Heberbarometer, näher betrachtet werden. Das *Gefäßbarometer* (Abb. 118) ist die einfachste Form eines Barometers. Sein mit der Außenluft in Verbindung stehender Schenkel ist als weites Gefäß G mit großer Quecksilberoberfläche ausgebildet. In dieses Gefäß ragt der oben geschlossene lange Schenkel S hinein. Der Ablesemaßstab muß entweder beweglich sein, um bei Schwankungen des Luftdruckes den Nullpunkt stets auf die Oberfläche des weiten Schenkels einstellen zu können. Vielfach wird auch der kurze Schenkel so weit gewählt, daß dieser nicht mehr abgelesen zu werden braucht und man den Maßstab am langen Schenkel fest montieren kann.



Das *Heberbarometer* besteht aus zwei übereinander angeordneten Schenkeln gleichen Durchmessers S_1 und S_2 (Abb. 119), die durch ein gebogenes engeres Rohr verbunden sind. Beide Menisken werden an einem Maßstab abgelesen. Beide Barometertypen vereinigt ergeben das Gefäß-Heberbarometer, das die genaueste Ablesung des Luftdruckes liefert.

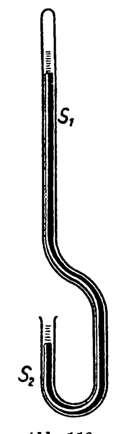


Abb. 119
Heberbarometer

Für die Quecksilberbarometer gilt bezüglich der Korrekturen das in § 8,51 Gesagte. Die Unsicherheit der Ablesung beträgt etwa $^1/_{20}$ mm.

Viel seltener sind für physikalische Messungen die sog. *Aneroidbarometer* in Gebrauch, bei denen die Durchbiegung einer Membran gemessen wird, die den Deckel einer flachen, evakuierten Metalldose bildet. Infolge der elastischen Hysteresis des Materials ist die Anzeigegenauigkeit wesentlich geringer als bei den Flüssigkeitsbarometern, obwohl die Handhabung und Ablesung bei jenen bequemer ist.

8,53 *Mikromanometer*

Druckmeßgeräte zur Messung sehr kleiner Druckunterschiede, wie sie für die Staugeräte erforderlich sind, bezeichnet man vielfach als Mikromanometer (*31*). Entsprechend ihrer technischen Durchbildung lassen sich drei Gruppen unterscheiden: 1. gewöhnliche Flüssigkeitsmanometer mit lediglich verfeinerter Ablesung; 2. Flüssig-

keitsmanometer mit einem gegen die Vertikale geneigten Schenkel; 3. Mikromanometer auf anderer physikalischer Grundlage. Auf eine weitere Gruppe von Instrumenten, die mit zwei verschiedenen Flüssigkeiten in einem U-Rohr arbeiten, deren Dichten sich nur sehr wenig voneinander unterscheiden und daher große Relativausschläge zur Folge haben, soll nicht näher eingegangen werden, da das Arbeiten damit unbequem ist und es leichter zu handhabende Instrumente mit mindestens derselben Empfindlichkeit gibt *(60)*.

8,531 *Mikromanometer mit verfeinerter Ablesung*

Um mit Flüssigkeitssäulen von relativ großer Höhe arbeiten zu können, verwendet man Flüssigkeiten geringer Dichte, wie Wasser, Petroleum, Alkohol, Toluol oder Xylol. Für Messungen geringerer Genauigkeit eignet sich hierzu das in Abb. 120 dargestellte PRANDTL*sche Steilrohrmanometer* (*280*). Dieses besteht aus dem weiten Ge-

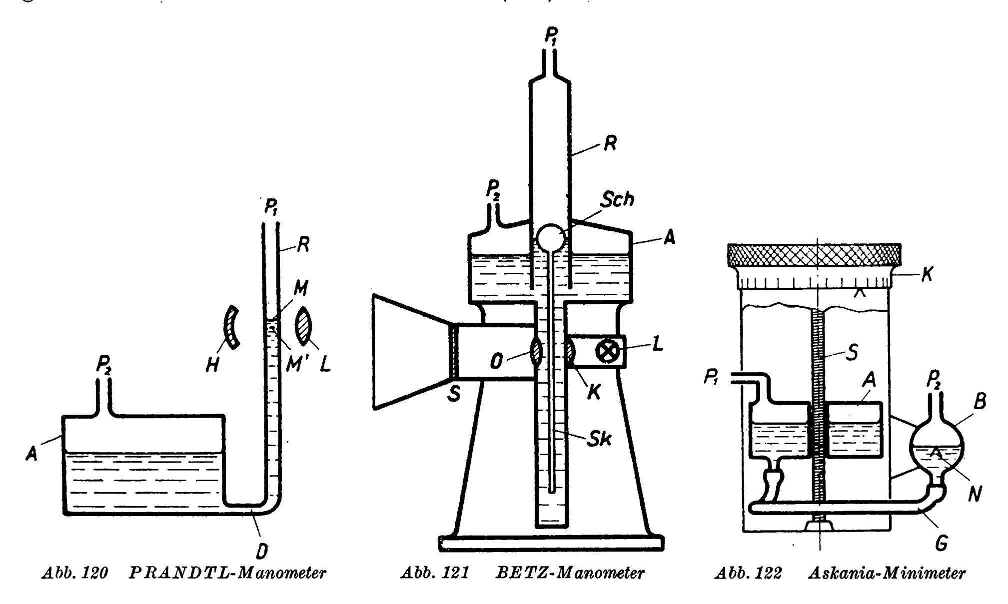


Abb. 120 PRANDTL-Manometer *Abb. 121 BETZ-Manometer* *Abb. 122 Askania-Minimeter*

fäß A, das mit Wasser oder Alkohol gefüllt ist, und dem senkrecht angeordneten Glasrohr R, an dem die zu messende Druckdifferenz abgelesen wird. Da der Querschnitt von A sehr viel größer als der von R ist, kann das Sinken des Flüssigkeitsspiegels in A vernachlässigt werden. Der Flüssigkeitsmeniskus in R wird durch die Lupe L abgelesen, die mit dem auf der anderen Rohrseite befindlichen Hohlspiegel H mechanisch verbunden ist. Das Ablesesystem wird so eingestellt, daß sich der wirkliche Meniskus M mit dem vom Hohlspiegel entworfenen, auf dem Kopf stehenden M′ gerade berührt. Die Druckdifferenz wird an der Stellung des optischen Systems auf einer feingeteilten Ableseschiene mittels Nonius auf $\frac{1}{20}$ mm WS (Wassersäule) abgelesen. Das Gerät besitzt gewöhnlich 300 mm WS Meßbereich. Um auch bei stark schwankendem Druck den Mittelwert richtig messen zu können, hat man zur

Dämpfung zwischen A und R bei D Kapillaren verschiedener Weite wahlweise eingeschaltet.

Das von BETZ (*30*) angegebene in der Abb. 121 dargestellte *Projektionsmanometer* gestattet eine genaue und bequeme Ablesung auch auf größere Entfernungen. Es besteht aus dem weiten Gefäß A und dem konzentrisch eingesetzten Steigrohr R. Der Unterschied der zu messenden an p_1 und p_2 liegenden Drucke wird an der in $\frac{1}{10}$ mm geteilten Glasskala Sk abgelesen, die an dem Schwimmer Sch hängt. Durch eine Projektionseinrichtung, die aus dem Lämpchen L, dem Kondensor K und dem Objektiv O besteht, werden die Skalenwerte auf der Mattscheibe S scharf abgebildet. Durch eine Feinteilung auf S lassen sich noch $\frac{1}{50}$ mm WS bequem ablesen.

Eine noch genauere Ablesung beim allerdings geringerem Meßbereich erlaubt das *Minimeter* der Fa. Askania (*90*). Dieses besteht, wie aus der Abb. 122 ersichtlich ist, aus dem Druckgefäß A, das durch die Spindel S gehoben und dessen Höhe mittels des Skalenknopfes K sehr genau abgelesen werden kann. Das unter dem größeren Druck p_2 stehende Gefäß B ist mit A durch den Gummischlauch G verbunden. Der gesuchte Druckunterschied wird in der Weise gemessen, daß A durch die Spindel so hoch gehoben wird, bis die Flüssigkeit (Wasser) im Schenkel B eine vorgegebene Einstellung erreicht hat. Der Höhenunterschied wird an der Skala des Teilkopfes K abgelesen. Der Nullpunkt läßt sich dadurch besonders genau einstellen, daß B unter Wasser eine feine, vergoldete Spitze N als Einstellmarke besitzt, die durch eine Mattscheibe von einer Seite beleuchtet und durch Lupe und Spiegel von der anderen Seite aus beobachtet wird. Die Einstellung ist richtig, wenn sich die Spitze und ihr durch Totalreflexion an derWasseroberfläche entstandenes Spiegelbild gerade berühren. Der Vorteil der durch die relativ großen Oberflächen in A und B vermiedenen Kapillardepression ist allerdings mit einer großen Einstellzeit erkauft.

Schließlich läßt sich die Genauigkeit der Ablesung der Höhenunterschiede zweier Flüssigkeitssäulen durch optische Hilfsmittel sehr weit, allerdings wegen der schwierigen Handhabung nur in Sonderfällen, steigern (*52*). BARUS (*14*) mißt den Druckunterschied zweier mit Quecksilber gefüllten Schenkel interferometrisch, wie etwa beim Interferenz-Komparator nach KÖSTERS (§ 2,42). Die beiden nebeneinander angeordneten Schenkel sind oben mit planparallelen Platten verschlossen und so weit, daß sich in der Mitte vollkommen ebene Quecksilberspiegel ausbilden können. Bei der Einstellung macht sich allerdings die durch die Oberflächenspannung bedingte Hysteresis bemerkbar.

8,532 *Manometer mit geneigtem Schenkel*

Eine weitere Möglichkeit, die Ablesegenauigkeit bei Flüssigkeitsmanometern zu vergrößern, besteht darin, den Schenkel, dessen Höhe abzulesen ist, in einem kleinen Winkel gegen die Horizontale anzuordnen. Derartige Manometer mit wesentlich gesteigerter Empfindlichkeit wurden zuerst von RECKNAGEL konstruiert und von KRELL und BLOCK (*35*) verbessert.

Wie aus Abb. 123 ersichtlich ist, herrscht zwischen dem weiten Gefäß A und dem Neigungsrohr R der Druckunterschied

$$\Delta p = h \cdot \gamma = (n - n_0)\, \gamma \cdot \sin \alpha, \tag{8/19}$$

wenn h die Druckhöhe, γ die Dichte der Füllflüssigkeit, n und n_0 die abgelesenen Teilstriche in mm sind. Dabei kann man den Rohrquerschnitt gegen den des Gefäßes A vernachlässigen. Da bei kleinen Neigungswinkeln α eine Unsicherheit bei seiner Bestimmung besteht, außerdem die Röhre R nie genau gerade ist, empfiehlt sich für genaue Messungen eine Eichung.

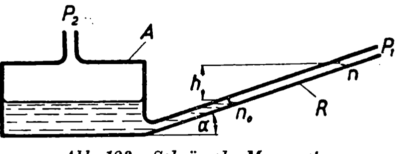


Abb. 123 Schrägrohr-Manometer

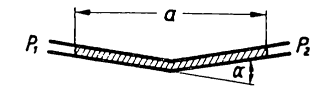


Abb. 124 TOEPLERsche Drucklibelle

Für äußerst geringe Druckunterschiede stellt die TOEPLERsche *Drucklibelle* ein sehr empfindliches Nachweisinstrument dar. Sie besteht aus einem dünnen, in der Mitte um einen sehr kleinen Winkel α geknickten Glasrohr (Abb. 124), dessen Enden unter dem Druckunterschied $p_2 - p_1 = \Delta p$ stehen. Zunächst beobachtet man unter dem Mikroskop das eine Ende des Flüssigkeitsfadens. Verschiebt sich nun dieses, wird die Libelle durch eine Meßschraube so weit geneigt, bis das Fadenende wieder in den Nullpunkt wandert. Beträgt die aus der Schraubensteigung und der Hebellänge errechenbare Neigung φ und die Länge des Fadens a, so gilt für den Druckunterschied

$$\Delta p = \gamma \cdot a \sin \varphi, \tag{8/20}$$

wenn γ die Dichte der Füllflüssigkeit ist. Um Temperaturunterschiede an den verschiedenen Stellen des Fadens und damit Meßfehler zu vermeiden, bringt man die Libelle in ein Wasserbad. Mit kleinen Knickwinkeln lassen sich noch 10^{-4} mm WS messen.

8,533 *Manometer auf anderen Grundlagen* (*377*)

Die vorgenannten, fast ausschließlich für physikalische Messungen gebrauchten Manometer werden durch ein technisches Gerät, die sog. *Ringwaage* (*235*), ergänzt, die schematisch in Abb. 125 dargestellt ist. Sie besteht aus einem kreisförmig gebogenen Rohr R aus Glas oder Stahl, das durch die Trennwand W abgeteilt ist und im Kreismittelpunkt M drehbar auf einer Schneide lagert. Die Zuleitungen der Differenzdrucke p_1 und p_2 sollen möglichst ohne Richtwirkung auf das Waagesystem sein. Das Kreisrohr ist teilweise mit einer Sperrflüssigkeit gefüllt (Wasser oder Quecksilber). Der gemeinsame Schwerpunkt S liegt im Abstand s von der Drehachse M und übt ein rücktreibendes Moment $G \cdot s \cdot \sin \alpha$ aus, wenn G das Gewicht des beweglichen Systems und α Drehwinkel aus der Ruhelage sind. Bezeichnet man mit q den lichten Querschnitt und mit R den mittleren Radius des Kreisrohres, so berechnet sich der gesuchte Druckunterschied zu

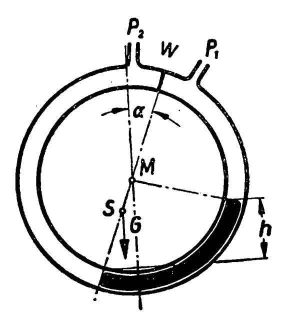


Abb. 125 Ringwaage

$$\Delta p = \frac{G s \cdot \sin \alpha}{R \cdot q}. \tag{8/21}$$

Für kleine Drehwinkel ist dieser dem Druck proportional. Der Meßbereich ist durch geeignete Wahl der in Gleichung (8/21) enthaltenen Apparatekonstanten leicht zu

variieren. HICKMANN (*164*) hat mit einem mit Quecksilber gefüllten Mikromanometer nach einem ähnlichen Prinzip den Meßbereich von 10^{-2} bis 5 Torr bestreichen können. Auch für die Differenzdruckmessung bei sehr großen Drucken wird die Ringwaage verwendet. Das Kreisrohr besteht in diesem Druckbereich aus Stahlrohr, die Druckzuführungen werden senkrecht zur Rohrebene durch den Mittelpunkt M gehend angebracht und ebenfalls aus dünnem Stahlrohr gefertigt, wodurch natürlich ein erhebliches Rückstellmoment zustande kommt.

Die relativ großen, bei der Anzeige auftretenden Drehmomente um M erlauben den Einbau eines „Fernsenders", ohne die Meßgenauigkeit wesentlich zu beeinträchtigen. Dieser Drehwinkelgeber gestattet, den Ausschlag α der Ringwaage in elektrische Widerstandswerte umzuformen und entspricht grundsätzlich der elektrischen Anordnung in Abb. 15 mit dem Unterschied, daß die Widerstände auf einem um M geschlagenen Kreis abgegriffen werden. Auch beim Schrägrohrmanometer ist nach SIMON und FEHÉR (*325*) eine elektrische Anzeige auf die Weise möglich, daß man den schrägen Schenkel als Zylinderkondensator konstruiert und die mit der Flüssigkeitshöhe veränderliche Kapazität als Meßgröße benutzt. Bei Manometern, die mit Quecksilber gefüllt sind, läßt sich eine sehr genaue und einfache Fernmessung dadurch erreichen, daß man im Manometerschenkel einen Platindraht axial und isoliert ausspannt und dessen Widerstand bestimmt.

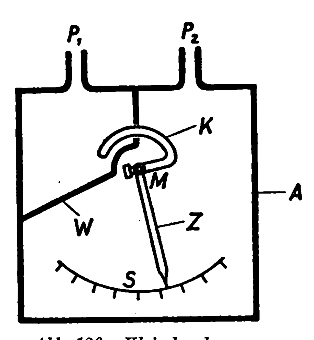


Abb. 126 Kleindruckwaage nach REICHARDT

Für äußerst kleine Druckunterschiede verwendet man die *Kleindruckwaage* nach REICHARDT (*287*), deren Aufbau aus der Abb. 126 ersichtlich wird. Sie besteht aus dem quadratischen Gehäuse A, das durch die Trennwand W in zwei Räume, in denen die Drucke p_1 und p_2 herrschen, abgeteilt wird. Der am Zeiger Z befestigte Kolben K ist halbkreisförmig gebogen und in seinem Mittelpunkt M, der zugleich Schwerpunkt des ganzen beweglichen Systems ist, an einem Torionsfaden aufgehängt. Der Kolben kann sich in einer zylindrischen Bohrung in der Wand W reibungslos bewegen, da zwischen Kolben und Bohrung ein Spalt von 0,15 mm vorhanden ist. Ist p_2 etwas größer als p_1, so wird der Kolben entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn in die linke Kammer hineingedreht, bis sich das Produkt Kolbenfläche · Druckunterschied · Hebelarm und das Torsionsmoment des Fadens das Gleichgewicht halten. Da bei der Messung ständig Luft durch den Spalt fließt, kann bei langen und dünnen Meßleitungen der durch diese verursachte Druckabfall das Ergebnis merklich fälschen. Der Meßbereich des Instrumentes beträgt 0,1 mm WS, wobei 10^{-5} mm WS noch ablesbar sind.

8,54 *Messungen bei periodisch schwankendem Druck*

Bei periodisch sich ändernden Drucken gibt das Flüssigkeitsmanometer die wirklichen Druckschwankungen nicht ohne weiteres an. Andererseits machen oft starke Druckschwankungen die Feststellung des mittleren Druckes unmöglich. In vielen Fällen wird hierbei der Einbau geeigneter Drosselorgane in die Druckleitung Abhilfe bringen, wenn nicht schon das Druckmeßgerät ein solches enthält, wie das z. B. beim

Manometer nach PRANDTL (§ 8,531) der Fall ist. Handelt es sich um periodische Änderungen der Form $p = p_m + a \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)$, wobei p_m der mittlere Druck und a die mit der Frequenz $\frac{1}{\tau}$ sinusförmig schwankende Amplitude im Maximalfall sein sollen, so läßt sich der mittlere Druck wesentlich genauer aus der Beobachtung der Umkehrpunkte der Schwingung bestimmen. Zu diesem Zweck bringt man die Eigenschwingungsdauer des Manometers τ_0 mit der Schwingungsdauer der erregenden Schwingung τ in Übereinstimmung. Bezeichnet man die Länge der gesamten Flüssigkeitssäule mit l und ist g die Erdbeschleunigung, so lautet die Resonanzbedingung

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}, \qquad (8/22)$$

die also unabhängig vom Rohrquerschnitt und der Dichte der Füllflüssigkeit ist.

8,6 Eichung der Manometer

Für die Eichung von Mikromanometern, sofern die Eichkurve nicht rechnerisch ermittelt werden kann, verwendet man Druckwaagen, bei denen der zu messende Druckunterschied $p_1 - p_2$ auf eine bekannte Fläche die Kraft $(p_1 - p_2) F$ ausübt. Eine gebräuchliche Form ist in Abb. 127 dargestellt. A ist ein mit Wasser gefülltes Gefäß, in das die am Waagebalken W aufgehängte Taucherglocke T taucht und beim Druckunterschied Null durch das Gewicht g_1 austariert wird. Wird der zu messende Druck p_1 durch das Rohr R dem Innenraum der Glocke zugeführt, so muß ein Zusatzgewicht $g_2 = (p_1 - p_2) F$ auf die Glocke gebracht werden, um wieder das Gleichgewicht herzustellen. Für genaue Messungen muß die Wandstärke der Glocke und der damit verbundene Auftrieb berücksichtigt werden. Bezeichnet man mit R den mittleren Radius der Glocke, mit d die Wandstärke des zylindrischen Teiles, mit ϱ die Dichte der Füllflüssigkeit, so gilt

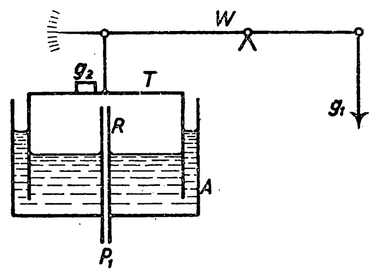


Abb. 127 Taucherglocke

$$\Delta p = \frac{g_2}{\pi\left(R - \frac{d}{2}\right)^2 + \pi\, \varrho\, d\, R}. \qquad (8/23)$$

Die „trockene“ Askania-Druckwaage besteht aus zwei einseitig geschlossenen Zylindern, die sehr genau aufeinander passen und deren sich berührende Kanten keilförmig abgedreht sind. Im Gleichgewichtszustand berühren sich die Zylinder nicht ganz, es bleibt vielmehr ein enger Spalt offen, durch den die Luft entweicht. Eine Korrektion bei der Eichung ist wegen der genau bestimmten Fläche nicht erforderlich.

8,7 Druckmessung an rotierenden Teilen

Sollen Druckmessungen an sich drehenden Teilen vorgenommen werden, so kann man sich nach MEISSNER (*240*) folgender Anordnung, die in Abb. 128 dargestellt ist,

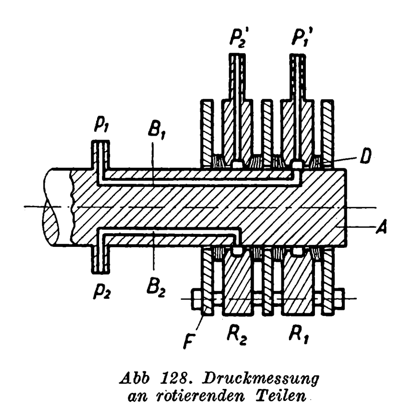


Abb 128. Druckmessung an rotierenden Teilen

bedienen. Die Welle A des sich drehenden Apparateteiles, an dem die Drucke gemessen werden sollen, wird in der gezeichneten Weise mit einer Anzahl (in der Abbildung sind nur zwei angegeben) Bohrungen B_1 und B_2 versehen. Zur Abnahme des Druckes dienen die feststehenden Ringe R_1 und R_2 mit eingedrehten ringförmigen Nuten. Die Abnahmeringe werden gegeneinander und gegen die Achse A durch Ledermanschetten D abgedichtet, die durch die Scheiben F mit Hilfe von Zugbolzen gegen die Ringe gepreßt werden. Der feststehende Abnahmeteil mit den Druckableitungen p_1' und p_2' wird durch einen Haltearm am Mitdrehen verhindert.

8,8 **Erzeugung hoher Gasgeschwindigkeiten** (*31*)

Für eine Reihe von physikalischen Aufgaben ist die Erzeugung eines Gasstromes hoher Geschwindigkeit von Bedeutung, so etwa bei der Untersuchung des Wärmeüberganges, des Reibungswiderstandes an festen Körpern und der Zähigkeit von Gasen oder Flüssigkeiten. Für Gasgeschwindigkeiten unterhalb der Schallgeschwindigkeit bedient man sich fast ausschließlich axialer Gebläse (Ventilatoren) mit mehreren Flügeln.

8,81 *Strahltheorie der Gebläse*

Eine für den vorliegenden Fall ausreichende Behandlung des Axialgebläses liefert die *Strahltheorie* nach Rankine. Das Gebläse besteht aus mehreren Flügeln, die gegen die Durchtrittsrichtung des Gasstromes einen *Anstellwinkel* besitzen und bei geeigneter Wahl der Flügelbreite die durchtretenden Teilchen beschleunigen. Von der Rotationsbewegung um die Gebläseachse soll abgesehen werden. Es sei also ein ideales Gebläse betrachtet, das jedem durch die Schraubenebene tretenden Gasteilchen eine Druckerhöhung Δp erteilt, während die außerhalb des Gebläseumfangs vorbeiströmenden Teilchen eine solche Veränderung nicht erfahren. Nun betrachtet man, wie in Abb. 129 dargestellt ist, die Schraubenfläche F, der das Gas mit der konstanten Geschwindigkeit v zuströmt. Die abströmende Flüssigkeit besitze die Geschwindigkeit v', beide in einer Entfernung von der Schraubenebene betrachtet, in der das Druckfeld der Schraube sich ausgeglichen hat, wo also der ungestörte Druck p_0 herrscht. Die Durchströmungsgeschwindigkeit durch F ist unter dem Einfluß des Druckfeldes von v verschieden, liegt zwischen v und v' und ist auf Grund der Kontinuität unmittelbar vor und hinter der Schraubenebene dieselbe; sie sei mit v_1 bezeichnet. Der

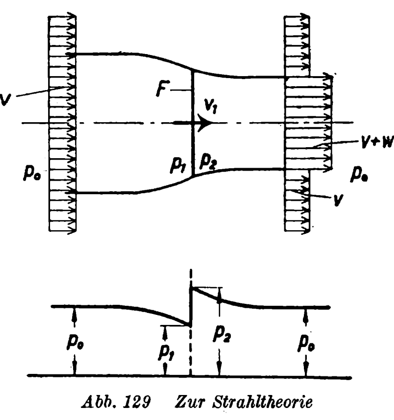


Abb. 129 Zur Strahltheorie

Drucksprung kommt so zustande, daß der Druck p_1 unmittelbar vor der Schraubenebene niedriger, der Druck p_2 hinter dieser aber höher als der ungestörte Druck wird. Auf die Schraubenebene F wirkt daher eine Kraft $S = (p_2 - p_1) F$, die man als den *Gebläseschub* bezeichnet. Die sekundliche Nutzarbeit oder Nutzleistung N_0 wird also $S \cdot v$. Wird durch das Gebläse sekundlich der Masse M die Geschwindigkeit w erteilt, so wird nach dem Impulssatz $S = M \cdot w$. Zu dieser Arbeit wird der sekundliche Mehraufwand $N' = M \frac{w^2}{2}$ verbraucht. Ist der Schub, also das Produkt $M \cdot w$, gegeben, so wird N' offenbar um so kleiner, je größer M, also die erfaßte Gasmasse, ist. Der theoretische Wirkungsgrad berechnet sich also zu

$$\eta_{\mathrm{th}} = \frac{N_0}{N_0 + N'} = \frac{S \cdot v}{S v + S \frac{w}{2}} = \frac{v}{v + \frac{w}{2}}. \tag{8/24}$$

Die noch unbekannte Geschwindigkeit w läßt sich aus der BERNOULLIschen Gleichung ermitteln, wenn man diese auf die beiden Seiten der Schraubenebene anwendet.

$$p_0 + \varrho \frac{v^2}{2} = p_1 + \varrho \frac{v_1^2}{2}$$

$$p_0 + \varrho \frac{(v + w)^2}{2} = p_2 + \varrho \frac{v_1^2}{2}.$$

Für den Drucksprung $\Delta p = p_2 - p_1$ ergibt sich durch Subtraktion

$$\Delta p = \varrho w \left(v + \frac{w}{2}\right), \tag{8/25}$$

woraus sich der Schub S zu

$$S = F \Delta p = F \varrho w \left(v + \frac{w}{2}\right) \tag{8/26}$$

berechnet oder, wenn man die durch F tretende Gasmenge $\varrho F v_1$ betrachtet:

$$S = \varrho F v_1 w. \tag{8/27}$$

Durch Vergleich der Gleichung (8/26) und (8/27) erhält man

$$v_1 = v + \frac{w}{2}. \tag{8/28}$$

Beachtet man Gleichung (8/26), so ergibt sich für w der Ausdruck

$$w = \sqrt{v^2 + \frac{2 S}{\varrho F}} - v. \tag{8/29}$$

Um also einen guten Wirkungsgrad nach Gleichung (8/24) für den Betrieb des Gebläses zu bekommen, muß w im Vergleich zu v klein sein. Unter Einführung des Belastungsgrades

$$c_s = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} v^2 F}$$

bekommt man für das Verhältnis w/v den Ausdruck

$$\frac{w}{v} = \sqrt{1 + c_s} - 1 . \tag{8/30}$$

Setzt man (8/30) in die Gleichung (8/24) ein, so wird damit der theoretische Gebläsewirkungsgrad

$$\eta_{\text{th}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_s}} . \tag{8/31}$$

Je geringer also der Belastungsgrad des Gebläses ist, um so mehr nähert sich der theoretische Wirkungsgrad dem Wert 1. Sind die Schraubenfläche F und der Schub S gegeben, so läßt sich die obere Grenze des Wirkungsgrades bei einer vorgegebenen Durchflußgeschwindigkeit v aus (8/31) berechnen. Der wirkliche Wirkungsgrad ist merklich geringer als η_{th}, da die Rotation des Schraubenstrahles, Wirbel- und Reibungsverluste an den Gebläseflügeln bei dieser einfachen Betrachtungsweise unberücksichtigt geblieben sind.

8,82 *Gebläsebauarten*

Je nach dem Zweck und dem für eine vorgegebene Aufgabe erforderlichen Strahlquerschnitt wird man die Bauart des Gebläses wählen. Für relativ geringen Strahldurchmesser eignet sich die in Abb. 130 dargestellte Anordnung wegen ihrer Einfachheit. Das von einem Elektromotor M, der in einer stromlinig verkleideten Nabe untergebracht ist, angetriebene Gebläse P läuft in einem kurzen zylindrischen Rohr, das in eine Düse vom Querschnitt F_d, der Düsenfläche, ausläuft. Besitzt der austretende Gasstrom die Düsengeschwindigkeit v_d, so wird die aufzuwendende Antriebsleistung ohne Berücksichtigung der sonstigen kinetischen Energieverluste der pro Sekunde durchfließenden Gasmasse M entsprechen, also

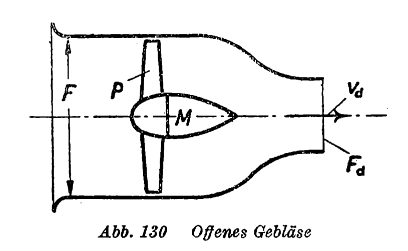


Abb. 130 Offenes Gebläse

$$N = M \cdot \frac{v_d^2}{2} = \frac{\varrho}{2} F_d \cdot v_d^3 . \tag{8/32}$$

Der Vorteil des einfachen Aufbaus wird durch eine große Antriebsleistung, ferner durch eine verhältnismäßig große *Turbulenz* und ungleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung des austretenden Gasstrahles erkauft. Durch Einbau einer längeren Beruhigungsstrecke und eines Gleichrichters aus dünnen, zylindrischen Rohren in Strömungsrichtung erhält man eine gleichmäßigere Verteilung der Gasgeschwindigkeit.

Wesentlich günstigere Verhältnisse in bezug auf Antriebsleistung und Geschwindigkeitsverteilung lassen sich erzielen, wenn hinter die Düse des Gebläses ein sich schwach erweiternder Rohrteil, der *Diffusor*, angesetzt wird, der entsprechend dem Verhältnis seiner Endquerschnitte einen Teil der kinetischen Energie der Düsenströmung in Druckenergie umsetzt. Eine gebräuchliche Anordnung ist in der Abb. 131 dargestellt. Das Gebläse P ist in diesem Fall auf der Saugseite des Windkanals angeordnet, wodurch Wirbel um die Symmetrieachse vermieden werden. In der Ansaugöffnung vom

Querschnitt F ist ein Gleichrichter G angeordnet, um eine gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung über den Düsenquerschnitt F_d zu bewirken. An die *Meßstrecke* M, in der die zu untersuchende Anordnung montiert ist, schließt sich der schwach konische Diffusor R an, dessen Endquerschnitt wieder die Größe F besitzen möge. Da die Gasmasse aus der Ruhe auf die Austrittsgeschwindigkeit v beschleunigt wird, ist nach Gleichung (8/32) die Antriebsleistung $N = \frac{\varrho}{2} F\, v^3$ aufzubringen. Da $v = v_d \cdot F_d/F$ ist, gilt:

$$N = \frac{\varrho}{2} v_d^3 \cdot \frac{F_d^3}{F^2} = \frac{\varrho}{2} v_d^3 F_d \left[1 - \left(1 - \frac{F_d^2}{F^2}\right)\right]. \tag{8/33}$$

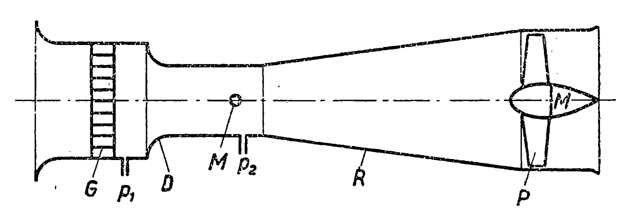


Abb. 131 Windkanal

Die Größe $1 - F_d^2/F^2$ bezeichnet man als Diffusorwirkungsgrad η_d, da diese den in Druckenergie umgewandelten Teil der kinetischen Energie der Düsenströmung darstellt. Die theoretische Antriebsleistung kann also gegenüber dem *Freistrahlgebläse* (Abb. 130) wesentlich herabgesetzt werden. Zur Geschwindigkeitsmessung im Meßquerschnitt sind die vor und hinter der Düse D angebrachten Anbohrungen p_1 und p_2 vorgesehen (siehe S. 136). Um die angegebene Diffusorwirkung auch tatsächlich zu erreichen, darf sich der Gasstrahl nicht von der Wand ablösen; der Kegelwinkel des Diffusors soll daher je nach Geschwindigkeit zwischen 8° und 11° liegen. Nachteilig bei dieser Konstruktion ist die geschlossene Meßstrecke, die den Einbau des Versuchsgerätes und die Messung an diesem erschwert. Ferner muß besonders bei hohen Geschwindigkeiten die Änderung des statischen Druckes längs der Rohrachse berücksichtigt werden. Gegenüber dem oben beschriebenen Freistrahlgebläse ergibt sich bei dieser Bauart jedoch ein praktischer Leistungsbedarf, der nur 10 bis 20% von jenem beträgt.

Durch Auftrennen des Windkanals der Abb. 131 an der Meßstrecke läßt sich bei nur geringem Zuwachs der erforderlichen Leistung der Vorteil einer freien Meßstrecke gewinnen, die bei der Versuchsdurchführung allseitig zugänglich ist. Werden bei dieser Anordnung Ein- und Ausströmöffnung durch eine Rückleitung von großem Querschnitt verbunden, so erhält man eine bis auf den Meßquerschnitt geschlossene Ausführung („deutsche Bauart") mit verhältnismäßig kleinem Leistungsbedarf. Zur Umlenkung des Gasstrahles sind an den Ecken sog. Umlenkecken, d. h. Blechschaufeln, angebracht, die eine Wirbelbildung und damit zusätzliche Verluste vermeiden. Für sehr große Windkanäle sind diese Umlenkschaufeln hohl und werden zur Kühlung des Gasstrahles von Wasser durchflossen. Für Messungen bei Unter- oder Überdruck kann man diese Bauart in einen vollkommen geschlossenen Kreislauf umwandeln, indem man um die Meßstrecke eine gasdichte Druckkammer anbringt.

Für Messungen im *Überschallbereich* werden für kleinere Meßquerschnitte große

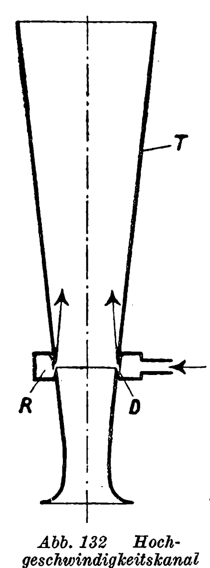


Abb. 132 Hochgeschwindigkeitskanal

Kessel als Druckspeicher benutzt, die man entweder mit Druckluft füllen oder leerpumpen kann. Läßt man den Gasstrahl durch eine Düse von geeigneter Form strömen, so kann man nach Belieben Geschwindigkeiten über der Schallgeschwindigkeit für eine kurze Zeit (5 bis 10 Sekunden) erzeugen. Druckluftanlagen haben den Nachteil, daß durch die adiabatische Ausdehnung des Kesselinhaltes sich die Temperatur und damit die Dichte des Gasstrahles ändert. Eine indirekte Anwendung von Druckluft ist in der Abb. 132 gezeigt, mit der etwa Schallgeschwindigkeit erreicht werden kann. Die Druckluft wird dabei durch eine ringförmige Düse D des Ringkanals R mit großer Geschwindigkeit in den Diffusor T ausgeblasen und saugt durch den sich einstellenden Unterdruck Außenluft an, die regelbar bis zur maximalen Schallgeschwindigkeit beschleunigt werden kann.

Im Vakuumbetrieb bringt man vor die eigentliche Meßdüse eine engere Düse, an der sich Schallgeschwindigkeit einstellt. Um die sehr kurzen Versuchszeiten gut nutzen zu können, ist zwischen Kessel und Düse ein Schnellschlußhahn mit großem Durchschnittsquerschnitt angeordnet, der mit den Meßvorrichtungen zusammen elektrisch betätigt wird.

§ 9 KRAFTMESSUNG

9,1 Definition und Einheiten

Die Bildung des Kraftbegriffes geht von dem Druckgefühl aus, das wir empfinden, wenn unser Körper mit einem zweiten in Berührung kommt. Wir fassen die Kraft als Wechselwirkung zwischen zwei Körpern auf und wissen, das der von uns gedrückte Körper eine gleich große Kraft auf uns ausübt, was den Inhalt des 3. NEWTONschen Gesetzes darstellt. Die Kraft ist ein Vektor, ist also durch Größe und Richtung ausgezeichnet. Sie ist streng genommen stets auf die Angriffsfläche stetig verteilt; in vielen Fällen genügt es jedoch, einen Angriffspunkt anzunehmen, der dann zur vollständigen Kennzeichnung einer vorgegebenen Kraft gehört.

Es lassen sich zwei Gruppen von Kräften unterscheiden: 1. die *Massenkräfte*, die auf sämtliche in einem Volumen enthaltenen Massenelemente wirken und der Masse proportional sind, z. B. Schwere, Zentripetalbeschleunigung; 2. die *Flächenkräfte*, die nur an der Oberfläche eines Körpers angreifen. Der Quotient aus der resultierenden, auf ein Flächenstück wirkenden Kraft und dessen Fläche heißt der mittlere Druck, beim Übergang zu unendlich kleinen Flächenelementen der Druck. Wirkt die Kraft in Richtung der Flächennormalen nach innen, spricht man speziell von *Druck*; wirkt die Kraft in umgekehrter Richtung, spricht man von *Zug*. Besitzt die Kraft eine Komponente in der Flächenebene, so nennt man sie *Scherung*, wie z. B. bei der Torsion und der Reibung.

Als Einheit der Kraft haben wir in § 4,1 im physikalischen Maßsystem das dyn bzw. Großdyn kennengelernt, wobei 1 kg-Gewicht $= 9{,}81 \cdot 10^5$ dyn $= 9{,}81$ Dyn gesetzt wird. Nach dem neuen von G. GIORGI vorgeschlagenen Maßsystem, dessen Vorteile sich besonders in der Elektrodynamik auswirken, wird die Einheit der Kraft das Dyn.

Zeitlich unveränderliche Massenkräfte werden gewöhnlich durch Vergleich mit Gewichten bekannter Größe gemessen, wozu man sich der Waagen (§ 4) bedient. Auch die meisten der im § 7 beschriebenen Druckmeßverfahren vergleichen den zu messenden Druck mit dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule oder eines Festkörpers.

Für die absolute Kraftmessung lassen sich eine Reihe von physikalischen Erscheinungen heranziehen, bei denen eine Meßgröße (Länge, elektrische und optische Eigenschaften) von der wirksamen Kraft bzw. dem Druck eindeutig abhängt.

9,2 **Elastische Kraftmessung** (*102*)

In der Festigkeitslehre ist die Frage der Belastbarkeit eines Bauteiles hinsichtlich seiner Formgebung und der Festigkeitseigenschaften des Materials von großer Bedeutung. Durch die Krafteinwirkung entstehen elastische Spannungen (Zug-, Druck- und Schubspannungen), deren Resultierende der äußeren Kraft das Gleichgewicht hält. Nach dem HOOKEschen Gesetz besteht in einem weiten Bereich ein linearer Zusammenhang zwischen der Deformation und der einwirkenden Kraft. Wird etwa ein Stab vom Querschnitt q und der Länge l in Längsrichtung durch eine Kraft P gezogen, so gilt für die Längenänderungen Δl

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{q\,E}. \qquad (9/1)$$

Die Stoffkonstante E nennt man *Elastizitätsmodul.* Ein ähnlicher Zusammenhang gilt für eine tangentiale Beanspruchung des elastischen Körpers, z. B. bei der Torsion eines prismatischen Stabes von der Länge l, der einseitig eingespannt ist und durch ein Moment M verdreht wird. Für den Verdrehungswinkel φ gilt dann

$$\varphi = \frac{M\,l}{G \cdot J_p}, \qquad (9/2)$$

wobei G als *Schubmodul* bezeichnet wird und J_p das polare Trägheitsmoment des Stabquerschnittes ist (§ 11,41). In beiden Fällen läßt sich durch Messung der Dehnung bzw. des Verdrehungswinkels die Kraft bzw. das Moment bestimmen. In räumlichen Spannungszuständen ist die auf die Fläche bezogene Kraft, die elastische Spannung σ, eine Funktion des Ortes und kann um so genauer gemessen werden, je kleiner die Meßlänge l des *Dehnungsmessers* ist. Die hierbei festzustellenden Längenänderungen Δl sind meistens so gering, daß man eine ausreichende Meßempfindlichkeit nur durch mittelbare Verfahren der Längenmessung (§ 2,5) erhält (*162*). Dabei ist darauf zu achten, daß die Rückstellkraft des Meßgerätes gegenüber den zu messenden Kräften zurücktritt. Die bei zeitlich sich ändernden Kräften hervortretenden dynamischen Eigenschaften dieser Dehnungsmesser werden in § 9,5 besprochen werden.

Für die absolute Kraftmessung ist die sog. *Federwaage* von Bedeutung, die auf der elastischen Dehnung einer Schraubenfeder beruht und sowohl für feine Wägungen als auch zur Messung zeitlich veränderlicher Kräfte (Indikator) angewandt wird. Die Theorie der Schraubenfeder wird im § 11,5 behandelt.

Ferner gehören hierher alle elastischen Druckmesser, wie Röhrenfeder- und Membran-Manometer, bei denen die Streckung der Feder bzw. die Durchbiegung der Membran eine lineare Funktion des Druckes sind.

9,3 Piezoelektrische Verfahren (*26*)

Bereits bei der Behandlung der Resonanzschwingungen eines elektrisch erregten Quarzstabes, wie er im quarzgesteuerten Sender verwendet wird (§ 3,51), ist der Piezoeffekt besprochen worden. Dieser besteht darin, daß sich die Flächen eines geeignet aus einem Quarzkristall herausgeschnittenen Parallelepipeds elektrisch aufladen, wenn dieses elastisch deformiert wird. Gewöhnlich wird die Quarzplatte in der in Abb. 32 gezeigten Orientierung aus dem Bergkristall geschnitten und meist in der in den Abb. 33a und b dargestellten Weise belastet. Dabei entsteht auf den zur elektrischen Achse senkrechten Flächen eine elektrische Ladung Q, die dem Druck, d. h. der Kraft $P \times$ Fläche F, exakt proportional ist. Es gilt

$$Q = P \cdot d, \tag{9/3}$$

worin d die *piezoelektrische Konstante* ist. Die Ladung Q hängt also nur von der wirksamen Kraft P, nicht aber von der gedrückten Fläche ab. Dividiert man die beiden Seiten der Gleichung (9/3) mit der Fläche F, so erkennt man, daß die Ladung pro Flächeneinheit der Spannung P/F proportional ist. Im Falle der Abb. 33b werden sich die beiden Flächen f_x und f_x' positiv und negativ aufladen; kehrt man die Kraftrichtung um (Zug), so wechselt auch das Vorzeichen der Ladungen. Macht man die beiden Flächen z. B. durch Versilbern elektrisch leitend, so beträgt die zwischen den beiden Elektroden meßbare Spannung U

$$U = \frac{P \cdot d}{C} = \frac{d \cdot P \cdot a}{F \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon}, \tag{9/4}$$

wenn C die zwischen den Elektroden vorhandene Kapazität bezeichnet, die sich aus der Fläche F, dem Abstand a und den Dielektrizitätskonstanten ε_0 (abs. DK = $0{,}8859 \cdot 10^{-13}$ As/Vcm) und ε (DK des Quarzes) berechnen läßt. Für Quarz beträgt $\varepsilon \approx 4{,}5$ und $d = 0{,}207$ C/kg. Die entstehenden Spannungen sind also von der Größenordnung 10 V/kg und daher gut meßbar. In Wirklichkeit wird man nicht die volle Spannung am Meßgerät feststellen können, da die Kapazität des Meßinstrumentes C_i und die der Zuleitungen C_l der Kapazität der Quarzplatte C_q. parallelgeschaltet zu denken ist. Die tatsächlich gemessene Spannung U' wird deshalb

$$U' = \frac{d \cdot P}{C_q + C_i + C_l}, \tag{9/4a}$$

im allgemeinen nur ein Bruchteil von U, da C_q sehr klein ist. Wegen der verhältnismäßig großen elektrischen Ladungen, die bereits bei geringen Drucken erzeugt werden, und des außerordentlich hohen Isolationswiderstandes und großen Elastizitätsmoduls von Quarz wird dieser vor allem für viele physikalische Meßaufgaben herangezogen. Der Temperatureffekt auf die piezoelektrische Konstante d ist vernachlässigbar klein.

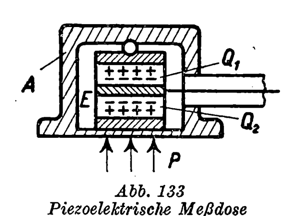


Abb. 133
Piezoelektrische Meßdose

Eine Ausführungsform eines Kraftmeßgerätes ist in der Abb. 133 gezeigt. In einem Gehäuse A aus Stahl, das zur Übertragung des Druckes P eine dünne, elastische Bodenplatte besitzt, sind die beiden Quarzplatten Q_1 und Q_2 zwischen geschliffenen Scheiben eingepaßt. Die elektrischen Achsen der beiden Quarze haben entgegengesetzte Richtung, so daß die zwischen Q_1 und Q_2 befindliche Ableitungselektrode E bei Druckbeanspruchung von beiden Quarzen

negative Ladung erhält. Außerdem erübrigt sich bei diesem Aufbau eine zusätzliche Isolierung. Durch eine abgeschirmte Leitung, deren Kapazität unveränderlich sein muß, wird die elektrische Ladung dem Anzeigeinstrument zugeführt. Ein weiterer Vorteil der dargestellten Anordnung besteht darin, daß C_q sich zwar gegenüber der einfachen Anordnung verdoppelt hat, die hervorgebrachte Ladung aber ebenfalls zweimal so groß ist. Am häufigsten finden derartige Geräte für die Messung schnell wechselnder Kräfte Verwendung, da, wie in § 10 gezeigt werden wird, ihre Eigenfrequenz sehr hoch liegt. Zur Verstärkung und Anzeige werden im allgemeinen Elektronenröhren und Elektronenstrahloszillographen verwendet, womit sich Empfindlichkeiten bis zu 100 mm Ablenkung pro 1 kg/cm² erreichen lassen (*202*). Für statische Kraftmessungen durch Piezokristalle werden Elektrometer kleiner Kapazität, wie z. B. das Einfadenelektrometer, und Gleichspannungsverstärker mit Elektrometerröhren (siehe Bd. III) verwendet. Die Eichung wird am einfachsten durch Auflegen verschiedener Gewichte durchgeführt.

Neben Quarz finden bei diesen Meßverfahren auch der trikline *Turmalin* und besonders für sehr empfindliche Instrumente *Seignettesalz* Verwendung. Letzteres hat eine sehr viel größere piezoelektrische Konstante, ist jedoch hygroskopisch, mechanisch weniger haltbar als Quarz und nur bei Temperaturen unterhalb 30° C verwendbar.

9,4 Magnetoelastische Kraftmessung

Ein weiteres Verfahren zur Kraftmessung geht von der Beobachtung aus, daß sich die Magnetisierbarkeit eines ferromagnetischen Stoffes ändert, sofern er elastischen Spannungen ausgesetzt wird. Dabei sind zwei Meßmöglichkeiten zu unterscheiden: 1. Bezeichnet man das Verhältnis von magnetischer Induktion B zu magnetischer Feldstärke H mit μ, der *Permeabilität*, so liefert die theoretische Aussage nach KERSTEN (*196*) einen linearen Zusammenhang zwischen der Anfangspermeabilität μ_0 (also für sehr kleine Feldstärken) und der reziproken elastischen Spannung $\sigma = P/F$

$$\mu_0 = 1 + \frac{4\,\pi}{\sigma} C, \qquad (9/5)$$

der durch Messungen an Nickel gut bestätigt wurde. Die dabei erhaltene magnetoelastische Konstante beträgt für Nickel $C = -24$ kg/mm². 2. Für die Kraftmessung wichtiger, weil man größere Leistungen erhält, ist das zweite Verfahren, das von der Änderung der Magnetisierung bei großen magnetischen Feldstärken Gebrauch macht. Auch in diesem Fall ist der Zusammenhang zwischen elastischer Spannung und Permeabilität ein linearer. In der Abb. 134 sind für das Beispiel des Nickels die magne-

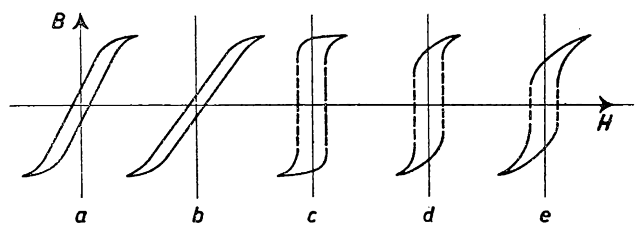


Abb. 134 Hysteresisschleife von Nickel bei verschiedenen Beanspruchungen: unbelastet (a), Zug (b), Druck (c), Torsion (d), Biegung (e)

tischen Hysteresisschleifen für verschiedene Belastungsfälle dargestellt. Danach erhält man für Zug oder Druck eine stark gescherte oder aber rechteckige Schleife (b und c), bei der die Maximalinduktion schon bei viel kleineren Feldstärken erreicht wird. Für Torsions- und Biegungsbeanspruchung verkürzt sich der steile Induktionsanstieg immer mehr (d und e). Vergleicht man für verschiedene elastische Beanspruchungen (Zug) die relativen Längenänderungen ε_l mit den sich ergebenden Änderungen der Permeabilität ε_μ, so zeigt sich das in Abb. 135 dargestellte Verhalten (*190*). Für dieselbe Spannung σ beträgt die Änderung der Permeabilität mehr als das 200fache der Längenänderung. Aus diesem Grunde ist die magnetoelastische Kraftmessung grundsätzlich sehr einfach. Der Kraftmesser besteht, wie in der Abb. 136 dargestellt

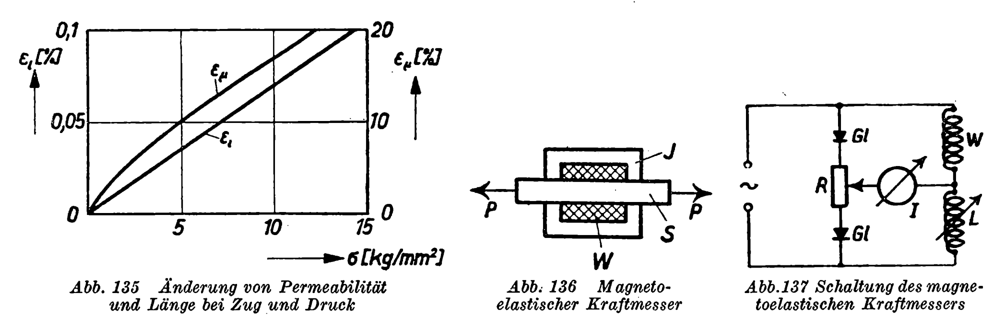


Abb. 135 Änderung von Permeabilität und Länge bei Zug und Druck

Abb. 136 Magnetoelastischer Kraftmesser

Abb. 137 Schaltung des magnetoelastischen Kraftmessers

ist, aus dem zylindrischen Probestab S aus Nickel oder Stahl, der zusammen mit dem lamellierten Joch J einen geschlossenen magnetischen Kreis bildet. Das Joch vermeidet einmal eine Beeinflussung der Messung durch magnetische Fremdfelder und bewirkt ferner, daß infolge seines geringen magnetischen Widerstandes die Entmagnetisierung des Stabes vernachlässigbar wird. Gemessen wird die Induktivität der Meßwicklung W. Für praktische Messungen wird heute fast ausschließlich *Permalloy* C mit 78,5% Ni verwendet, dessen magnetoelastischer Effekt verhältnismäßig groß ist.

Zur Messung der Induktivitätsänderung lassen sich grundsätzlich alle mit Wechselspannung betriebenen Meßbrücken und Kompensationsschaltungen verwenden. Eine einfache, für viele Anwendungen ausreichende Anordnung ist in Abb. 137 dargestellt. Die Wicklung W bildet mit einer etwa gleich großen Vergleichsinduktivität L den einen Zweig der Brücke. Im anderen Brückenzweig liegen die beiden Gleichrichter Gl und das Potentiometer R, mit dem vor Beginn der Messung die Brücke abgeglichen und das Instrument I auf Null eingestellt wird. Durch das Instrument I fließt die Differenz der gleichgerichteten durch W und L fließenden Teilströme, weshalb ein Abgleich der Phase nicht notwendig wird. Eine solche Schaltung gibt einen fast linearen Zusammenhang zwischen der Anzeige am Instrument und der wirkenden Kraft. Für schnell ablaufende Vorgänge wird die Brücke mit Wechselspannung höherer Frequenz (5 kHz) betrieben (*189*, *248*). Für die Messung sehr kleiner Kräfte benutzt man einen Röhrenverstärker, der zwischen Brücke und Anzeigeinstrument geschaltet wird.

9,5 Änderung der elektrischen Leitfähigkeit durch mechanische Kräfte

Wird ein metallischer Leiter in einer oder mehreren Richtungen elastisch beansprucht, also z. B. allseitig gedrückt, so ändert sich sein elektrischer Widerstand. Außer

der *wirklichen* Änderung der elektrischen Leitfähigkeit, wie sie bei unverändertem Volumen beobachtbar wäre, tritt eine zusätzliche Widerstandsänderung durch die elastische Deformation des Leiters auf. Bei allseitigem Druck erhält man die Beziehung

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial R}{\partial p}=\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial \varrho}{\partial p}+\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial p}-\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial p}. \tag{9/6}$$

Bei Zug oder Druck in der Längsrichtung eines Drahtes ergibt sich für den longitudinalen Effekt

$$\frac{\Delta R}{R}\cdot\frac{1}{P}=\frac{\Delta \varrho}{\varrho}\cdot\frac{1}{P}+\frac{\Delta l}{l}\cdot\frac{1}{P}-\frac{\Delta q}{q}\cdot\frac{1}{P}=\frac{\Delta \varrho}{\varrho}\cdot\frac{1}{P}+\frac{1+2\mu}{E}. \tag{9/7}$$

Darin bedeuten R den elektrischen Widerstand des Leiters, ϱ den spez. Widerstand, l die Drahtlänge, q dessen Querschnitt, P die Druck- bzw. Zugkraft, p den allseitigen Druck, E den Elastizitätsmodul und μ die POISSONsche Zahl (siehe § 11,44). Die gesamte Widerstandsänderung setzt sich also aus drei Anteilen zusammen: Änderung des spez. Widerstandes und Änderungen von Querschnitt und Länge. Tabelle X gibt eine Übersicht der longitudinalen Koeffizienten des Widerstandes und des Temperaturkoeffizienten der wichtigsten Metalle (vgl. Tabelle VIII). Der Effekt ist trotz seiner geringen Größe zur Messung von Kräften geeignet, wenngleich – wie aus der Tabelle X hervorgeht – der große Temperatureinfluß für die meisten Metalle die Verwendung sehr einschränkt (*122*).

Werkstoff	$\frac{\Delta R}{R}\cdot\frac{1}{P}$	$\frac{\Delta R}{R}\,\frac{1}{°C}$
Silber	$5{,}3\cdot 10^{-6}$	$4{,}1\cdot 10^{-3}$
Kupfer	2,9	4,3
Eisen	2,6	6,6
Nickel	2,5	6,7
Platin	2,65	3,92
Manganin	— 3,7	0,02

Tabelle X

Die Werte des Druckkoeffizienten bewegen sich bei den regulär kristallisierenden Metallen in der Regel um 1 bis $4\cdot 10^{-6}$ und nehmen mit wachsendem Druck ab, d. h. der Widerstand vermindert sich bei höheren Drucken in geringerem Maße mit dem Druck als bei kleineren Drucken. Daß die Berücksichtigung des zweiten Gliedes in Gleichung (9/6) gerechtfertigt ist, sieht man z. B. aus dem Vergleich der Werte von Aluminium, für das beim Druck $p = 0$ das erste Glied $-4{,}73\cdot 10^{-6}$ und das zweite Glied $-0{,}45\cdot 10^{-6}$ beträgt.

Bei der praktischen Durchführung der Messung der elastischen Spannung verwendet man das Widerstandsmaterial in Form dünner Drähte oder Bändchen, die zwischen den Kraftangriffspunkten mehrfach hin- und hergezogen werden. Für spezielle Kraftmessungen, bei denen entweder der Platzbedarf der oben beschriebenen Kraftmesser oder eines Dehnungsmessers hinderlich ist, oder bei Versuchen an schnell rotierenden Teilen, bei denen Massenkräfte das Ergebnis fälschen können, wird folgendes Verfahren angewandt. Auf den zu untersuchenden Teil wird der Widerstandsstreifen

spannungsfrei und unverrückbar aufgeklebt und die Kraftmessung auf eine Dehnungsmessung zurückgeführt (*247*). Als besonders geeignet hat sich eine Spezialsorte von leitendem Gummi (mit Graphit oder Ruß als Füllstoff) erwiesen (*97*).

Relativ große Widerstandsänderungen sind mit einer zylindrischen Säule aus dünnen Kohleplättchen (*129*) zu erhalten. Runde, glattgepreßte Scheibchen von 0,25 bis 2 mm Dicke und 3 bis 30 mm Durchmesser werden dabei zu einer Säule geschichtet, die in Richtung der Symmetrieachse belastet wird. Wie in der Abb. 138 für eine bestimmte Ausführung gezeigt ist, nimmt der Widerstand mit wachsendem Druck etwa nach einer Hyperbel ab und nähert sich einem Grenzwert. Im Gegensatz zur reinen Druckbeeinflussung des elektrischen Widerstandes sind es in diesem Falle die Übergangswiderstände zwischen den einzelnen Plättchen, die mit wachsendem Druck abnehmen. Der große Vorteil eines solchen Druckelementes liegt in der Möglichkeit, relativ große Ströme beeinflussen zu können. Für Graphit beträgt der nur sehr wenig druckempfindliche Ohmsche Widerstand 0,0075 Ohm·cm, während der sehr stark vom Druck abhängige Oberflächenwiderstand dem Grenzwert 0,0102 Ohm·cm² zustrebt. Bei inhomogenen Mischungen von reinen Halbleitern mit Nichtleitern beobachtet man neben diesem Oberflächenwiderstand noch eine Druckabhängigkeit des inneren Widerstandes. Bei Graphitmischungen beträgt diese rund 10% der Gesamtdruckempfindlichkeit.

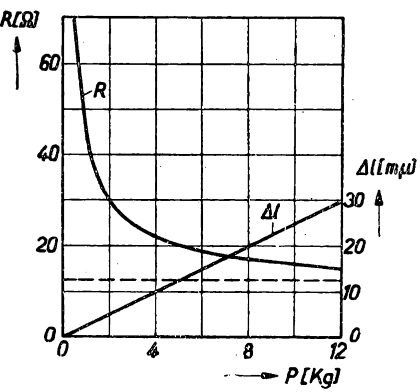


Abb. 138 Widerstand einer Kohlesäule bei Druck

9,6 Dynamisches Verhalten der Kraftmesser

Es ist verständlich, daß bei der mittelbaren Kraftmessung, bei der die elastischen Spannungen aus der Dehnung bestimmt werden, die elastische Dehnung des Werkstoffes durch die Anwesenheit des Meßgerätes nicht merklich beeinflußt werden darf. Sollen zeitlich sich schnell ändernde Kräfte und Drucke gemessen werden, so muß auch das dynamische Verhalten des Kraftmessers bekannt oder berechenbar sein. Wie im § 10,2 näher begründet wird, können Schwingungsvorgänge nur dann unverzerrt aufgezeichnet werden, wenn die Eigenfrequenz des Kraftmessers bedeutend über der höchsten noch aufzunehmenden Frequenz liegt. In den meisten Fällen ist eine ausreichend genaue Abschätzung der Eigenfrequenz des Kraftmessers möglich, oft ist deren experimentelle Bestimmung einfacher und vor allem genauer. Im Falle des Piezodruckmessers läßt sich die Eigenfrequenz aus $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{MC}}$ berechnen, wenn M die bewegte Masse (einschließlich der halben Masse der Druckquarze) und $C = 1/E$ die Federkonstante ist. Für Quarz wird $E = 8054$ kg/mm² in der X-Richtung und 7979 kg/mm² in der Y-Richtung. Bei den magnetoelastischen Kraftmessern der Form in Abb. 136 stellt der zylindrische Meßstab das schwingungsfähige Gebilde dar. Für Stablängen von 70 mm fand man Eigenfrequenzen bei etwa 20 kHz, was im allgemeinen weit über den bei mechanischen Schwingungen auftretenden Schwingungszahlen liegt. Dagegen können bei Wechselbeanspruchung des ferromagnetischen Stabes

Nachwirkungserscheinungen und Wirbelstromverluste eine Rolle spielen. Eine experimentelle Nachprüfung dieser Frage hat allerdings bis 3 kHz keine derartigen Einflüsse feststellen können. Man nimmt an, daß den magnetischen Elementarbezirken gerade durch die wechselnde Magnetisierung hinreichend oft Gelegenheit gegeben wird, den elastischen Spannungsschwankungen zu folgen.

Von ebenso großem Einfluß auf die getreue und unverzerrte Aufzeichnung schnell verlaufender Spannungs- und Druckänderungen ist die Art der Aufzeichnungsvorrichtung. Für sehr schnelle Schwankungen kommen für die piezoelektrischen Methoden ausschließlich Röhrenverstärker zur Verwendung, deren Verstärkungsfaktor in dem hier interessierenden Frequenzbereich frequenzunabhängig gemacht werden muß. Bis zu Frequenzen von 10 kHz kommt als Anzeigegerät der Schleifenoszillograph, für höhere Frequenzen ausschließlich der Elektronenstrahloszillograph in Frage.

9,7 Spannungsoptische Meßverfahren (*98*)

Dieses Verfahren beruht darauf, daß durchsichtige polykristalline Stoffe doppelbrechend werden, wenn man sie senkrecht zur Durchleuchtungsrichtung mechanisch beansprucht. Aus der Größe der gemessenen Doppelbrechung läßt sich bei bekannter Stoffkonstanten Richtung und Größe der Spannung angeben. Da sich nur bestimmte durchsichtige Stoffe für spannungsoptische Versuche verwenden lassen, werden im allgemeinen Modellversuche an geometrisch ähnlichen Versuchsstücken angestellt und nur ebene Spannungszustände untersucht (*251*). Durch *Einfrieren* der elastischen Spannungen (Erwärmen) und darauffolgendes Aufschneiden in dünne Scheiben kann man nach dem Vorschlag von Oppel (*263*) auch räumliche Spannungszustände an Modellen ermitteln.

Man bezeichnet mit σ_1 und σ_2 die elastischen Hauptspannungen des betrachteten Punktes im ebenen Spannungsfeld und mit d die durchstrahlte Dicke und denkt sich einen linear polarisierten Lichtstrahl beim Durchgang durch den Modellkörper in zwei in Richtung der Hauptspannungen schwingende Komponenten zerlegt. Die in Richtung der Spannungskomponenten σ_2 schwingende lineare Komponente des einfallenden Lichtstrahls erleidet gegen die in Richtung der Spannungskomponenten σ_1 schwingende Komponente eine Phasenverschiebung δ in Vielfachen der verwendeten Wellenlänge λ

$$\delta = (\sigma_2 - \sigma_1)\, d \cdot C/\lambda\,. \qquad (9/8)$$

Die spannungsoptische Konstante C besitzt für *Flintgläser* den Wert 1,4 bis $3{,}0 \cdot 10^{-7}$ cm²/kg, für *Bakelit* und *Trolon* 45 bis $55 \cdot 10^{-7}$ cm²/kg und ist außerdem noch von der Wellenlänge abhängig. In Abb. 139 ist der Strahlengang einer spannungsoptischen Untersuchung schematisch dargestellt. Das in einer geeigneten Belastungsvorrichtung eingespannte planparallele durchsichtige Modell M befindet sich im parallelen Strahl zwischen zwei gekreuzten Nikolschen Prismen, dem Polarisator P und dem Analysator A. Durch das Objektiv O wird die rückwärtige Oberfläche von M auf dem Schirm S abgebildet. Ist die Lichtquelle L monochromatisch, so erscheinen alle Stellen des Modelles dunkel, an denen die Hauptspannungsrichtungen mit der Polarisationsrichtung über-

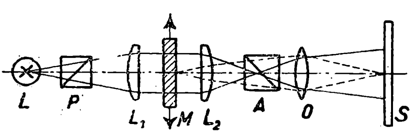


Abb. 139 Optische Spannungsmessung

einstimmen oder keine Differenz der Hauptspannungen besteht, da in diesen Fällen der Lichtstrahl unbehindert hindurchtreten kann. Wird die Durchleuchtung mehrmals wiederholt, wobei jedesmal die Polarisationsrichtung um einen bestimmten Winkel gedreht wird, so erhält man eine Anzahl von Linien (Isoklinen), welche die Punkte miteinander verbinden, in denen die Spannungstrajektorien unter entsprechenden Winkeln geneigt verlaufen. Daraus ist der Verlauf der Spannungslinien zu ermitteln. Als sehr einfaches Beispiel sei ein prismatischer Stab bei reiner Biegungsbeanspruchung betrachtet, wie er in Abb. 140 dargestellt ist. Bekanntlich sind in diesem Fall die Spannungen proportional dem Abstand y von der durch den Querschnittsschwerpunkt gehenden ungedehnten „neutralen Schicht" NS. In der Abb. 140 treten in der oberen Stabhälfte Zugspannungen, in der unteren Druckspannungen auf, die linear mit dem Abstand y zunehmen. Die ungedehnte Faser NS erscheint bei reiner Biegebeanspruchung dunkel. Mit zunehmendem y wird nun bei einem Phasenunterschied $\delta = \frac{1}{2} + 1, 2, \ldots$ eine Aufhellung, für $\delta = 1, 2, 3$ usw. eine Auslöschung auf dem Schirm zu beobachten sein. Im monochromatischen Licht erscheinen daher Streifen parallel zur Balkenlängsachse, die bei größer werdendem Biegemoment näher zusammenrücken. Mit weißem Licht erscheint wegen der Dispersion der spannungsoptischen Konstanten C nur der Streifen mit der Phasendifferenz Null weiß, die benachbarten zeigen Farbsäume und sind um so verwaschener, je größer δ ist. Damit erhält man ein einfaches Verfahren, die Orte, in denen die Hauptspannungsdifferenz $\sigma_2 - \sigma_1$ verschwindet, festzustellen. Im einfarbigen Licht bleiben die *Isochromaten* auch für höhere Gangdifferenzen scharf.

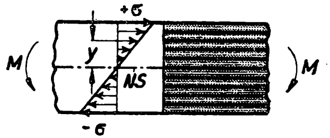


Abb. 140 Gebogener Stab im polarisiertem Licht

An Stelle der Durchleuchtung des ganzen Modells lassen sich auch die Hauptspannungsdifferenzen punktweise nach Größe und Richtung ermitteln. Bei einfarbigem Licht werden dabei Polarisator und Analysator in gekreuzter Stellung so lange gedreht, bis die Stellung größter Verdunkelung bzw. Aufhellung erreicht ist. Die vorhandene Phasendifferenz δ wird mit Hilfe eines zwischen die NIKOLprismen geschalteten *Kompensators* gemessen, d. h. die Aufhellung durch Einschalten einer einstellbaren Phasenverschiebung aufgehoben, wozu ein gezogener Glasstreifen oder ein Quarzkeilkompensator (siehe Bd. IV) geeignet ist.

9,8 **Röntgenographische Bestimmung elastischer Spannungen** (*130, 152, 297*)

In einigen Fällen lassen sich die elastischen Spannungen nach den bisher beschriebenen Verfahren nicht bestimmen, z. B. bei sehr kleinen Meßlängen oder wenn die zu untersuchende Probe vorgespannt ist. Die besondere Eigentümlichkeit des röntgenographischen Verfahrens besteht darin, daß damit die durch die elastischen Spannungen an den submikroskopisch kleinen Teilchen, den Kristalliten, hervorgebrachten Längenänderungen gemessen werden können. Allerdings ist die Methode nur bei kristallinen Stoffen anwendbar, bei denen die Atome in Form eines Raumgitters angeordnet sind. Das bedeutet aber keine Einschränkung, da die Metalle allgemein aus Mikrokristalliten bestehen. Die auf den zu untersuchenden Stoff auftreffenden Röntgenstrahlen werden an den einzelnen Kristalliten wie im klassischen Fall der BRAGGschen Reflexion an regelmäßigen Kristallen in einem bestimmten Winkel reflektiert, der bei

verschiedenen Stoffen umgekehrt proportional der Gitterkonstanten ist, und daher eindeutig von den elastischen Spannungen abhängt (*227*).

Die grundsätzliche Meßanordnung ist in Abb. 141 dargestellt. Das von der Röntgenröhre R kommende, mit Hilfe der Bleiblende B eingeengte Strahlenbündel fällt senkrecht auf die Probe P. An den Kristalliten der Probenoberfläche werden Beugungsbilder erzeugt, die der Reflexion der einfallenden Strahlung an den Netzebenenscharen der Kristallite entsprechen. Da die einzelnen Netzebenen willkürlich orientiert sind, werden auf dem Film F konzentrische Ringe erscheinen, die den einfallenden Röntgenstrahl zur Achse haben. Zwischen den Reflexionswinkeln α einerseits und dem von der Spannung abhängigen Abstand d der reflektierenden Netzebenen andrerseits besteht die BRAGGsche Beziehung

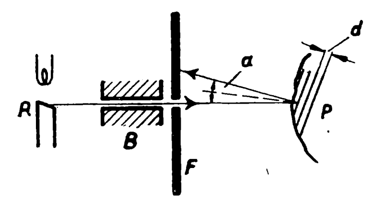


Abb. 141 Röntgenographische Spannungsmessung

$$d = \frac{n\lambda}{2\sin\alpha}\,(n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{9/9}$$

wenn λ die Wellenlänge der Röntgenstrahlung bedeutet. Der Winkel α ist aus dem Durchmesser des Kreises auf dem Film F und dessen Abstand von der Probe bestimmbar. Trotz der geringen „Meßlänge" von einigen 10^{-8} cm lassen sich relative Längenänderungen von etwa 10^{-5} nachweisen. Die eigentliche Meßlänge liegt in Richtung der Halbierenden des Winkels α, der praktisch jedoch so klein ist, daß diese in erster Näherung als parallel zum eintretenden Strahl angenommen werden darf. Da das Röntgenogramm die Formänderung in Richtung des Strahlenbündels anzeigt, findet man an Hand *einer* Aufnahme bei senkrechter Anstrahlung der Oberfläche unmittelbar die Querkontraktion bzw. Querdehnung ε_q des Werkstückes an der bestrahlten Stelle. Beim einachsigen Spannungszustand errechnet sich hieraus sofort die zugehörige Spannung

$$\sigma = -\frac{E}{\mu}\varepsilon_q, \tag{9/10}$$

worin E der Elastizitätsmodul und μ die POISSONsche Zahl bedeuten (siehe § 11). Die bei der praktischen Auswertung erreichte Meßgenauigkeit beträgt etwa 1—2 kg/mm² unabhängig von der Größe der elastischen Spannung. Als Beispiel ist in Abb. 142 für Flußstahl die Gitterkonstante abhängig von der Zugspannung aufgetragen, die demnach eine lineare Funktion der Dehnung ist.

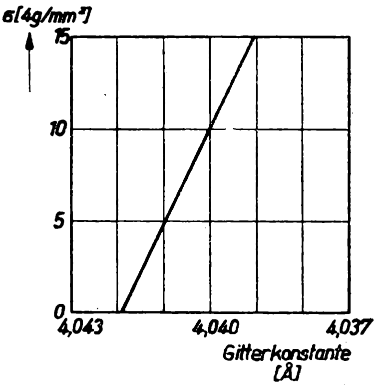


Abb. 142 Gitterkonstante von Flußstahl bei Zugbeanspruchung

§ 10 MESSUNG MECHANISCHER SCHWINGUNGEN (*101, 120, 201, 335, 367*)

10,1 *Grundlagen*

10,11 *Allgemeines*

Die Abgrenzung des Begriffes mechanische Schwingungen soll so verstanden werden, daß die Untersuchungen auf mechanische Systeme im engeren Sinne beschränkt

bleiben, jedoch auch auf tonfrequente Schwingungen (Akustik) ausgedehnt werden. Der Kreis der Geräte, die durch die angegebene Kennzeichnung erfaßt werden, ist dennoch größer, als es auf den ersten Blick erscheinen mag. Er umfaßt die Messung periodischer und nichtperiodischer Vorgänge und ihrer zeitlichen Ableitungen (Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ruck). Grundsätzlich unterscheidet man zwei Gruppen von Schwingungsmeßgeräten: Kraftmesser und Bewegungsmesser. Dazu kommen noch Meßgeräte elektrischer Größen, soweit diese rasch veränderliche Vorgänge erfassen sollen und mechanisch bewegte Teile enthalten. Auf die Messung der Frequenz von periodischen Vorgängen soll hier nicht eingegangen werden, da diese mit den im § 3 beschriebenen Methoden bestimmt werden kann (siehe auch Bd. III). Wie später noch im einzelnen gezeigt werden wird, lassen sich alle hier in Betracht kommenden Messungen auf die Messung von Wegen oder Geschwindigkeiten zurückführen.

Die meisten Schwingungsmeßgeräte sind selbst schwingungsfähige Systeme, d. h. Schwinger. Sie können für die meisten Fragen als einfache, d. h. Schwinger mit nur einem Freiheitsgrad betrachtet werden, die von äußeren periodischen Kräften zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden.

10,12 *Freie, gedämpfte Schwingung*

Die Dynamik der Schwingungsmeßgeräte gehört in das Gebiet der erzwungenen Schwingungen. Vorerst sollen jedoch die freien Schwingungen eines Schwingers mit *einem* Freiheitsgrad behandelt werden.

Die Bewegung des schwingenden Körpers wird nur durch eine einzige Koordinate s beschrieben, die der Auslenkung aus der Ruhelage entsprechen soll. In Abb. 143 ist das Schema eines elastischen Schwingers dargestellt; m bedeute die schwingende Masse, c die Rückstellfeder (oder eine andere eine Rückstellkraft erzeugende Vorrichtung, wie z. B. die Erdschwere beim Pendel) und b die Dämpfungsvorrichtung. Wir beschränken uns auf den Fall, daß die Rückstellkraft der Auslenkung proportional ist (harmonische Schwingung); mit c sei die Federkonstante oder Federzahl bezeichnet, die angibt, wie groß die Rückstellkraft je Zentimeter Auslenkung ist. Die Dämpfungskraft sei proportional der Geschwindigkeit angenommen, was für kleine Geschwindigkeiten in Flüssigkeiten sowie für die elektrische Induktionsdämpfung streng gültig ist. Die Differentialgleichung für die freie Schwingung lautet also

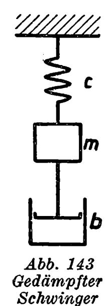


Abb. 143 Gedämpfter Schwinger

$$m\ddot{s} + b\dot{s} + cs = 0, \tag{10/1}$$

mit $\ddot{s} = d^2s/dt^2$ und $\dot{s} = ds/dt$. Sie besitzt die Lösungen

$$\text{für } D < 1 \quad s = e^{-\delta t}(A \cos \nu t + B \sin \nu t) \tag{10/2a}$$

$$D > 1 \quad s = e^{-\delta t}(A \operatorname{Cof} \mu t + B \operatorname{Sin} \mu t) \tag{10/2b}$$

$$D = 1 \quad s = e^{-\delta t}(A + Bt). \tag{10/2c}$$

Die Abkürzungen bedeuten darin:

Abklingkonstante $\delta = b/2m$

Ungedämpfte Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{c/m}$

Dämpfungsmaß $D = \delta/\omega = \frac{b}{2}\sqrt{m\,c}$

Gedämpfte Eigenfrequenz $\nu = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} = \omega\sqrt{1 - D^2}$

$$\mu = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = \omega\sqrt{D^2 - 1}\,.$$

Die daraus resultierende Bewegung ist eine abklingende Schwingung oder eine Kriechbewegung, je nach der Größe des Dämpfungsmaßes D, wie in Abb. 144 für drei verschiedene Werte von D dargestellt ist. Ist das System schwach gedämpft, also $D < 1$, so entstehen sinusförmige Schwingungen, deren Amplituden exponentiell abnehmen. Erreicht das Dämpfungsmaß D den Wert 1, so nähert sich das System, ohne einen Umkehrpunkt in seiner Bewegung zu haben, dem Ausgangspunkt (aperiodischer Grenzfall). Bei noch größerer Dämpfung kriecht die Masse allmählich in ihre Ausgangsstellung zurück. Den Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Schwingungen (für $D < 1$) $\log A_n/A_{n+1} = \mathfrak{d} = 2\,\pi\,\delta/\nu$ bezeichnet man als *logarithmisches Dekrement.*

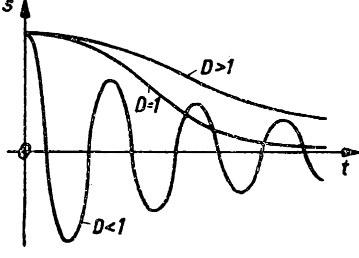


Abb. 144 Freie Schwingungen

10,13 *Erzwungene Schwingungen*

Für die Theorie der Schwingungsmeßgeräte sind die freien Schwingungen nur insofern von Bedeutung, als sie die Eigenschwingungszahl des Instrumentes angeben; das dynamische Verhalten eines Kraft- oder Bewegungsmessers wird aus der Theorie der erzwungenen Schwingungen abgeleitet. Von einer erzwungenen Schwingung wird gesprochen, wenn nicht nur Trägheits-, Dämpfungs- und Rückstellkräfte vorhanden sind, sondern auch von der Zeit abhängige Stör- oder Erregerkräfte $p\,(t)$ an der Schwingermasse angreifen, so daß an Stelle der homogenen Differentialgleichung (10/1) die inhomogene Differentialgleichung

$$m\,\ddot{s} + b\,\dot{s} + c\,s = p\,(t) \qquad (10/3)$$

tritt. Von Interesse sind vor allem periodische Funktionen von t, da man nach dem FOURIERschen Theorem jede periodische Funktion in harmonische zerlegen und diese in der linearen Differentialgleichung (10/3) getrennt untersuchen kann. Wir stellen uns also vor, daß das obere Federende des in Abb. 143 dargestellten Schwingers mit der Frequenz Ω und dem Maximalausschlag P bewegt wird, so daß die Gleichung gilt

$$m\,\ddot{s} + b\,\dot{s} + c\,s = P\cos\Omega\,t. \qquad (10/3\,a)$$

Die Kreisfrequenz Ω der harmonischen Störkraft ist im allgemeinen von der Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{c/m}$ des Schwingers verschieden. Die Differentialgleichung (10/3a) ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren allgemeine Lösung s sich zusammensetzt aus der Lösung s_h der homogenen Gleichung (10/1) und einem partikulären Integral s_p der inhomogenen Gleichung

$$s = s_h + s_p\,.$$

Da sich nach (10/2a–c) s_h als eine abklingende Schwingung oder Kriechbewegung darstellt, die mit wachsender Zeit beliebig klein wird, ist für den eingeschwungenen

Vorgang nur der partikuläre Lösungsanteil maßgebend. Für die Lösung ist es zweckmäßig, zur komplexen Schreibweise überzugehen:

$$m \ddot{\mathfrak{s}} + b \dot{\mathfrak{s}} + c \mathfrak{s} = \mathfrak{P} e^{i\Omega t}. \tag{10/3b}$$

Der Lösungsansatz lautet

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{S} e^{i\Omega t}, \tag{10/4}$$

was in der reellen Schreibweise

$$s = S \cos(\Omega t + \alpha) \tag{10/4a}$$

entsprechen würde. Der erzwungene Ausschlag s soll also nach (10/4a) dieselbe Frequenz wie die Störfrequenz Ω besitzen und gegen deren Phase die Verschiebung α aufweisen, die in (10/4) in der komplexen Amplitude $\mathfrak{S}$ enthalten ist. Durch Einsetzen des Lösungsansatzes in (10/3b) findet man nach Division mit $e^{i\Omega t}$ die wichtige Ausgangsgleichung

$$(-m \Omega^2 + i b \Omega + c) \mathfrak{S} = \mathfrak{P} \tag{10/5}$$

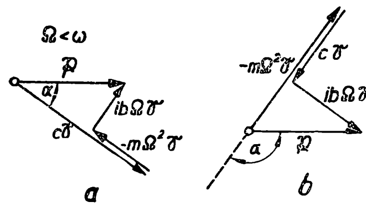


Abb. 145 a u. b Vektordarstellung erzwungener Schwingungen

als Beziehung zwischen der komplexen Amplitude $\mathfrak{S}$ des resultierenden Ausschlags und der Erregeramplitude $\mathfrak{P}$. An Hand der Vektordiagramme der Abb. 145 läßt sich die gegenseitige Lage der einzelnen Vektoren klarmachen. Je nachdem $\Omega \lesseqgtr \omega$ wird, lassen sich zwei Fälle unterscheiden: Da $c = m\,\omega^2$ ist, wird für $\Omega < \omega$ der Ausdruck $|c\,\mathfrak{S}| > |m\,\Omega^2\,\mathfrak{S}|$, und ein Vektorpolygon nach Abb. 145a kommt nur zustande, wenn $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{P}$ einen Phasenwinkel kleiner als $\pi/2$ einschließen; für $\Omega > \omega$ wird $|m\,\Omega^2\,\mathfrak{S}| > |c\,\mathfrak{S}|$ und α zwischen 90 und 180° liegen. Aus Abb. 145 ist leicht zu entnehmen, daß bei schwacher Dämpfung (kleines b) die Phasenwinkel in der Nähe von 0 bzw. 180° liegen und bei zunehmender Dämpfung größer werden müssen. Werden die beiden Vektoren $m\,\Omega^2\,\mathfrak{S}$ und $m\,\omega^2\,\mathfrak{S}$ einander etwa gleich, so erreicht $\mathfrak{S}$ offensichtlich einen maximalen Wert, der mit verschwindender Dämpfung über alle Maßen groß wird, wobei der Phasenwinkel sich dem Wert $\pi/2$ nähert. Das Diagramm beantwortet alle Fragen nach der Veränderung des Vektors $\mathfrak{S}$, wenn sich irgendein Parameter der Gleichung (10/3b) ändert. Die Betrachtung der geometrischen Orte der Endpunkte der komplexen Amplitude ist Inhalt der Ortskurventheorie.

Dieselbe Betrachtungsweise ist in der Theorie der Wechselströme von großer Bedeutung.

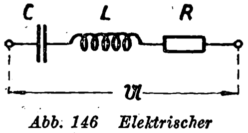


Abb. 146 Elektrischer Serienresonanzkreis

Zwischen den hier erörterten erzwungenen Schwingungen mechanischer Systeme und den Verhältnissen in einem elektrischen Serienresonanzkreis (Abb. 146) bei angelegter Wechselspannung U besteht weitgehende Analogie. Sind C, L und R Kapazität, Induktivität und Ohmscher Widerstand des Kreises, so lautet die Differentialgleichung für den Strom i:

$$L \ddot{i} + R \dot{i} + \frac{1}{C} i = \dot{U}, \tag{10/6}$$

und die Lösung, die man übersichtlich in einem Vektordiagramm darstellen kann, entspricht der Abb. 145, wobei an Stelle von $\mathfrak{P}$ die zeitliche Ableitung von U tritt. Vergleicht man die Gleichungen (10/3b) und (10/6), so erkennt man, daß der Schwingermasse die Induktivität L, der Dämpfungskonstanten b der Ohmsche Widerstand R und der Federkonstanten c die reziproke Kapazität

$1/C$ entspricht. Diese weitgehende Analogie zwischen elektrischen und mechanischen Schwingungen wird in vielen Fällen benutzt, um experimentell die Eigenschaften komplizierter mechanischer und elektro-mechanischer Schwinger zu untersuchen.

In dem Kräfteschaubild der Abb. 145 lassen sich folgende Einzelkräfte unterscheiden: *Trägheitskraft* $\mathfrak{P}_m = -m\,\Omega^2\,\mathfrak{S}$, *Dämpfungskraft* $\mathfrak{P}_b = i\,b\,\Omega\,\mathfrak{S}$ und *Federkraft* $\mathfrak{P}_c = c\,\mathfrak{S}$, deren vektorielle Summe die *Erregerkraft* $\mathfrak{P}$ ergibt,

$$\mathfrak{P}_m + \mathfrak{P}_b + \mathfrak{P}_c = \mathfrak{P}. \tag{10/7}$$

Wie bei der Besprechung der einzelnen Schwingungsmeßgeräte gezeigt wird, kommt für die Anzeige eine oder auch die Summe zweier der oben genannten Kräfte in Frage. Es ist daher zweckmäßig, das Verhältnis der drei Kräfte zur Erregerkraft aus Gleichung (10/5) zu bilden, wobei die bereits im § 10,12 gebrauchten Abkürzungen für das Dämpfungsmaß D und für das Verhältnis von Erregerfrequenz zu Eigenfrequenz $\eta = \dfrac{\Omega}{\omega}$ gebraucht wird. Die sich daraus ergebenden Größen, die natürlich wieder komplex sind, nennt man *kinetische Einflußzahlen.* Diese lauten:

$$\mathfrak{k}_1 = \frac{\mathfrak{P}_m}{\mathfrak{P}} = \frac{-m\,\Omega^2}{-m\,\Omega^2 + i\,b\,\Omega + c} = \frac{-\eta^2}{1-\eta^2+2\,i\,\eta\,D} \tag{10/8a}$$

$$\mathfrak{k}_2 = \frac{\mathfrak{P}_b}{\mathfrak{P}} = \frac{i\,b\,\Omega}{-m\,\Omega^2 + i\,b\,\Omega + c} = \frac{2\,i\,D\,\eta}{1-\eta^2+2\,i\,\eta\,D} \tag{10/8b}$$

$$\mathfrak{k}_3 = \frac{\mathfrak{P}_c}{\mathfrak{P}} = \frac{c}{-m\,\Omega^2 + i\,b\,\Omega + c} = \frac{1}{1-\eta^2+2\,i\,\eta\,D}. \tag{10/8c}$$

Um nun zur gewünschten Aussage über die erzwungene Amplitude des schwingenden Systems zu kommen, zerlegt man die Einflußzahlen in die absoluten Beträge und die Phasenwinkel. Die Absolutgröße der Amplitude erhält man aus Gleichung (10/8c), wenn man beachtet, daß $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}_c/c$ ist. Es gilt also

$$|\mathfrak{S}| = |\mathfrak{P}| \cdot \frac{1}{c}\,|\mathfrak{k}_3|. \tag{10/9}$$

Der absolute Betrag von $\mathfrak{k}_3$ soll mit V_3 bezeichnet werden und heißt *Vergrößerungsfunktion.*

$$|\mathfrak{k}_3| = V_3 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}. \tag{10/10}$$

Gleichung (10/9) läßt sich also schreiben:

$$S = P \cdot V_3 \cdot \frac{1}{c}. \tag{10/9a}$$

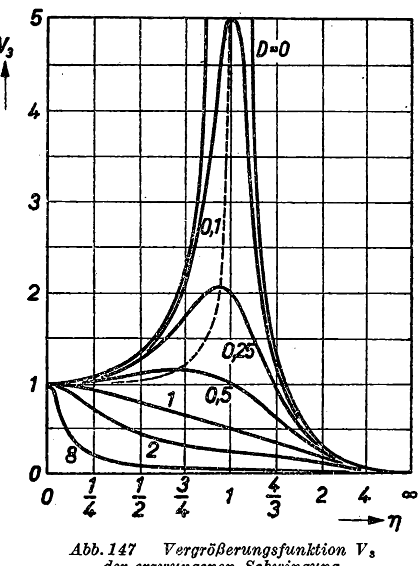
V_3 gibt also an, um wievielmal die Amplitude des erzwungenen Ausschlags S größer ist als der statische Ausschlag P/c, der unter der Wirkung der ruhenden Kraft P am gleichen Schwinger zustande kommt.

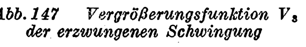
Der Phasenverschiebungswinkel α zwischen den komplexen Amplituden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$, der nach Gleichung (10/8c) durch $\mathfrak{k}_3$ gegeben ist, berechnet sich daraus zu

$$\alpha_3 = \operatorname{arc\,tg} \frac{2\,D\,\eta}{1-\eta^2}. \tag{10/11}$$

Die komplexe Amplitude $\mathfrak{S}$ eilt also der erregenden Kraft $\mathfrak{P}$ um den Winkel α_3 nach.

Nach Gleichung (10/8a-c) hängen Vergrößerungsfunktion und Phasenwinkel vom Frequenzverhältnis η und vom Dämpfungsmaß ab. In den Abb. 147 und 148 sind V_3 und α_3 abhängig von beiden Argumenten dargestellt. Den einzelnen Kurven sind verschiedene Werte des Parameters D zugeordnet. Wie aus der Abb. 147 hervorgeht,




Abb. 147 Vergrößerungsfunktion V_3 der erzwungenen Schwingung

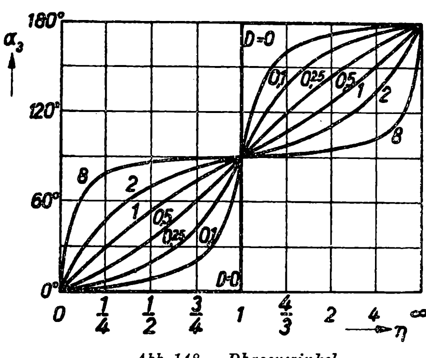


Abb. 148 Phasenwinkel der erzwungenen Schwingung

bekommt die Vergrößerungsfunktion V_3 mit verschwindender Dämpfung D ein ausgeprägtes Maximum bei $\Omega = \omega$ (Resonanz). Alle anderen Kurven mit $D > 0$ liegen darunter. Mit zunehmender Dämpfung werden die Maxima niedriger und flacher und rücken zu niedrigeren Frequenzen hin. Für sehr kleine Frequenzen ($\eta \to 0$) wird V_3 unabhängig von der Größe der Dämpfung etwa $= 1$, für hohe Frequenzen dagegen $\to 0$. Man findet die Stelle $\eta_{\max}$, für die V_3 den Höchstwert erreicht, durch Nullsetzen der Ableitung $\partial V_3/\partial \eta$ zu

$$\eta_{\max} = \sqrt{1 - 2D^2}. \tag{10/12}$$

An der Stelle $\eta = 0$ haben die Kurven entweder ein Minimum oder ein Maximum, je nachdem das Dämpfungsmaß kleiner oder größer als $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist. Für diesen Wert fällt das Maximum mit $\eta = 0$ zusammen, weswegen man hochabgestimmte Systeme meistens mit diesem Dämpfungsmaß versieht, um bei niedrigen Frequenzen einen konstanten Vergrößerungsmaßstab zu bekommen.

Die Kurven des Nacheilwinkels α_3 gehen alle durch die Punkte $\eta = 0$, $\alpha_3 = 0$; $\eta = \infty$, $\alpha_3 = \pi$ und $\eta = 1$, $\alpha_3 = \pi/2$, mit Ausnahme der Kurve für $D = 0$, die bei $\eta = 1$ einen Sprung macht. In der Nähe der Resonanz ändert sich der Phasenwinkel um so mehr mit der Frequenz, je schwächer gedämpft das System ist.

10,2 Kraftmesser

Neben den statischen Kraftmessern, die im § 9 eingehend besprochen wurden, sind für die Messung schnell veränderlicher Vorgänge Geräte in Verwendung, die grund-

sätzlich nach der Abb. 143 aufgebaut sind. Die Rückstellvorrichtung (Feder, Piezoquarz usw.) hat die Aufgabe, die Kräfte in Längenänderungen umzuformen, die entweder direkt (nach mechanischer Vergrößerung) oder mittelbar (Umformung in elektrische Größen) angezeigt oder aufgezeichnet werden. Die veränderliche, meist periodische Kraft hat man sich an der Schwingermasse m angreifend vorzustellen. Als solche muß man den Kolben eines Druckmessers oder einen Teil (reduzierte Masse) des Piezoquarzes eines Druckgebers betrachten. In jedem Fall muß das Meßsystem als schwingungsfähiges Gebilde betrachtet werden, auf das die Gleichungen (10/5) bis (10/11) anzuwenden sind. Dabei ist zu beachten, daß in vielen Fällen die mit m bezeichnete Masse nicht streng lokalisiert ist, sondern z. B. auch die Masse der Rückstellfeder und der Anzeigevorrichtung enthält. Um die oben bezeichneten Gleichungen anwenden zu können, hilft man sich damit, daß eine *reduzierte* Masse m_{red} eingeführt wird, die so definiert ist, daß die Summe der kinetischen Energie aller verteilten Massen gleich ist der kinetischen Energie der reduzierten Masse; also

$$m_{\text{red}} = \frac{1}{v^2} \sum_i m_i v_i^2 . \tag{10/13}$$

Als Beispiel soll zuerst ein Meßgerät für schnell veränderliche Drucke, der sog. *Indikator*, näher betrachtet werden (*192*). Dieser besteht, wie in Abb. 149 schematisch angedeutet ist, aus einem zylindrischen Druckkolben K, der sich in einem Zylinder Z druckdicht bewegen kann und als Rückstellkraft die Schraubenfeder C besitzt. Der periodische Druck P wird dem unteren Ende des Zylinders zugeführt und gibt zu periodischen Bewegungen der Kolbenstange Anlaß, die auf verschiedene Weise aufgezeichnet werden können. An Stelle der Feder kann auch ein Piezokristall treten (vgl. Abb. 133), der die sehr kleinen Längenänderungen in elektrische Ladungen umformt.

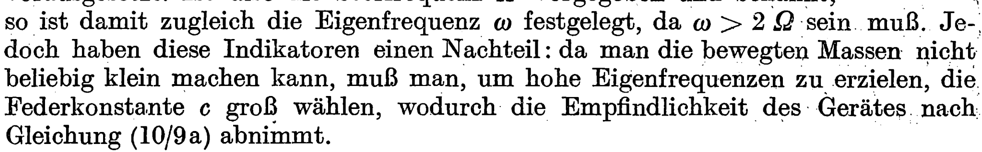


Abb. 149
Indikator

Aus der reduzierten Masse m_{red} und der Federkonstanten c läßt sich die Eigenfrequenz $\omega = (c/m_{\text{red}})^{1/2}$ berechnen. Um eine unverzerrte Wiedergabe der erregenden Kraft zu erhalten, muß nach der Abb. 147 das Frequenzverhältnis $\eta < 0{,}5$ gewählt werden, günstigste Dämpfung vorausgesetzt. Ist also die Störfrequenz Ω vorgegeben und bekannt, so ist damit zugleich die Eigenfrequenz ω festgelegt, da $\omega > 2\,\Omega$ sein muß. Jedoch haben diese Indikatoren einen Nachteil: da man die bewegten Massen nicht beliebig klein machen kann, muß man, um hohe Eigenfrequenzen zu erzielen, die Federkonstante c groß wählen, wodurch die Empfindlichkeit des Gerätes nach Gleichung (10/9a) abnimmt.

Die zweite an den Kraftmesser zu stellende Forderung betrifft die Freiheit von Phasenverzerrung. Soll eine reine sinusförmige Krafteinwirkung gemessen werden, so ist es im allgemeinen ohne Belang, ob sich unter dem Einfluß der in Abb. 148 dargestellten Phasenverschiebung die aufgezeichnete Kurve als Ganzes in der Zeitachse verschiebt. Ist die erregende Kraft jedoch zwar periodisch, aber als FOURIER-Summe anzusehen, so ist eine unverzerrte Wiedergabe nur dann möglich, wenn alle Harmonischen nicht denselben Wert des Phasenverschiebungswinkels, sondern dieselbe Phasenverschiebungszeit aufweisen. Diese berechnet sich zu:

$$t = \frac{\alpha_3}{\Omega} , \tag{10/14}$$

wenn α_3 der sich auf die Frequenz Ω der Harmonischen beziehende Phasenwinkel ist. Das bedeutet wiederum, daß das schwingende System hoch abgestimmt sein muß oder die Dämpfung so zu wählen ist, daß α_3/Ω für alle Harmonischen konstant wird.

Als zweites Beispiel soll der *Schleifenoszillograph* besprochen werden. Dieser besteht aus der Meßschleife Sch (Abb. 150) aus dünnem Draht, die über ein isolierendes Röllchen R gespannt ist und von dem zu messenden Strom durchflossen wird. Der mittlere Teil der Schleife befindet sich in einem starken, homogenen Magnetfeld NS, dessen Feldrichtung in der Schleifenebene liegt. Durch einen kleinen aufgeklebten Spiegel Sp wird die Verdrehung der Schleife durch den Strom sichtbar gemacht und auf einem bewegten Filmstreifen aufgezeichnet. Die Oszillographenkurve ist das Ergebnis der erzwungenen Drehschwingung der Meßschleife, für die die Differentialgleichung gilt:

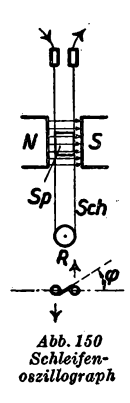


Abb. 150 Schleifenoszillograph

$$\Theta \ddot{\varphi} + B \dot{\varphi} + C \varphi = K \cdot i, \qquad (10/15)$$

worin φ den Drehwinkel des Spiegels, Θ das Trägheitsmoment des bewegten Systems, B die Dämpfungskonstante, C die Rückstellkraft der Schleife (durch Drahtstärke und -spannung gegeben), K eine Apparatekonstante, die der magnetischen Induktion und der Schleifenfläche proportional ist, und i den zu messenden Strom bedeuten. Der günstigste Dämpfungswert wird dadurch eingestellt, daß man die Meßschleife in einen mit geeignetem Öl gefüllten Zylinder bringt. Die Gleichungen (10/15) und (10/3b) entsprechen sich vollkommen, so daß auch in diesem Fall Abbildungs- und Phasentreue nur mit einem hoch abgestimmten System gewährleistet sind.

Im Gegensatz zu den beiden oben besprochenen Instrumenten gibt es eine Reihe von elektrischen und mechanischen Geräten, die gerade die bei Resonanzeinstellung sehr große Vergrößerung V_3 ausnutzen. Ein Beispiel ist der *Resonanzzungenfrequenzmesser*, der einen Kamm verschieden abgestimmter Stahlzungen enthält und auf das schwingende, zu untersuchende System aufgesetzt wird (Fundament- und Motorenschwingungen). Stimmt die erregende Frequenz mit der einer der Zungen überein, so gerät diese in eine starke, gut zu beobachtende Resonanzschwingung. Ebenfalls auf der Resonanzwirkung beruht das häufig für Wechselstromnullmethoden verwendete *Vibrationsgalvanometer*, dessen Eigenfrequenz durch Änderung des Magnetfeldes genau auf Resonanz eingestellt werden kann. Bei schwacher Dämpfung läßt sich ein Vielfaches der statischen Empfindlichkeit erzielen (siehe Bd. III).

10,3 Bewegungsmesser

Als Bewegungsmesser bezeichnet man Geräte, die Wege (Längen- und Winkelwege) und ihre Ableitungen nach der Zeit, nämlich Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ruck, zu messen gestatten. Bei der Messung von Kräften wurde die stets erfüllbare Voraussetzung gemacht, daß ein fester Punkt vorhanden war, gegen den sich die Feder des Meßgerätes stützen konnte. Für die Bewegungsmessung ist diese Forderung jedoch nicht immer zu erfüllen, wenn man bedenkt, daß z. B. die Bewegung von Fahrzeugen bestimmt werden soll. Aus diesem Grunde bezieht man die zu messende Bewegung des Gerätes auf eine an das Gerätgehäuse gefesselte Masse, wie das in Abb. 151 schematisch dargestellt ist. Innerhalb des Gehäuses B ist die schwere Masse m an der Feder c

aufgehängt und durch die Bremse b gedämpft. Dem Gehäuse B und damit dem Fußpunkt der Feder werde die Absolutbewegung $u(t)$ aufgeprägt, unter deren Einfluß die Masse m die Absolutbewegung $s(t)$ ausführen soll. Da ein Festpunkt nicht erreichbar ist, kann hier nicht wie früher die absolute Bewegung $s(t)$ der Masse m, sondern nur die Relativbewegung

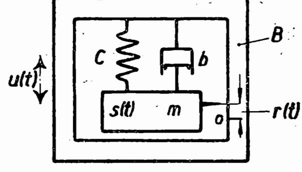


Abb. 151 Bewegungsmesser

$$r(t) = s(t) - u(t)$$

registriert werden. Da aus demselben Grunde für die Dämpfung nicht ds/dt, sondern $ds/dt - du/dt$ maßgebend ist, tritt an Stelle der Differentialgleichung (10/3)

$$m\ddot{s} + b(\dot{s} - \dot{u}) + c(s - u) = 0. \qquad (10/16)$$

Führt man statt dessen r und u ein, so bekommt man

$$m\ddot{r} + b\dot{r} + cr = -m\ddot{u}. \qquad (10/17)$$

Mit dem der Gleichung (10/4) entsprechenden Ansatz $\mathfrak{u} = \mathfrak{U}\, e^{i\Omega t}$ der Frequenz Ω und der Lösung $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}\, e^{i\Omega t}$ folgt aus (10/17)

$$\mathfrak{R}(-m\Omega^2 + i b \Omega + c) = m\Omega^2\, \mathfrak{U}. \qquad (10/18)$$

Sie liefert unter Benutzung der Einflußzahl $\mathfrak{k}_1$ [Gleichung (10/8 a)]

$$\mathfrak{R} = -\mathfrak{U}\,\mathfrak{k}_1. \qquad (10/19)$$

Führen wir wieder den absoluten Betrag von $\mathfrak{k}_1$ ein, den wir als Vergrößerungsfunktion V_1 bezeichnen wollen, so folgt

$$|\mathfrak{k}_1| = V_1 = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\eta^2 D^2}}. \qquad (10/20)$$

Die relative Amplitude R der erzwungenen Schwingung wird also

$$R = U \cdot V_1. \qquad (10/19\,\text{a})$$

Ebenso erhält man aus (10/8 a) den Phasenverschiebungswinkel α_1 zu

$$\alpha_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{2\eta D}{\eta^2 - 1}. \qquad (10/21)$$

In Abb. 152 ist die Vergrößerungsfunktion V_1 in Abhängigkeit vom Frequenzverhältnis η für verschiedene Dämpfungen D aufgetragen. Die dargestellten Kurven zeigen denselben Verlauf wie die der Abb. 147, wenn man an Stelle von η als Abszisse $1/\eta$ setzt, womit beide Darstellungen ineinander übergehen. Für sehr hohe Erregerfrequenzen Ω beträgt die Vergrößerung etwa eins, während für kleiner werdende Frequenzen V_1 sich dem Wert Null nähert, nachdem es bei $\eta = 1$ ein ausgeprägtes

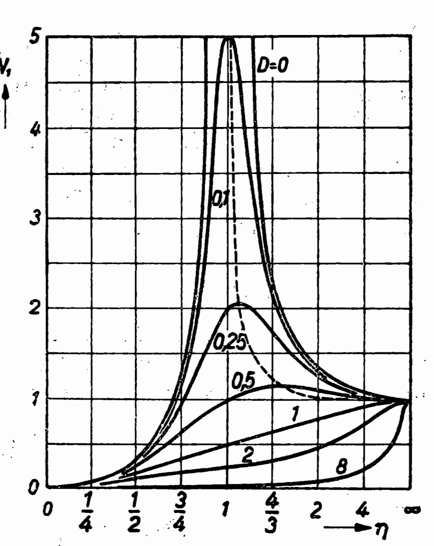


Abb. 152 Vergrößerungsfunktion V_1 der erzwungenen Schwingung

Maximum durchlaufen hat. Um also eine unverzerrte Wiedergabe des zu messenden Schwingungsweges zu erhalten, muß die Eigenfrequenz ω des Gerätes möglichst klein sein. Grundsätzlich wäre eine niedrige Eigenfrequenz durch eine geringe Rückstellkraft und schwere Schwingermasse gegeben. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß bei mechanisch schreibenden Geräten die Rückstellkraft so groß sein muß, daß die Reibung der Schreibfeder auf dem Registrierstreifen nicht merkbar stört. Bei optischer Aufzeichnung fällt diese Einschränkung fort. Wird die Bewegung z. B. durch einen Piezoquarz, dessen Federkonstante einen festen Wert besitzt, gemessen, dann läßt sich ein niedrig abgestimmtes System nur durch Vergrößerung der Masse erreichen.

Die Entscheidung darüber, ob ω genügend klein ist, hängt in diesem Fall nicht von der höchsten, sondern von der niedrigsten Harmonischen der FOURIERreihe ab.

Wegmesser, die nach dem Schema der Abb. 151 arbeiten, sind weitverbreitet. Die ältesten Geräte dieser Art stellen die *Seismographen* dar, die zur Feststellung der Bewegung der Erdrinde dienen. Als Rückstellkraft wird in diesem Fall fast ausschließlich die Schwerkraft benutzt, so daß die dabei verwendeten Schwinger Pendel großer Schwingungsdauer darstellen. Da die aufzunehmenden Frequenzen sehr niedrig liegen — Bruchteile eines Hz —, lassen sich derart geringe Eigenfrequenzen nicht mehr durch Vergrößerung der Pendellänge erreichen, sondern es werden verschiedene Kunstgriffe angewendet (Labilitäts-, Astasierungspendel), um eine unverzerrte Aufzeichnung zu erhalten.

Technische Schwingungsmesser dagegen besitzen meist eine Rückstellfeder, die z. B. beim *Vibrographen* nach GEIGER die Form einer Spiralfeder hat, wie in Abb. 153 dargestellt ist. Dieses Instrument läßt sich für verschiedene Bewegungsrichtungen verwenden, wobei zu beachten ist, daß sich die Eigenfrequenz etwas ändert, sobald man von der horizontalen in die vertikale Richtung übergeht. Im ersten Fall wird die elastische Rückstellkraft durch einen vom Schwerefeld herrührenden Anteil verstärkt.

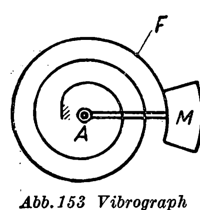


Abb. 153 Vibrograph nach GEIGER

Das Dreikomponenten-Meßgerät der Fa. Askania (Berlin) enthält drei Schwinger, von denen zwei als Pendel ausgebildet sind und der dritte an einer Feder aufgehängt ist. Durch eine einstellbare Öldämpfung läßt sich ein fast konstanter Vergrößerungsfaktor erzielen. Die Aufzeichnung erfolgt photographisch.

Sollen Winkelwege gemessen werden, so wird die Schwingermasse durch eine Kreisscheibe mit großem Trägheitsmoment ersetzt und als Rückstellorgan eine Torsionsfeder verwendet.

10,4 Beschleunigungsmesser

Mit dem in der Abb. 151 dargestellten Gerät lassen sich nicht nur Schwingungswege, sondern auch Beschleunigungen messen. Wir gehen wieder von der Gleichung (10/17) aus und beachten, daß wir an Stelle der Lösung (10/19) nach (10/8c) auch setzen können

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{U}\eta^2 \mathfrak{k}_3 = \mathfrak{U}\frac{\Omega^2}{\omega^2}\mathfrak{k}_3 . \qquad (10/22)$$

Da andererseits

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\mathfrak{U}\, e^{i\Omega t} = -\Omega^2\,\mathfrak{U}\, e^{i\Omega t} = \mathfrak{B}\, e^{i\Omega t} \qquad (10/23)$$

ist, also die komplexe Amplitude der Beschleunigung $\mathfrak{B} = -\Omega^2 \mathfrak{U}$ wird, erhält man mit (10/22)

$$\mathfrak{R} = -\mathfrak{B}\frac{\mathfrak{k}_3}{\omega^2} \tag{10/24}$$

und für die Amplituden

$$R = \frac{B \cdot V_3}{\omega^2}. \tag{10/24 a}$$

Der Phasenwinkel zwischen erregender Kraft und Ausschlag wird durch Gleichung (10/11) bestimmt. Der Beschleunigungsmesser befolgt also dieselben Gesetzmäßigkeiten wie der Kraftmesser. Eine verzerrungsfreie Wiedergabe der Beschleunigung ist auch in diesem Falle nur mit einem hochabgestimmten System zu erzielen und erfordert eine passende Dämpfung. Der enge Zusammenhang zwischen Kraft- und Beschleunigungsmesser wird besonders deutlich, wenn man statt (10/24) schreibt

$$\mathfrak{R} = -\frac{m}{c}\mathfrak{B}\,\mathfrak{k}_3. \tag{10/25}$$

Man kann also den Beschleunigungsmesser auch als Kraftmesser betrachten, bei dem an der Masse m die Trägheitskraft $\mathfrak{P} = -m\,\mathfrak{B} = m\,\Omega^2\,\mathfrak{U}$ angreift. Wie bereits oben erwähnt, ist eine verzerrungsfreie Anzeige nur dann gewährleistet, wenn das schwingende System hoch abgestimmt ist. Nach Gleichung (10/24 a) wird aber der Ausschlag umgekehrt mit dem Quadrat der Eigenfrequenz abnehmen, so daß für die Messung nur sehr kleine Wege zur Verfügung stehen. Es scheiden also mechanische und zum Teil auch optische Anzeigeverfahren im allgemeinen aus. Die elektrischen Verfahren vereinen den Vorteil großer Anzeigeempfindlichkeit mit der Forderung nach hohen Eigenfrequenzen in sich.

Für die praktische Durchbildung der Beschleunigungsmesser kommen daher die bereits aufgeführten Verfahren der elektrischen Messung kleiner Wegänderungen (§ 2,6) als auch der elektrischen Kraftmessung (§ 9,3—4) zur Anwendung. Mit Erfolg wurde z. B. das Kohledruck-Verfahren auch für Beschleunigungsmesser angewandt (*206*), wobei bei einer Eigenfrequenz von der Größenordnung 1 kHz Beschleunigungen bis zu mehreren g mit einer Genauigkeit von etwa 5% gemessen werden können.

An Stelle der Widerstandsänderung einer Kohlesäule wird bei dem von Gerloff (*122*) angegebenen Instrument die Widerstandsänderung von Konstantandrähten bei Zugbeanspruchung benutzt. Die bewegliche Masse von nur etwa 400 g Gewicht wird durch 3 mal 100 Spanndrähte von je 70 mm Länge gehalten. Das Gerät besitzt eine Eigenfrequenz von 200 Hz. Bei einem Gesamtwiderstand von etwa 1000 Ω beträgt die Widerstandsänderung je g 1%. Durch Verwendung eines mehrstufigen Widerstandsverstärkers lassen sich Beschleunigungen zwischen 10^{-3} und 3 g bestimmen.

In Abb. 154 ist schematisch ein piezoelektrischer Beschleunigungsmesser dargestellt, dessen Eigenfrequenz 4 kHz beträgt (*108*, *379*). Die 5 kg schwere träge Masse M ist durch die Tellerfeder T am Gerätefuß A aufgehängt. Zwischen M und A befindet sich die Quarzsäule Q, deren Wechselladungen durch einen Röhrenverstärker verstärkt werden. Als Anzeigegerät dient ein Elektronenstrahlrohr.

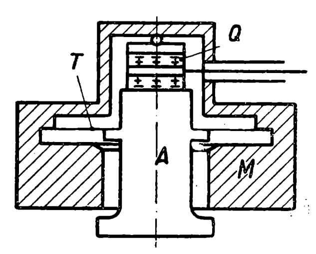


Abb. 154 Piezoelektrischer Beschleunigungsmesser

Ähnlich sind die kapazitiven (*322*), induktiven (*249*) und magnetostriktiven (*372*) Beschleunigungsmesser aufgebaut, sie werden jedoch an Empfindlichkeit von den piezoelektrischen übertroffen.

10,5 Geschwindigkeitsmesser

Weg- und Beschleunigungsmesser zeigen den Relativweg r an, woraus auf den Verlauf des Weges u oder der Beschleunigung $\ddot{u}$ geschlossen wird. Mit Hilfe einer geeigneten Meßanordnung kann man aber auch die erste Ableitung von r messen. In Abb. 155 ist ein solches Gerät schematisch dargestellt. In dem Gehäuse A ist die träge Masse m an der Feder c aufgehängt und wird durch den Kolben b gedämpft. An m ist eine zylindrische Tauchspule S befestigt, die im Ringspalt eines Permanentmagneten F schwingen kann, dessen induzierte Spannung der Geschwindigkeit proportional ist. Die Differentialgleichung (10/17) gibt Antwort auf die Frage, welche Ableitung der einwirkenden Bewegung durch ein solches Gerät gemessen werden kann. Mit der Relativgeschwindigkeit

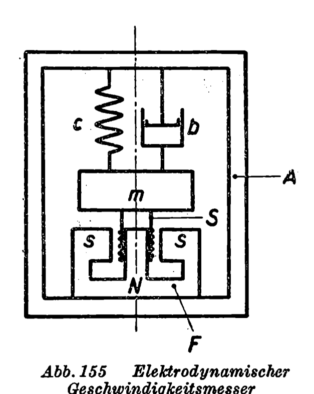


Abb. 155 Elektrodynamischer Geschwindigkeitsmesser

$$\frac{dr}{dt} = i\,\Omega\,\mathfrak{R}\,e^{i\Omega t} = \mathfrak{V}_r\,e^{i\Omega t}$$

und der Absolutgeschwindigkeit

$$\frac{du}{dt} = i\,\Omega\,\mathfrak{U}\,e^{i\Omega t} = \mathfrak{V}_u\,e^{i\Omega t}$$

erhält man aus Gleichung (10/19)

$$\mathfrak{V}_r = -\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{V}_u. \tag{10/26}$$

Da $|\mathfrak{V}_r|$ der induzierten Spannung e proportional ist, bekommt man schließlich für die angezeigte Spannung

$$e = C \cdot V_u \cdot V_1, \tag{10/26a}$$

worin V_1 die Vergrößerungsfunktion, V_u die Amplitude der Geschwindigkeit und C eine Apparatekonstante ist. Für die Phasenverschiebung besteht zwischen e und V_u wieder die Beziehung (10/21).

Damit das Gerät den Verlauf sowohl hinsichtlich der absoluten Größe der Amplitude als auch der Phase richtig wiedergibt, sind dieselben Bedingungen einzuhalten, wie sie bereits bei den Wegmessern besprochen wurden: niedrige Eigenfrequenz und passende Größe der Dämpfungskonstanten.

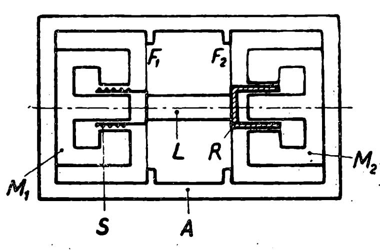


Abb. 156 Philips-Geschwindigkeitsmesser

Es soll nur kurz darauf hingewiesen werden, daß auch die dritte zeitliche Ableitung der Amplitude, die man mit *Ruck* bezeichnet, mit Hilfe eines geschwindigkeitsfühlenden Gerätes bestimmt werden kann.

In Abb. 156 ist die Konstruktion eines Geschwindigkeitsmessers der Fa. Philips vereinfacht

dargestellt. In einem rechteckigen Gehäuse A sind zwei permanente Topfmagnete M_1 und M_2 gleichachsig befestigt. In den Ringspalten der Magnete können sich in axialer Richtung eine Tauchspule S und der Dämpferring R bewegen, die auf einer gemeinsamen Achse L sitzen, die zugleich als träge Masse wirkt. Zwei weiche Membranfedern F_1 und F_2 dienen zur Führung des Stabes L und zugleich als Rückstellfedern. Die magnetische Induktion im Spalt des Magneten M_2 ist so bemessen, daß die Dämpfung des Ringes R aus Kupfer oder Aluminium optimal wird. Das Gerät kann in senkrechter und horizontaler Stellung benutzt werden. Zur Aufzeichnung der in der Tauchspule induzierten Spannung wird ein Röhrenverstärker mit Elektronenstrahloszillograph benutzt.

10,6 Ballistische Messungen

Für eine Reihe physikalischer, insbesondere elektrischer Messungen ist die Bestimmung kurzer Impulse von Bedeutung. Solche Impulse sind bequem mit Hilfe eines schwingungsfähigen Systems zu messen, sofern die Impulsdauer bedeutend kleiner als die Eigenschwingungsdauer des Meßsystems ist. Geht man von der Differentialgleichung (10/15) für ein Drehsystem aus, so gilt

$$\Theta \ddot{\varphi} + B \dot{\varphi} + C \varphi = K m,$$

wenn K eine Apparatekonstante und m ein auf das System wirkendes Moment ist. Nun soll das System zur Zeit $t = 0$ durch einen kurzen Impuls aus der Ruhelage gebracht werden. Die Zeitdauer des Stoßes sei so klein, daß das System für $t = 0$ als noch in Ruhe befindlich betrachtet werden kann ($\varphi = 0$), woraus sich aus (10/15) durch Integration ergibt

$$\Theta \dot{\varphi} = K \int m \, d t \quad \text{oder} \quad \dot{\varphi} = \frac{K \cdot J}{\Theta}, \tag{10/27}$$

wenn wir den Impuls $\int m\,dt$ mit J bezeichnen. Mit dieser anfänglichen Winkelgeschwindigkeit ist die Gleichung der freien gedämpften Schwingung zu behandeln, also

$$\Theta \ddot{\varphi} + B \dot{\varphi} + C \varphi = 0. \tag{10/28}$$

Die Lösung, die für $t = 0$ $\varphi = 0$ liefert, lautet mit den in § 10,12 benutzten Abkürzungen

$$\varphi = A\, e^{-\delta t} \sin \nu t, \tag{10/29}$$

worin die Abklingungskonstante $\delta = B/2\,\Theta$, die ungedämpfte Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{C/\Theta}$, die gedämpfte Eigenfrequenz $\nu = \omega \sqrt{1 - D^2}$ und das Dämpfungsmaß $D = \delta/\omega$ sind. Für $t = 0$ muß sein

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{K \cdot J}{\Theta} = A\, \nu,$$

woraus folgt

$$A = \frac{K}{\Theta \nu} J = \frac{K}{\Theta \omega \sqrt{1 - D^2}} J.$$

Durch Differenzieren von (10/29) erhält man den ersten Maximalausschlag, der zur Zeit t_m erreicht werden soll.

$$0 = -\delta \sin \nu t_m + \nu \cos \nu t_m$$

oder

$$\operatorname{tg} \nu t_m = \nu/\delta = \frac{\sqrt{1-D^2}}{D} . \tag{10/30}$$

Für sehr geringe Dämpfung ($D \to 0$) wird die rechte Seite der Gleichung (10/30) angenähert $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ und damit

$$t_m = \frac{\pi}{2\nu} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\Theta}{C}} , \tag{10/31}$$

also etwa der halben Schwingungsdauer. Durch Einsetzen von Gleichung (10/31) in (10/29) erhält man den maximalen Ausschlagswinkel φ_m, den ballistischen Ausschlag zu

$$\varphi_m = \frac{K J}{\Theta \nu} e^{-\delta \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\Theta}{C}}} = \frac{K J}{\sqrt{\Theta C}} e^{-\frac{B \pi}{4 \sqrt{\Theta C}}} . \tag{10/32}$$

Der ballistische Ausschlag ist also unter den anfangs gemachten Voraussetzungen dem Impuls J proportional und für kleine Dämpfung nur wenig von der Abklingkonstanten abhängig. Man kann also schreiben

$$J = C_b \cdot \varphi_m$$

und bezeichnet C_b als ballistische Konstante; für sie gilt

$$C_b = \frac{\sqrt{\Theta C}}{K} \exp \frac{\pi}{4} \frac{B}{\sqrt{\Theta C}} . \tag{10/33}$$

Beim Einwirken eines stationären Momentes m erhält man den Ausschlag $\varphi = K\, m/C$ und daraus für m die Konstante C_d

$$C_d = C/K .$$

Für kleine Dämpfung wird damit das Verhältnis der beiden Apparatekonstanten

$$\frac{C_b}{C_d} = \frac{\sqrt{\Theta C}}{C} = \sqrt{\frac{\Theta}{C}} = \frac{1}{\omega} \tag{10/34}$$

umgekehrt proportional der ungedämpften Eigenfrequenz. Das bedeutet, daß der ballistische Ausschlag um so größer wird, je geringer die Eigenschwingungsdauer des Meßsystems ist, wobei allerdings die Impulsdauer im Verhältnis zu dieser immer sehr klein sein muß.

Dieselben Überlegungen lassen sich auch für den Fall des aperiodisch gedämpften Schwingsystems anwenden, wobei vom Lösungsansatz der Gleichung (10/2c) auszugehen ist. In diesem Fall wird

$$\varphi = e^{-\delta t} A\, t , \tag{10/35}$$

woraus man die Zeit, nach der der erste Maximalausschlag erreicht wird, zu

$$t_m = \frac{1}{\delta}$$

erhält. Der Maximalausschlag beträgt in diesem Fall

$$\varphi_m = e^{-1} \frac{K}{\Theta} J \cdot \frac{2\,\Theta}{B} = \frac{1}{e} \frac{2\,K}{B} J\,, \tag{10/36}$$

ist also nur von K und der Dämpfungszahl B, nicht aber mehr von der Federkonstanten C und dem Trägheitsmoment Θ abhängig. Die ballistische Konstante C_b' im aperiodischen Grenzfall wird damit $C_b' = e\,B/2\,K$.

Die hier abgeleiteten Beziehungen werden bei der Messung von kurzen Stromimpulsen und elektrischen Ladungen mit Hilfe des ballistischen Galvanometers (Bd. III) angewandt.

10,7 Selbsttätige Regelung physikalischer Größen (*222*, *264*, *265*)

10,71 *Grundsätzliches*

Bei einer Reihe physikalischer Aufgaben ist die zu bestimmende Meßgröße, z. B. die Länge eines Stabes, von mehreren Zustandsgrößen, wie z. B. Druck, Temperatur, magnetischer Feldstärke, zugleich abhängig. Um die physikalischen Zusammenhänge mit einer gewünschten Zustandsgröße zu erforschen, müssen die anderen Einflüsse rechnerisch berücksichtigt oder bei der Versuchsdurchführung konstant gehalten werden. Andere Beispiele sind das Beibehalten einer konstanten Drehzahl eines Motors, unabhängig von der Belastung und den Schwankungen der zugeführten Energie oder die Herstellung konstanter elektrischer Spannung. Diese sich auf alle Gebiete der messenden Physik erstreckende wichtige Aufgabe läßt sich nur für geringe Genauigkeitsansprüche von Hand bewerkstelligen; für große zeitliche Konstanz ist das die Aufgabe einer selbsttätigen Regelanlage. Dazu kommt in einigen Fällen die Forderung, eine physikalische Größe in vorgegebener Weise in Abhängigkeit von der Zeit genau einzustellen (*Programmregelung*). Von den zahlreichen Anwendungsgebieten der selbsttätigen Regelung auf physikalischem Gebiet sollen nur einige Beispiele genannt werden:

Drehzahl
Geschwindigkeit
Durchflußmenge
Flüssigkeits- und Gasdruck
Flüssigkeitshöhe
Mechanische Spannung

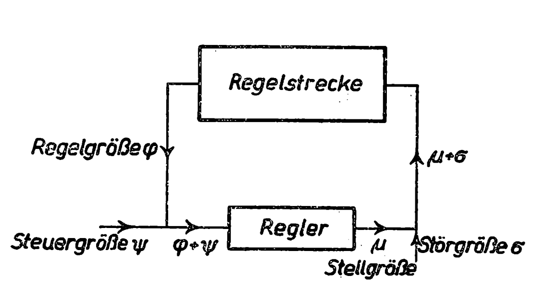
Temperatur
Wärmemenge
Feuchtigkeit

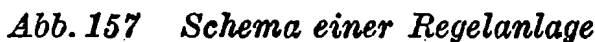
elektrische Spannung
Strom und Leistung
Widerstand
Frequenz
magnetische Induktion
Verstärkung einer Röhre

Lichtmenge
Flächenhelligkeit

Die selbsttätige Regelung verlangt ein Meldeorgan, meist als *Regler* bezeichnet, das die Änderung des in Frage stehenden Zustandes oder deren Folgen (Drehzahl, Geschwindigkeit, Temperatur) nicht nur anzeigt, sondern auch auf ein Steuerorgan einwirkt, so daß der Änderung des Zustandes entgegengewirkt wird. Das Meldeorgan muß

also auf Grund seiner Energie eine Reglerkraft ausüben können, mit der unmittelbar oder mittelbar mit Hilfe eines Verstärkers ein Steuerorgan betätigt werden kann. Die Versuchsanordnung, deren Meßgröße geregelt werden soll, wird vielfach als *Regelstrecke* bezeichnet. Der schematische Aufbau einer Regelanlage ist in Abb. 157 dargestellt. Die zu regelnde physikalische Größe, die *Regelgröße* φ, wird mit einem Meßgerät, dem *Fühler*, bestimmt und dem Regler zugeleitet. Soll die einzuhaltende Größe von außen her eingestellt werden können oder einen bestimmten zeitlichen Ablauf vorgeschrieben bekommen, so addiert sich zur Regelgröße φ die Steuergröße ψ. Der Regler bildet aus der ihm zugeführten Meßgröße und eventuell deren zeitlichen Ableitungen eine in ihrem zeitlichen Verlauf und ihrer Größe von seinem Aufbau abhängige *Stellgröße* μ, die die Regelstrecke in dem Sinn beeinflußt, daß diese der Änderung des Zustandes entgegenwirkt. Durch Schwankungen der Antriebsenergie kommen noch unkontrollierbare Störeinflüsse hinzu, die als *Störgröße* σ zur Stellgröße μ hinzuzufügen sind.




Abb. 157 Schema einer Regelanlage

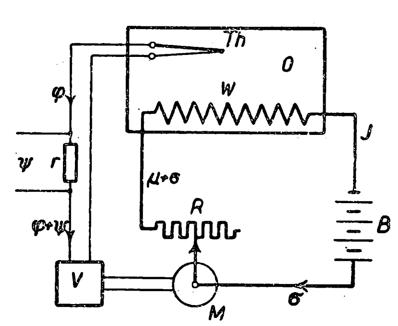


Abb. 158 Selbsttätige Temperaturregelung

Die einzelnen Begriffe sollen an Hand zweier Beispiele genauer erläutert werden. In Abb. 158 ist die selbsttätige Regelung der Temperatur eines elektrischen Ofens dargestellt *(91)*. Der Röhrenofen O wird durch die Heizwicklung W elektrisch beheizt, wozu der Strom J erforderlich ist. Die in O herrschende Temperatur wird mit Hilfe eines Thermoelementes Th gemessen und die erzeugte Thermokraft als Regelgröße dem Regelorgan zugeführt. Da die von Th gelieferte Energie nicht ausreicht, den Heizstrom unmittelbar zu beeinflussen, wird diese durch einen Röhrenverstärker V so weit verstärkt, daß ein kleiner Stellmotor M gesteuert werden kann. Dieser verschiebt mit Hilfe einer nicht gezeichneten Untersetzung den Abgriff des Heizstromwiderstandes R im Sinne einer Gleichhaltung der Ofentemperatur. Um diese willkürlich einstellen zu können, ist im Thermokreis der Widerstand r eingeschaltet, der von einem Hilfsstrom durchflossen wird und eine zusätzliche Spannung zur Folge hat. In der in der Regeltechnik gebräuchlichen Ausdrucksweise bezeichnet man das Thermoelement als den Meßfühler, M als Stellmotor, R als Kraftschalter, V, M und R zusammen als Regler. Über den Aufbau und die Wirkungsweise des Verstärkers ist zunächst noch nichts vorausgesetzt. Dieser kann die Thermokraft von Th oder deren zeitliche Ableitung oder beides zusammen in die Stellgröße umformen, kann mit Verzögerung arbeiten oder eine *Rückführung* besitzen. Der Kraftschalter kann stetig, stufenweise oder im Grenzfall nur ein- und ausschalten. Durch die unregelmäßigen Schwankungen der Heizspannung entsteht eine zusätzliche Störgröße σ.

Das zweite Beispiel betrifft die selbsttätige Regelung der Drehzahl eines Elektromotors (Abb. 159). Der Motor M besitzt auf der Ankerwelle einen kleinen Generator F mit permanentem Feldmagneten (Drehzahlgeber § 8,23), dessen erzeugte Spannung und Frequenz der Drehzahl proportional sind. Durch einen Verstärker V wird die vom Fühler F gelieferte Wechselspannung in einen Gleichstrom umgewandelt, womit die Reglerspule Sp betrieben wird. Ein vor der Spule befindlicher Eisenanker A, der durch eine elastische Feder in einer Gleichgewichtslage gehalten wird und am Regelwiderstand R einen Abgriff betätigt, wird entsprechend der Stellgröße mehr oder weniger in die Spule Sp hineingezogen und regelt damit den Strom in der Feldwicklung W des Motors und entsprechend dessen Drehzahl. In diesem Falle besteht der Regler aus dem Verstärker V, der Spule Sp, dem Anker A mit Rückstellfeder C (Stellmotor) und dem *Kraftschalter* R.

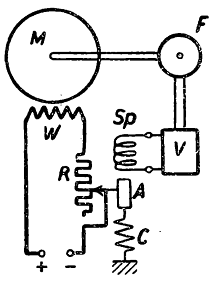


Abb. 159 Selbsttätige Drehzahlregelung

Bereits an dieser Stelle sei auf einen wichtigen Unterschied der Stellmotoren in den beiden Beispielen hingewiesen. Während in Abb. 159 die Meßgröße eine entsprechende gleichphasige Stellgröße der Verschiebung am Regelwiderstand R hervorruft, ist in Abb. 158 die Verstellung am Heizwiderstand R um 90° nacheilend und zeitproportional. Auf weitere Einzelheiten und deren mathematische Behandlung wird im fogenden eingegangen werden.

10,72 *Bauelemente der Regelanlage*

Im Aufbau einer Regelanlage lassen sich zwei Ausführungsformen unterscheiden, die jedoch rechnerisch gleichartig zu behandeln sind: unmittelbare und mittelbare Regelung. Der unmittelbare Regler überträgt die Anzeige des Fühlers ohne weitere Hilfsenergiequellen auf die Kraftquelle der Reglerstrecke; die Stellkraft des Fühlers muß also so groß sein, daß der Kraftschalter verstellt werden kann. Beim mittelbaren Regler benötigt man zur Verstellung des Stellgliedes eine Hilfsenergiequelle, die den Kraftschalter der Regelstrecke betätigt.

Daraus ergeben sich folgende erforderlichen Hauptbauglieder einer Regelanlage:

a) *Fühler* zur Messung der Regelgröße und eventuell ihrer zeitlichen Ableitungen. In Abb. 160 sind einige Ausführungsbeispiele aus der Vielzahl der möglichen Formen ausgewählt.

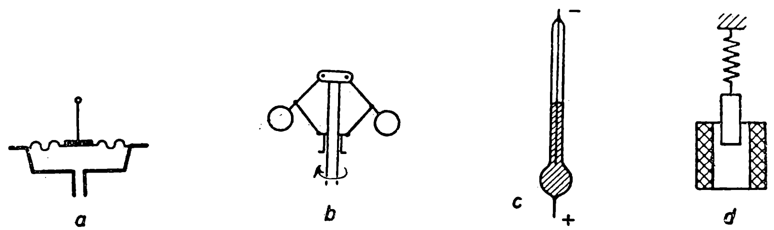


Abb. 160 a–d Meßfühler. Druck (a), Drehzahl (b), Temperatur (c), Spannung oder Strom (d)

b) *Differentialquotientenfühler.* In manchen Fällen genügt die Messung der Regelgröße und ihre Weiterverstärkung im Regler noch nicht zur Erzielung eines stabilen

Regelverhaltens. Es ist dann erforderlich, die zeitliche Ableitung der Regelgröße zu bilden, wozu die in der Abb. 161 ausgewählten Ausführungen angewendet werden.

c) Zur Weiterleitung einer Regelgröße bedient man sich *Übertragungsmittel*, die aus mechanischen Baugliedern bestehen können, bei physikalischen Regelanlagen vielfach durch elektrische Leitungen oder optische Mittel ersetzt werden.

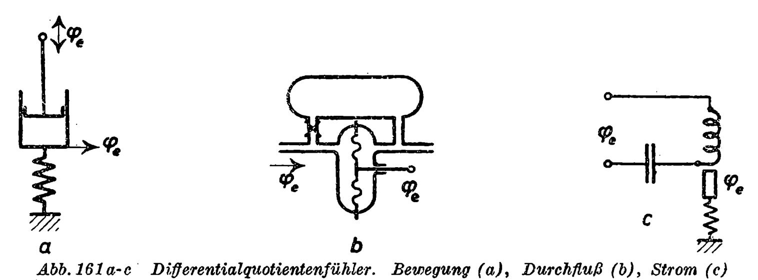


Abb. 161 a–c Differentialquotientenfühler. Bewegung (a), Durchfluß (b), Strom (c)

d) Die Energiezufuhr der Reglerstrecke wird durch den *Kraftschalter* gesteuert, der durch möglichst geringe Verstellkräfte große Leistungen regeln und rückwirkungsfrei verarbeiten soll. Dazu dienen hydraulische, elektrische und optische Hilfsmittel, von denen in Abb. 162 einige Beispiele ausgewählt worden sind.

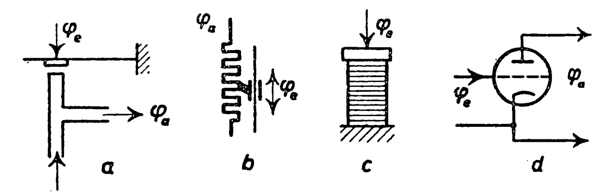


Abb. 162 a–d Kraftschalter. Bewegung-Druck (a), Bewegung-Strom (b), Druck-Widerstand (c), Spannung-Strom (d)

e) Um größere Stabilität des Regelkreises zu erhalten, wird oft eine sog. *Rückführung* eingeschaltet, die abhängig von der Stellgröße μ die Wirkung der Eingangsregelgröße φ zum Teil wieder kompensiert. An dem in Abb. 163 dargestellten Beispiel einer Rückführung sei der Verstellmotor M mit zwei Ankerwicklungen W_1 und W_2 ausgerüstet. W_1 werde von einem zur Regelgröße φ in fester Beziehung stehenden Strom durchflossen, wodurch der Abgriff K des Regelwiderstandes R verschoben werden möge. Die zweite Ankerwicklung W_2 liege zwischen dem Regelkontakt K und dem Mittelabgriff eines an einer Gleichspannung liegenden Potentiometers P. Wird nun durch die Regelgröße der Verstellmotor in Bewegung versetzt und damit K verschoben, so entsteht mit zunehmender Verstellung μ eine Spannung an W_2, die ein zu W_1 entgegengesetztes Drehmoment zur Folge hat und die Verstellung verlangsamt. Wird anschließend $\varphi = 0$, so wird μ durch die Wirkung von W_2 wieder rückgängig gemacht. In diesem Beispiel wirkt die Rückführung „starr“ und ent-

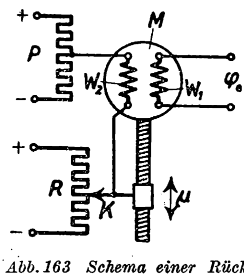


Abb. 163 Schema einer Rückführung

spricht einer elastischen Feder. Durch geeignete Schaltmittel und Verbindungen kann man diese verzögernd und nachgebend wirken lassen.

f) Durch den *Sollwerteinsteller* wird der Regelgröße φ eine einstellbare Steuergröße ψ hinzugefügt, womit der Zustand der Regelstrecke beliebig wählbar und jederzeit veränderbar ist.

10,73 *Darstellung der Regelkreisglieder (266)*

Die im vorigen Abschnitt besprochenen Bestandteile einer Regelanlage einschließlich der Regelstrecke bezeichnet man als Regelkreisglied. Durch den vorgegebenen Zweck eines solchen Gliedes ist immer eine Wirkungsrichtung gekennzeichnet, so daß man bei der rechnerischen Behandlung die Abhängigkeit der Ausgangsgröße φ_a von der Eingangsgröße φ_e zu untersuchen hat.

Ein einzelnes Glied läßt sich immer in Form einer Differentialgleichung

$$f_a\,(\varphi_a,\ \varphi_a'',\ \varphi_a'''\ldots) = f_e\,(\varphi_e,\ \varphi_e',\ \varphi_e''\ldots) \qquad (10/37)$$

beschreiben. Setzt man die Störfunktion am Eingang des Regelkreisgliedes als harmonische Schwingung der Frequenz ω an, also

$$\varphi_e = \varphi_{e\,0}\, e^{i\omega t}, \qquad (10/38)$$

so wird bei einem linearen System die Ausgangsgröße im eingeschwungenen Zustand dieselbe Frequenz aufweisen, also

$$\varphi_a = \varphi_{a\,0}\, e^{i(\omega t + \alpha)}, \qquad (10/39)$$

wobei der Phasenverschiebungswinkel α auftritt. Das Verhältnis von Ausgangs- zur Eingangsgröße in Abhängigkeit von der Frequenz ω

$$F\,(i\,\omega) = \frac{\varphi_a}{\varphi_e} = \frac{\varphi_{a\,0}\, e^{i(\omega t + \alpha)}}{\varphi_{e\,0}\, e^{i\omega t}} = \frac{1}{\varphi_{e\,0}}\, \varphi_{a\,0}{}^{i\alpha} \qquad (10/40)$$

bezeichnet man als Frequenzgang. Dieser läßt sich meist einfach für jedes einzelne Glied aufstellen.

Verstellt man plötzlich den Eingang um den Betrag $\varphi_e = 1$, den sogenannten Einheitsstoß, so wird das Verhalten des Gliedes durch die Übergangsfunktion $\varphi_a\,(t)$ beschrieben, die die Lösung der Differentialgleichung (10/37) für den Einheitsstoß darstellt. Nach FOURIER ist der Einheitsstoß darstellbar durch das Integral

$$\varphi_e\,(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega}\, d\,\omega. \qquad (10/41)$$

Da für eine stationäre Teilschwingung nach (10/40) $\varphi_a = \varphi_e F(i\omega)$ wird und jede beliebige Funktion, also auch der Einheitsstoß, als Summe periodischer Funktionen darstellbar ist, läßt sich schreiben

$$\varphi_a\,(t) = \frac{\varphi_{e\,0}}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F\,(i\,\omega)\, \frac{e^{i\omega t}}{\omega}\, d\,\omega, \qquad (10/42)$$

wodurch der Frequenzgang mit der Übergangsfunktion verknüpft ist.

Zur übersichtlichen Darstellung des Frequenzganges werden vielfach neben den in der Schwingungslehre üblichen Amplituden- und Phasendiagrammen (siehe Abb. 147 und 148) die Amplitude und Phase zugleich in den sogenannten Ortskurven auf der komplexen Ebene dargestellt. Diese können punktweise entsprechend den in Abb. 145 gezeigten Vektordiagrammen konstruiert werden; in einigen einfachen Beispielen ist die Gleichung der Ortskurve explizit darstellbar. Ein Beispiel für den Frequenzgang

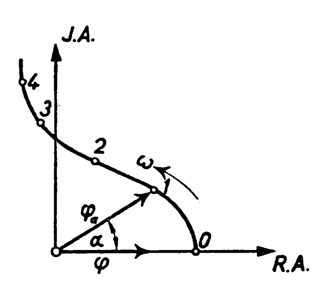


Abb. 164 Ortskurvendarstellung

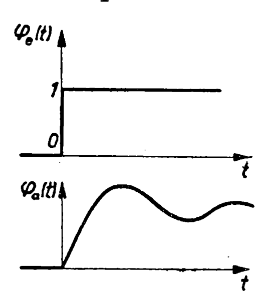


Abb. 165 Übergangsfunktion

ist in Abb. 164 dargestellt, wobei zu beachten ist, daß die Frequenz ω längs der Kurve eingetragen und abzulesen ist. Die Eingangsgröße φ_e ist auf der reellen Achse aufgetragen; Verstärkung und Phase sind bequem zu entnehmen. Die Ortskurvendarstellung verlangt keine Kenntnis des inneren Aufbaus eines Regelkreisgliedes und eignet sich besonders zur Darstellung experimenteller Ergebnisse. Das Verhalten eines ganzen Regelkreises läßt sich einfach aus den Ortskurven der einzelnen Glieder, die in bestimmter Weise zusammengesetzt sind, entnehmen.

Die Übergangsfunktion $\varphi_a(t)$ stellt den zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße vom Zeitpunkt des Einsetzens des Einheitsstoßes gerechnet dar, gibt also den Einschwingvorgang wieder (Abb. 165). Sie ist besonders einfach experimentell aufzunehmen.

10,74 *Mathematische Behandlung der Regelkreisglieder*

Für die wichtigsten physikalischen Regelanordnungen ist es ausreichend, wenn man sich im folgenden auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschränkt. Diese erhalten damit die folgende Form

$$T_2\,\varphi_a'' + T_1\,\varphi_a' + \varphi_a = r\int \varphi_e\,d\,t + r_0\cdot\varphi_e\,. \tag{10/43a}$$

Die zugehörige Frequenzganggleichung ergibt sich nach (10/40) zu

$$F(i\,\omega) = \frac{r\,(i\,\omega)^{-1} + r_0}{1 + T_1\,(i\,\omega) + T_2\,(i\,\omega)^2}. \tag{10/43b}$$

Die Glieder auf der linken Seite von Gleichung (10/43a) bestehen aus Ableitungen der Ausgangsgröße und entsprechen dem dynamischen Verhalten eines gedämpften Schwingers, wie der Vergleich mit Gleichung (10/1) ergibt. Sie werden vielfach Verzögerungsglieder genannt, während man von den Gliedern der rechten Seite als Regelbefehlsgliedern spricht. Beide Seiten werden zweckmäßig in ihrem Verhalten getrennt betrachtet. Geht man zunächst von der Differentialgleichung

$$T_2\,\varphi_a'' + T_1\,\varphi_a' + \varphi_a = r_0\,\varphi_e \tag{10/44a}$$

aus, deren Frequenzgang durch die Beziehung

$$F(i\omega) = r_0 \frac{1}{1 + T_1(i\omega) + T_2(i\omega)^2} \qquad (10/44\text{b})$$

beschrieben wird, so erhält man als Übergangsfunktion für die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\varphi_a = \varphi_e \left(1 - e^{\frac{-t}{T_1}}\right) \qquad (10/45)$$

und für die Differentialgleichung zweiter Ordnung die bereits bekannte Lösung

$$\varphi_a = \varphi_e e^{-\delta t} \sin \omega t. \qquad (10/46)$$

Einige der dazugehörigen Ortskurven, Übergangsfunktionen, mechanischen und elektrischen Verwirklichungsmöglichkeiten sind in Abb. 166 und 167 zusammen-

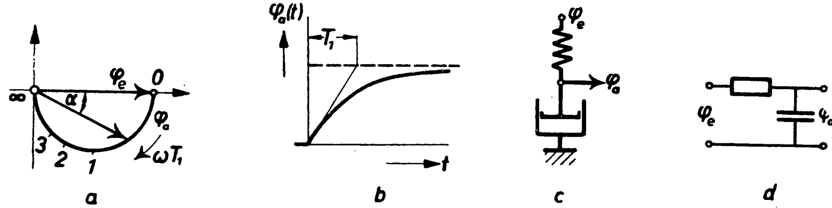


Abb. 166 a–d Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung.
a Ortskurve, b Übergangsfunktion, c mechanisches Beispiel, d elektrisches Beispiel

gestellt. Diese lassen erkennen, daß alle Ortskurven im Punkt r_0 auf der reellen Achse beginnen und im Gebiet negativer Phasenwinkel verlaufen. Die Ortskurve der Differentialgleichung erster Ordnung ist ein Halbkreis; die Kurven zweiter Ordnung blähen sich mit abnehmender Dämpfung auf (Resonanz) und münden in den Nullpunkt mit einem Phasenwinkel von 180°.

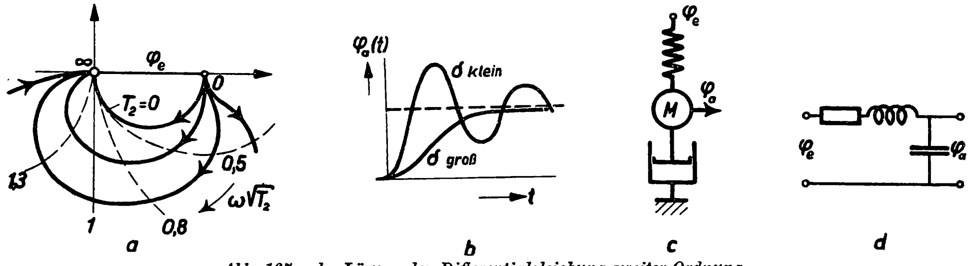


Abb. 167 a–d Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung.
a Ortskurve, b Übergangsfunktionen, c mechanisches Beispiel, d elektrisches Beispiel

Betrachtet man die rechte Seite der Gleichung (10/43a) für sich allein (Regelbefehlsglieder), so gilt

$$\varphi_a = r \int \varphi_e \, dt + r_0 \varphi_e \qquad (10/47\text{a})$$

und für den Frequenzgang

$$F(i\omega) = r(i\omega)^{-1} + r_0. \qquad (10/47\text{b})$$

Das in Gleichung (10/47 a) auftretende Integralglied sorgt für das Verschwinden bleibender Regelabweichungen bei Störung des Gleichgewichtszustandes. Die Lösung für das Glied erster Ordnung lautet $\varphi_a(t) = \varphi_e \cdot r \cdot t$; die dazugehörige Ortskurve und Übergangsfunktion und zwei Ausführungsbeispiele sind in der Abb. 168 zusammengestellt.

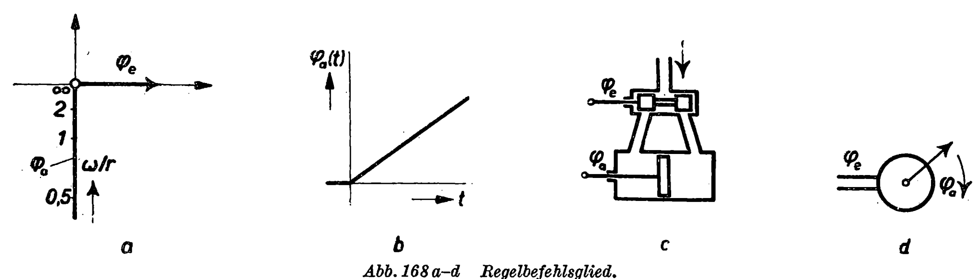


Abb. 168 a–d Regelbefehlsglied.
a Ortskurve, b Übergangsfunktion, c mechanisches Beispiel, d elektrisches Beispiel

Die Lösung eines beliebigen Regelkreisgliedes, das die inhomogene Differentialgleichung (10/43 a) befolgt, läßt sich durch Kombination der Ortskurven für die je-

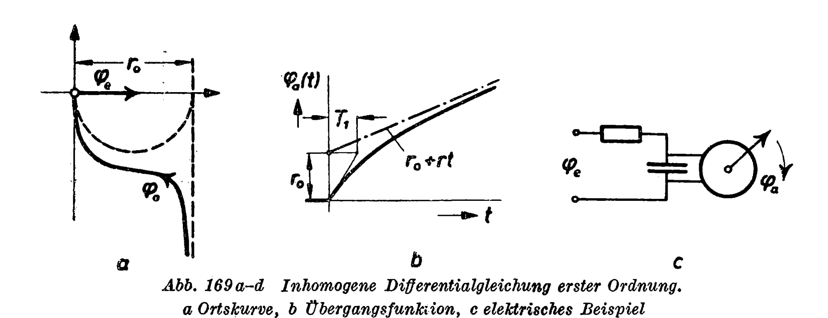


Abb. 169 a–d Inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung.
a Ortskurve, b Übergangsfunktion, c elektrisches Beispiel

weiligen homogenen Differentialgleichungen gewinnen. Als Beispiel ist in Abb. 169 das Verhalten des Gliedes mit der Gleichung

$$T_1 \varphi_a' + \varphi_a = r_0 \varphi_e + r \int \varphi_e \, d\, t$$

dargestellt, das durch Kombination der Abb. 166 und 168 erhalten werden kann.

10,75 *Regelkreis*

Nach der Behandlung der einzelnen Regelkreisglieder sind wir imstande, beide Bestandteile eines geschlossenen Regelkreises, Regler und Regelstrecke, zusammenzufassen. Da der Regelkreis aus mehreren hintereinandergeschalteten Gliedern besteht, für die jeweils die Ausgangsgröße des vorhergehenden Gliedes Eingangsgröße des folgenden ist, kann der Gesamtfrequenzgang durch vektorielle Multiplikation der Einzelfrequenzgänge bestimmt werden. Beschränken wir uns auf lineare Differentialgleichungen — der Einfluß der Laufzeit, Reibung und Ansprechempfindlichkeit wird

durch nichtlineare Glieder beschrieben —, deren Beiwerte sich aus den Abmessungen der Geräte ergeben, so sind folgende Beiwerte zu unterscheiden:

Regelbefehlsglieder r } *des Reglers*
Verzögerungsglieder T }
Kenngröße s *der Regelstrecke.*

Die Gleichung des Reglers läßt sich damit darstellen als

$$\sum_i T_i \mu^{(i)} = \sum_n r_n \varphi^{(n)} \tag{10/48a}$$

oder mit beschränkter Gliedzahl

$$T_2 \mu'' + T_1 \mu' + \mu = r \int \varphi \, d t + r_0 \varphi \,. \tag{10/48b}$$

In entsprechender Weise ist die Regelstrecke darzustellen durch

$$\sum s_k \varphi^{(k)} = -\mu \tag{10/49a}$$

bzw.

$$s_2 \varphi'' + s_1 \varphi' + \varphi = -\mu \,. \tag{10/49b}$$

Die Regelstrecke wird durch (10/49) als gedämpfter Schwinger [siehe Gleichung (10/1)] beschrieben, dessen Störglied μ die vom Regler erzeugte Stellgröße ist. Das negative Vorzeichen der Stellgröße besagt, daß die Regelstrecke immer so verstellt wird, daß die Abweichung der Regelgröße vom Sollwert beseitigt wird. Beachtet man, daß die Stellgröße μ für den Regler die Ausgangsgröße φ_a, für die Regelstrecke Eingangsgröße φ_e ist und eliminiert man μ aus (10/48a) und (10/49a), so erhält man schließlich die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises

$$\sum_i \sum_k T_i s_k \varphi^{(i+k)} + \sum r_n \varphi^{(n)} = 0 \,. \tag{10/50}$$

Beschränkt man für einfachere Probleme wieder die Gliedzahl, so wird aus (10/50)

$$T_1 s_2 \varphi'''' + (T_1 s_1 + s_2) \varphi''' + (r_1 + T_1 s_0 + s_1) \varphi'' + (r_0 + s_0) \varphi' + r \varphi = 0 \,. \tag{10/50a}$$

Diese Gleichung ist wieder durch eine Ortskurve darzustellen, aus der man das Reglerverhalten und die Stabilität des Regelkreises entnehmen kann. Kennt man die Frequenzgänge von Regler und Regelstrecke $F_R (i \omega)$ bzw. $F_S (i \omega)$, so muß außerdem, wie nicht bewiesen werden soll, für den geschlossenen Regelkreis die Beziehung gelten

$$F_R (i \omega) \cdot F_S (i \omega) = 1 \,. \tag{10/51}$$

10,76 *Stabilitätsbedingungen (339)*

Die Feststellung, ob der Regelkreis sich stabil verhält, ist die wichtigste mathematische Untersuchung des Problems. Liegt die vollständige Differentialgleichung des Kreises etwa in der Form

$$a_n \varphi^{(n)} + \ldots a_2 \varphi'' + a_1 \varphi' + a_0 \varphi = 0 \tag{10/52}$$

vor [vgl. Gleichung (10/50a)], so lauten nach HURWITZ (*179*) die Stabilitätsbedingungen:

1. Die Beiwerte der Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises (10/52) müssen alle vorhanden sein und gleiches Vorzeichen besitzen.
2. Die höchste Determinante muß größer als Null sein.

Zur Anwendung der Stabilitätsbedingungen nach LEONHARD (*223*) trägt man die charakteristische Gleichung (10/52) als Ortskurve auf. Ihre einzelnen Glieder a_0, $a_1\,\varphi'$, $a_2\,\varphi''$ ... stellen bei einer harmonischen Schwingung $\varphi = \varphi_0\, e^{i\omega t}$ die Vektoren a_0, $a_1\,(i\,\omega)$, $a_2\,(i\,\omega)^2$, ... eines nicht geschlossenen Polygons dar, dessen Resultierende $R\,(i\,\omega)$ für die einzelnen Frequenzen eine Ortskurve durchläuft. Die Stabilitätsbedingungen lauten dann

1. Die Ortskurve darf nicht im Nullpunkt, sondern muß bei a_0 auf der reellen Achse beginnen.
2. Die Ortskurve muß für den Frequenzverlauf von 0 bis ∞ bei einer Gleichung n-ten Grades n Quadranten linksherum durchlaufen, und zwar in der Reihenfolge 1, 2, 3 usw.
3. Die Phasenwinkel der Ortskurve müssen mit wachsender Frequenz stetig zunehmen.

§ 11 MESSUNG DER ELASTIZITÄT UND FESTIGKEIT

11,1 Allgemeines *(324)*

Ein fester Körper ändert beim Einwirken von deformierenden Kräften seine Gestalt, geht jedoch nach Aufhören der Krafteinwirkung wieder vollkommen in seine Ausgangslage zurück, wenn er sich elastisch verhält. Ist das nicht der Fall, dann bleibt nach der Beanspruchung eine Änderung der Abmessungen zurück, die das plastische Verhalten eines Stoffes kennzeichnet.

Die physikalische Deutung dieses verschiedenen Verhaltens scheint anschaulich und einfach zu sein, wenn wir uns den festen Körper als Raumgitter vorstellen, dessen Bausteine Ionen bzw. Atome sein sollen. Jeder dieser Gitterbausteine befindet sich inmitten seiner nächsten Nachbarn im stabilen Gleichgewicht, das aus den Anziehungs- und Abstoßungskräften zwischen zwei gleichartigen Bausteinen resultiert. Bei einer Krafteinwirkung von außen, z. B. bei Zugbeanspruchung, werden die Gitterbausteine auf etwas größere gegenseitige Abstände gebracht, wodurch die Anziehungskräfte gegenüber dem Gleichgewichtszustand zunehmen und auf diese Weise der äußeren Kraft das Gleichgewicht halten können. Innerhalb eines großen Bereiches sind diese inneren Kräfte der Abstandsänderung proportional. Diese einfache Vorstellung setzt allerdings ein einheitliches Raumgitter, also einen *Einkristall,* voraus und berücksichtigt Gitterstörungen durch Fehlstellen und Störbausteine nicht. Im allgemeinen sind die festen Körper aus wahllos orientierten Kristalliten aufgebaut, deren elastische Eigenschaften an den Korngrenzen sprunghaft sich ändern. Trotz dieser bedeutenden Unterschiede zwischen dem Idealkristall und dem polykristallinen Körper gilt der lineare Zusammenhang zwischen der deformierenden Kraft und der Deformation in einem physikalisch kleinen Bereich.

Das plastische Verhalten läßt sich als Gleiten zweier Gitterebenen um mehrere Gitterabstände deuten, wenn eine Komponente der äußeren Kraft in einer Gitterebene zu liegen kommt. Die neue Gleichgewichtslage unterscheidet sich nicht von der ursprünglichen und ist daher stabil, d.h. es bleibt eine Formänderung zurück. Zur Überwindung der elastischen zwischenmolekularen Kräfte ist allerdings eine von der Substanz abhängige äußere Mindestspannung erforderlich, unterhalb derer sich der Körper elastisch verhält.

Nimmt man etwa ein exponentielles Kraftwirkungsgesetz zwischen zwei Gitterpunkten an, so hängt die sich ergebende Formänderung sowohl von der Art der Gitter-

bausteine als auch von deren geometrischer Anordnung (Kristallstruktur) ab. Im allgemeinsten Fall des *anisotropen* Körpers (trikliner Kristall) wird der Zusammenhang zwischen den Komponenten der mechanischen Spannung und der Deformation durch sechs Gleichungen beschrieben, die 21 voneinander unabhängige Konstanten enthalten. Mit zunehmender Symmetrie reduziert sich die Zahl der Konstanten bis auf drei im Fall des regulären Kristalls (*360*). Viele Festkörper, insbesondere die Metalle, bestehen gewöhnlich aus einem *Kristallhaufwerk* (siehe auch § 12,1), deren Kristallite keine Vorzugsrichtung besitzen, durch eine vorhergegangene mechanische oder thermische Behandlung jedoch mehr oder weniger ausgerichtet sein können (Walzen, Ziehen, Abschrecken usw.). Bei der Untersuchung solcher nicht als elastisch isotrop anzusprechender Proben werden daher vielfach Abweichungen der festgestellten elastischen Konstanten von denen des idealen isotropen Kristalles gefunden. Die experimentelle Bestimmung eindeutiger elastischer Konstanten, die für den Vergleich mit den theoretischen Vorstellungen von großer Bedeutung sind, kann aus diesen Gründen nur an Einkristallen angestellt werden. Eine angenäherte elastische Isotropie läßt sich meist durch eine geeignete Wärmebehandlung erreichen.

Während die Messung der elastischen Konstanten dem meist linearen Zusammenhang zwischen deformierender Kraft und Deformation entspricht, liefert die Festigkeitsuntersuchung die maximal aufzuwendende Energie, die zur Abtrennung zweier Gitterebenen oder Kristallite erforderlich ist. Bei diesen Versuchen wird die Beanspruchung so weit fortgesetzt, bis eine Trennung (Zerreißen, Zerdrücken, Abscheren) der Versuchsprobe erfolgt. Für die Art der Probeentnahme ist der Zweck der Untersuchung maßgebend. Sollen die an der Probe ermittelten Eigenschaften einen Rückschluß auf die elastischen Eigenschaften des ganzen Stückes ermöglichen, so muß sich die Probe im gleichen Zustand wie das fertige Stück befinden. Mechanische und thermische Nachbehandlung der Probe (Drehen, Schleifen, Erwärmen) können deren Eigenschaften maßgeblich verändern.

Bei der Untersuchung von Einkristallen ist darauf zu achten, daß bei der Probenvorbereitung die Kristalle nicht in ihren Eigenschaften beeinflußt werden. Kleine Kristalle an der Oberfläche sind möglichst durch Ätzen zu beseitigen. Bei einer nachträglichen Bearbeitung ist sehr sorgfältig zu verfahren, da die meisten Einkristalle entweder sehr weich oder sehr spröde sind (*347*). Am besten läßt sich die Probe abdrehen; durch Schleifen wird oftmals die Oberfläche gehärtet. Kristalle aus Legierungen, die durch langsames Erstarren gewonnen wurden, werden nicht homogen und müssen bei Temperaturen in der Nähe des Erweichungspunktes längere Zeit geglüht werden.

11,2 **Zug und Druck**

11,21 *HOOKEsches Gesetz*

Ein isotroper, zylindrischer Stab von der Länge l, dem Querschnitt F werde durch eine Kraft P in Richtung der Stabachse beansprucht. Innerhalb eines bestimmten Bereiches wird die sich einstellende Längenänderung Δl, die Dehnung, der Kraft P proportional. Bezeichnet man mit ε die relative Dehnung $\Delta l/l$ und mit $\sigma = P/F$ die elastische Spannung, so gilt

$$\varepsilon = \sigma \cdot \frac{1}{E}. \qquad (11/1)$$

Diese Gleichung ist der Inhalt des HOOKEschen Gesetzes, das die Proportionalität von Dehnung und Spannung beschreibt. Die Größe E von der Dimension einer Spannung ist eine Materialkonstante und wird *Elastizitätsmodul* der Dehnung genannt. Neben der Verlängerung Δl des Stabes wird senkrecht zur Stabrichtung eine Kontraktion beobachtet, die ebenfalls linear von der Spannung abhängt. Ist d der Stabdurchmesser und Δd dessen Änderung, so stellt der Quotient

$$\frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta l}{l} = \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} = \mu \qquad (11/2)$$

eine Materialkonstante dar, die man als Querkontraktionskoeffizient oder als POISSONsche Zahl bezeichnet. Die Volumenänderung des Stabes bei Beanspruchung durch Zug beträgt dann

$$F(1-\varepsilon_q)^2(1+\varepsilon)\,l - F\cdot l = F\,l\,(\varepsilon - 2\,\varepsilon_q) = F\,l\,\varepsilon\,(1-2\,\mu)\,. \qquad (11/3)$$

Da keine Volumenminderung stattfinden kann, muß also μ stets kleiner als 0,5 sein. Für Eisen und Stahl liegt μ zwischen 0,33 und 0,25; andere Metalle besitzen eine POISSON-Zahl, die dem Grenzwert 0,5 um so näher kommt, je niedriger ihr Schmelzpunkt liegt. Wegen der meist sehr geringen Meßlängen und der um den Faktor μ kleineren Dickenänderungen erfordert die Bestimmung von ε_q eine noch größere Sorgfalt als bei der Messung der Längsdehnung (*41*, *141*).

11,22 *Statische Verfahren (319)*

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls der Dehnung wird ein zylindrischer Stab vom Querschnitt F und der Meßlänge l in eine Vorrichtung eingespannt, mit welcher der erforderliche Zug bzw. Druck ausgeübt werden kann. Aus der Längenänderung Δl berechnet sich der Elastizitätsmodul E mit Gleichung (11/1) zu

$$E = \frac{P}{F}\cdot\frac{l}{\Delta l}\,.$$

Im physikalischen Maßsystem erhält E die Dimension dyn/cm², in der Technik wird sie kg/cm², wobei 1 kg/cm² = 981 000 dyn/cm² gilt.

Die *Prüfmaschinen* für Zug- und Druckbeanspruchung, bei denen Kräfte bis zu vielen Tonnen ausgeübt werden können, bestehen aus einem stabilen Stahlrahmen mit den beiden Einspannköpfen für die zu untersuchende Probe (*136*). Von diesen ist meist der untere fest, während der obere durch eine mechanisch angetriebene Spindel oder einen hydraulischen Kolben bewegt wird. Die Messung der auf die Probe ausgeübten Kraft P geschieht bei hydraulischen Maschinen durch ein am Druckzylinder angeschlossenes, genau geeichtes Manometer, bei anderen Arten durch sog. Druckdosen, ähnlich wie sie im § 9 beschrieben wurden. In einigen Fällen, besonders für geringere Kräfte, wird eine Neigungswaage benutzt. Die Genauigkeit der Kraftmessung übersteigt bei Prüfmaschinen für technologische Zwecke meist nicht 1%; für physikalische Messungen mit kleineren Kräften ist diese unter 10^{-3}.

Bei relativ großen Dehnungen ε kann die Längenänderung Δl mit Hilfe eines Okularmikrometers oder eines Kathetometers bestimmt werden. Bei kleinen Meßlängen von einigen cm reicht die Meßgenauigkeit dieser Methoden nicht mehr aus, und man verwandelt mittels kleiner Rollen die Wegänderungen in Winkeländerungen, die mit Spiegel und Fernrohr genau abzulesen sind (*100, 351*). Das sehr verbreitete

Feinmeßgerät nach MARTENS, das vereinfacht in Abb. 170 dargestellt ist, verwendet zu diesem Zweck zwei Stahlprismen R, die durch die beiden Bügel B mit mäßigem Druck G auf den Meßstab D gedrückt werden. Die Meßlänge l wird durch den Abstand der Schneiden und Kerben K bestimmt. An den Stahlprismen sind kleine Spiegelchen S befestigt, mit denen durch Fernrohr F und Skala C die Längenänderung an zwei gegenüberliegenden Meßstellen gemessen werden kann. Bezeichnet man mit r den Abstand der Prismenschneiden, mit t den abgelesenen Ausschlag an der A cm entfernten Skala, so gilt in guter Näherung

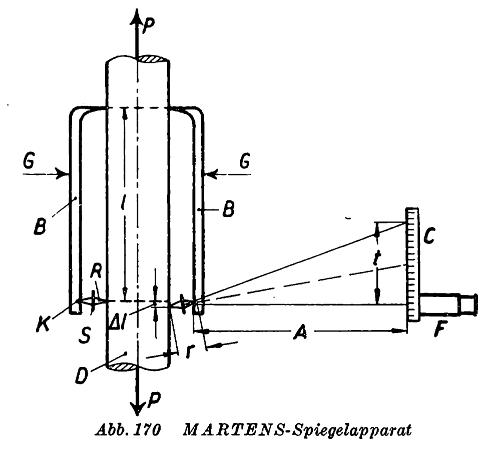


Abb. 170 MARTENS-Spiegelapparat

$$\Delta l = \frac{t \cdot r}{2A}. \qquad (11/4)$$

Bei der Messung ist darauf zu achten, daß Meßgerät und Probestab dieselbe Temperatur besitzen.

Die Dehnung sehr kurzer Stäbe kann man nach GRÜNEISEN (*140*) interferometrisch messen, wenn man nach Abb. 171 mit Hilfe von kurzen, den Meßstab umschließenden Röhren R zwei planparallele Glasplatten F so befestigt, daß zwischen diesen ein dünner Luftspalt entsteht. Der Meßabstand l entspricht der Entfernung der Befestigungsstellen (Spitzenschrauben). Man beobachtet im monochromatischen Licht das Wandern der Interferenzstreifen, wenn der Meßstab erschütterungsfrei und stetig belastet wird. Ersetzt man die beiden Platten F durch isoliert befestigte plattenförmige Elektroden, so kann man die Abstandsänderung, die einer Änderung der Kapazität gleichkommt, auch auf elektrischem Wege bestimmen (§ 2,52).

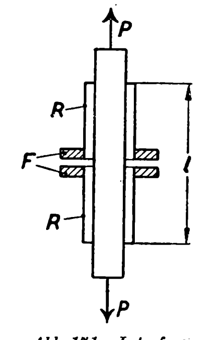


Abb. 171 Interferometrische Dehnungsmessung

In vielen Fällen lassen sich die im § 2,5 besprochenen elektrischen Methoden der Längenmessung auch zur elastischen Dehnungsmessung anwenden. Für sehr kleine Meßlängen, wie sie oft zur Aufnahme ebener Spannungsfelder erforderlich sind, dienen elektrische und optische Feinmeßgeräte, bei denen die Dehnung zunächst durch mechanische Hilfsmittel stark vergrößert wird (*271*).

Die Dehnungsmessungen werden am besten bei verschiedenen Belastungen P durchgeführt, um sich aus den gleichbleibenden Werten für E überzeugen zu können, daß man sich noch im Proportionalitätsbereich befindet.

11,23 *Dehnungsmessung bei verschiedenen Temperaturen*

Die theoretisch gefundenen Zusammenhänge zwischen Ausdehnungskoeffizient, Schmelzpunkt und Elastizitätsmodul oder anderen physikalischen Größen machen Dehnungsmessungen bei verschiedenen Temperaturen erforderlich. Für die Erzeugung hoher Temperaturen kommen vor allem elektrische Widerstandsöfen in Frage, bei

denen die Wärmeübertragung durch Konvektion der Ofenluft erfolgt. Man muß sich dabei überzeugen, daß die ganze Versuchsprobe dieselbe Temperatur besitzt. In dieser Beziehung günstiger sind elektrisch beheizte Flüssigkeitsöfen, deren Badflüssigkeit aus Salz- oder Metallschmelzen besteht. Für Temperaturen bis zu 250° C verwendet man Palmin oder Mineralöl, bis 700° C eine Mischung aus Kali- und Natronsalpeter, über 600° C kann auch eine Mischung von einem Drittel Chlorkalium und zwei Dritteln Chlorbarium verwendet werden, oberhalb von 1000° C Chlorbarium allein.

Temperaturen unterhalb der Raumtemperatur erzielt man durch *Kältemischungen*, wie z. B. Eis-NaCl (— 21° C), feste Kohlensäure-Alkohol oder Azeton (— 79° C). Für noch tiefere Temperaturen verwendet man flüssige Luft (— 192° C), wobei jedoch auf eine sorgfältige thermische Isolierung der Versuchsprobe zu achten ist, um an jeder Stelle dieselbe Temperatur zu haben.

Die Messung der Temperatur geschieht an mehreren Stellen mit Hilfe von Thermoelementen, seltener durch Widerstandsthermometer. Zur Dehnungsmessung, sofern nicht rein elektrische Verfahren vorgezogen werden, werden ähnliche Vorrichtungen wie bei Zimmertemperatur verwendet, wobei jedoch entweder die Meßbügel so lang gemacht sind, daß sie aus dem Ofen ragen, oder beim Martensapparat die Achsen, auf denen die Spiegel befestigt sind, durch Bohrungen im Ofen ins Freie geführt sind. Die Spiegel sind außerhalb des Ofens angebracht und können dort bequem abgelesen werden.

11,24 *Dynamische Verfahren (9, 139, 154)*

In einem Festkörper von der Dichte ϱ und dem Elastizitätsmodul E berechnet sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u einer elastischen longitudinalen Verdichtungswelle zu

$$u = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}. \tag{11/5}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u läßt sich bequem für stehende Schwingungen aus der sich ausbildenden Wellenlänge λ und der Schwingungszahl ν pro Sekunde (Tonhöhe) errechnen. Ein in der Mitte eingespannter Stab oder ein an den Enden eingespannter Draht schwingt so, daß in der Mitte ein Bewegungsknoten bzw. -bauch entsteht, so daß für die Grundschwingung gilt

$$u_0 = 2\, l\, \nu, \tag{11/6}$$

wenn l die Stab- bzw. Drahtlänge bedeutet. Für die n-te Oberschwingung wird entsprechend

$$u_0 = \frac{2\, l\, \nu}{n} \quad (n = 2, 3, 4 \ldots). \tag{11/7}$$

Die Gleichungen (11/6) und (11/7) sind mit großer Genauigkeit gültig, wenn man die Querkontraktion vernachlässigen kann, d. h. wenn die Stablänge sehr viel größer als der Durchmesser ist. Für *dickere* Stäbe ist der Einfluß der Kontraktion zu berücksichtigen, wobei sich ergibt

$$\frac{u}{u_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{n\, \pi\, r\, \mu}{2\, l}\right)^2}, \tag{11/8}$$

wenn r der Stabradius, n die Ordnungszahl und μ die Poisson-Konstante ist. Nach Gleichung (11/8) nimmt also mit zunehmender Stabdicke die Schallgeschwindigkeit ab. So wird z. B. für $r/l = 0{,}1$ und $\mu = 0{,}5$ die Schallgeschwindigkeit für die Grundschwingung um 6% geringer sein.

Die Longitudinalschwingungen erzeugt man durch Reiben mit einem für Metall mit Kolophonium eingeriebenen, für Glas angefeuchteten wollenen Lappen, oder auch durch Anschlagen mit einem weichen Hammer. Die Tonhöhe wird nach den in der Akustik gebräuchlichen Methoden bestimmt.

Für sehr genaue Messungen erregt man die Schwinger elektrisch mit Wechselströmen bekannter Frequenz, indem man sie zu Resonanzschwingungen anregt (*57*). Auch durch piezoelektrische Systeme und magnetostriktive Sender lassen sich kräftige Longitudinalschwingungen erzeugen (*124, 132, 311*). Mit Hilfe der sehr genauen elektrischen Methoden der Kurzzeitmessung (§ 3,6) läßt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit selbst bei kurzen Versuchslängen aus der Laufzeit eines Druckimpulses bestimmen (*184*).

Der mit Hilfe dynamischer Methoden bestimmte adiabatische Elastizitätsmodul ist im allgemeinen etwas größer als der aus Dehnungsversuchen gewonnene isothermische, da sich im ersten Fall die Kompressionswärme und auch die elastische Nachwirkung infolge der schnellen Richtungswechsel nicht ausgleichen können.

11,3 **Biegung**

11,31 *Statische Verfahren (327)*

In vielen Fällen sind die Verfahren der Dehnungsmessung nicht anwendbar, wie z. B. bei kleinen Kriställchen, die weder fest eingespannt noch zu elastischen Schwingungen erregt werden können. Oftmals gelingt es dann, den Elastizitätsmodul aus Biegeversuchen hinreichend genau zu ermitteln.

Wir wollen den einfachsten Fall der Biegung eines prismatischen Balkens für kleine Durchbiegungen betrachten. In der Abb. 172 ist ein im Querschnitt $x = 0$ fest eingespannter, durch die Einzellast P beanspruchter Balken dargestellt. Das auf den Einspannquerschnitt wirkende Moment $P \cdot l$ (l = Balkenlänge) ruft eine Durchbiegung des Balkens und damit im Einspannquerschnitt elastische Spannungen hervor, die diesem das Gleichgewicht zu halten haben. In dem dargestellten Beispiel treten im oberen Balkenteil Zugspannungen, im unteren Teil Druckspannungen auf. Dazwischen liegt senkrecht zur Belastung P die *neutrale Ebene* N—N, die unbeansprucht ist. Aus der Theorie der elastischen Biegung erhält man dem Abstand y von der Ebene N—N proportionale Spannungen. Bezeichnet man mit $\sigma_{\max}$ die elastische Spannung in der Randfaser, so gilt also

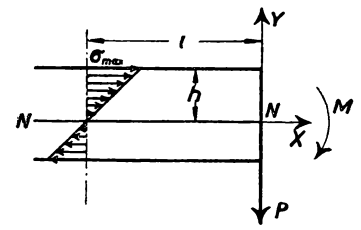


Abb. 172 Biegung eines Stabes

$$\sigma = \sigma_{\max} \cdot \frac{y}{h}, \tag{11/9}$$

wenn h der Abstand der neutralen Faser von der Balkenoberkante ist. Die Maximalspannung ergibt sich aus dem Gleichgewicht des Momentes $P \cdot l$ und der über den

Balkenquerschnitt summierten Momente der Spannungen. Mit Gleichung (11/9) erhält man

$$M = P \cdot l = \int y \sigma \, d f = \frac{\sigma_{\max}}{h} \int y^2 \, d f . \qquad (11/10)$$

Das Integral $\int y^2 \, d f$ nennt man das (äquatoriale) Trägheitsmoment des Balkenquerschnittes, das gewöhnlich mit I bezeichnet wird. Daraus bekommt man für die maximale Zugspannung die Beziehung

$$\sigma_{\max} = \frac{h}{I} M . \qquad (11/11)$$

Den Abstand h der neutralen Schicht von der Balkenoberkante gewinnt man aus der Überlegung, daß bei der reinen Biegebeanspruchung, also $P \parallel Y$-Achse, $\int \sigma \, d f = 0$ sein muß, woraus wegen Gleichung (11/9) folgt

$$\int y \, d f = 0 .$$

Dieser Ausdruck stellt die Definition der Linie durch den Schwerpunkt dar, die zur Richtung von P senkrecht steht. Die neutrale Schicht N—N verbindet also die Schwerlinien der Balkenquerschnitte.

Andererseits liefert der Zusammenhang zwischen elastischer Dehnung, Elastizitätsmodul und Krümmungsradius ϱ des gebogenen Balkens bei schwacher Ausbiegung die leicht abzuleitende Beziehung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E \cdot I} = \frac{d^2 y}{d x^2} . \qquad (11/12)$$

Durch Einsetzen des mit x proportionalen Biegemomentes und Integration über die Balkenlänge l bei Beachtung der Randbedingungen für $x = l$ erhält man die Gleichung der elastischen Linie

$$y = \frac{P}{E I} \left(\frac{x^3}{6} - l \frac{x^2}{2} + \frac{l^3}{3} \right) . \qquad (11/13)$$

Für die Messung des gesuchten Elastizitätsmoduls E bestimmt man am besten den sog. Biegungspfeil, d. h. die Auslenkung für den Angriffspunkt der Kraft P an der Stelle $y = l$. Man bekommt aus

$$y_0 = \frac{P}{3 E I} l^3 \qquad (11/14)$$

die gesuchte Größe

$$E = \frac{P}{3 y_0 I} l^3 .$$

Hierbei ist das gleichmäßig über die Balkenlänge verteilte Eigengewicht des Balkens unberücksichtigt geblieben. Die Werte für das Trägheitsmoment verschiedener Querschnitte sind technischen Nachschlagewerken zu entnehmen. Es beträgt für

rechteckigen Querschnitt $\frac{a^3 b}{12}$ (a = Höhe, b = Breite des Balkens),

Kreisquerschnitt $\pi \frac{r^4}{4}$ (r = Radius),

elliptischen Querschnitt $\pi \frac{a^3 b}{4}$ (a und b = Halbachsen in Höhe und Breite).

Weit genauer als die Höhe des Biegungspfeiles, der gewöhnlich mit dem Kathetometer gemessen wird, ist mittels aufgekitteter Spiegel die Neigung α des belasteten Balkenendes zu messen, für die man durch Differenzieren der Gleichung (11/13) bekommt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P \cdot l^2}{2 E I}. \tag{11/15}$$

Aus den Gleichungen (11/14) und (11/15) ist sofort ein weiterer wichtiger Belastungsfall, der des in der Mitte belasteten, auf zwei Stützen lose lagernden Balkens abzuleiten. Da der Mittelquerschnitt der Einspannstelle im vorigen Beispiel entspricht, die Balkenlänge $l/2$ und die Last $P/2$ geworden sind, bekommt man analog

$$y_0 = \frac{P}{48 E I} l^3 \tag{11/16}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{16 E I} l^2. \tag{11/17}$$

Für genauere Messungen müssen den hier gebrachten Formeln Korrekturglieder hinzugefügt werden, die über die elementare Theorie hinausgehend die exakte Biegungstheorie nach SAINT-VENANT fordert, worin die endliche Stabdicke berücksichtigt wird.

Für die Messung des Elastizitätsmoduls eignen sich die beiden angeführten Belastungsfälle gleich gut und liefern bei sorgfältiger Bestimmung der geometrischen Größen gute Ergebnisse. Im Falle des an den Enden gestützten Balkens kann man die beiden Spiegel mit den spiegelnden Flächen gegeneinander anbringen, wodurch man die doppelte Ablenkung erhält. Für kurze Stäbe hat VOIGT (*359*) ein genaues Verfahren angegeben. Es sei noch erwähnt, daß der Wert von E aus Biegungsmessungen von dem durch Dehnungsversuche gewonnenen etwas abweichen kann, da im ersten Fall vor allem die Randfasern beansprucht werden und diese durch Bearbeiten oder aus Gründen der Oberflächenstruktur andere Festigkeitseigenschaften besitzen können.

Auch aus der Durchbiegung einer am Rande eingespannten dünnen Platte läßt sich der Elastizitätsmodul mit großer Genauigkeit bestimmen. Eine kreisförmige dünne Platte vom Radius r und der Dicke d wölbt sich bei gleichmäßiger Belastung durch den Flüssigkeitsdruck p in der Plattenmitte um y_0 cm durch (*259*).

Es ist

$$y_0 = \frac{3}{16} \cdot \frac{p r^4 (1 - \mu^2)}{E d^3}, \tag{11/18}$$

worin μ wieder die POISSONsche Konstante ist. Eine sehr genaue Meßmethode mittels Newtonscher Interferenzringe zwischen der belasteten Platte und einer Linse wurde von VOIGT (*361*) angegeben.

Über die Ermittlung der POISSON-Konstanten aus der interferometrischen Messung der Oberflächengestalt einer gebogenen Platte siehe § 11,44.

11,32 *Dynamische Verfahren* (*Biegungsschwingungen*) (*176*)

Bezeichnet man mit ϱ die Dichte des Stabmaterials und mit F den Querschnitt des schwingenden Stabes, so lautet die Differentialgleichung bei Vernachlässigung der Rotationsanteile der kinetischen Energie der Stabelemente:

$$\varrho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \tag{11/19}$$

wobei die X-Achse in Richtung der Stabachse und y senkrecht dazu verläuft. Die sekundliche Schwingungszahl ν_i hängt außer von den vorgegebenen Konstanten noch von der Ordnungszahl i der Schwingung und von den Randbedingungen (Einspannung) ab. ν_i errechnet sich hierbei aus

$$\nu_i = \frac{m_i^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{E I}{\varrho F}}, \tag{11/20}$$

wobei sich der Parameter m aus der sog. Periodengleichung

$$\cos m \operatorname{Cof} m = +1 \text{ (beide Stabenden frei)}$$
$$= -1 \text{ (ein Stabende eingespannt)}$$

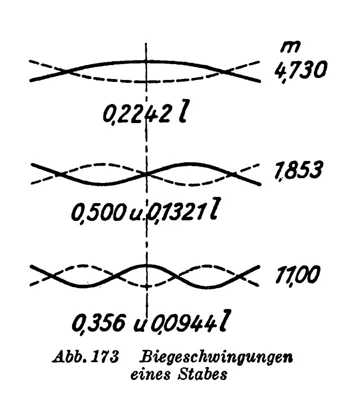


Abb. 173 Biegeschwingungen eines Stabes

bestimmen läßt. In Abb. 173 sind für einige Schwingungsformen die Werte von m und die dazugehörigen Abstände der Schwingungsknoten angegeben. Allerdings gilt Gleichung (11/20) nur für relativ dünne Stäbe im Vergleich zur Stablänge. Bei dicken Stäben ist der rotatorische Anteil der kinetischen Energie der Stabelemente sowie die mit der Biegung verbundene Scherung nicht mehr zu vernachlässigen (TIMOSCHENKO-Korrektion) (*133*).

Bringt man am freien Stabende eines einseitig eingespannten Stabes die Masse M an, die groß ist im Vergleich zur Stabmasse, so erhält man die Schwingungszahl aus

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 E I}{l^3 M}}. \tag{11/21}$$

Kreisförmige Platten können Schwingungsformen annehmen, bei denen sowohl Durchmesser und konzentrische Kreise als auch beide zusammen als Knotenlinien auftreten (siehe Abb. 229). Die Eigenfrequenzen berechnen sich aus

$$\nu_{m,n} = \frac{d}{\pi r^2} \beta_{m,n} \sqrt{\frac{E}{3 \varrho (1 - \mu^2)}}, \tag{11/22}$$

wobei wieder d und r Dicke und Radius der Platte bedeuten und β von der Zahl der Knotendurchmesser m und der Knotenkreise n abhängt. Für den Fall der Kreisplatte mit fest eingespanntem Rand sind in Tabelle XI für einige Werte von m und n die dazugehörigen β-Werte angegeben.

n	m		
	0	1	2
0	3,20	4,61	5,91
1	6,31	7,80	9,20
2	9,44	10,96	12,40

Tabelle XI

Die angeführten Gleichungen (11/20), (11/21) und (11/22) erlauben, den Elastizitätsmodul bei bekannter POISSON-Zahl experimentell aus den Eigenschwingungszahlen des frei schwingenden Stabes bzw. der Platte zu bestimmen. Bezüglich der genauen Messung der im Hörbaren liegenden Frequenzen sei auf den II. Teil (Akustik) dieses Bandes verwiesen. Um die einzelnen Schwingungsformen hervorzurufen, spannt man den Schwinger fest ein und schlägt mit einem weichen Hammer das Stabende an. Die beiderseits frei schwingenden Stäbe werden an den zu erwartenden Knotenstellen an dünnen Fadenschlingen aufgehängt oder auf Gummifäden gelegt. Die Knotenlinien lassen sich durch aufgestreuten Bärlappsamen sichtbar machen, was besonders für Plattenschwingungen unentbehrlich ist.

Für Frequenzen, die außerhalb des Hörbereiches liegen, kann man mittels eines rückgekoppelten Senders die einzelnen Schwingungen anregen, wobei im Falle der Resonanz der Anodenstrom ein ausgeprägtes, spitzes Minimum durchläuft. Die Ankopplung des schwingungsfähigen Systems ist möglichst schwach zu wählen.

11,4 **Torsion** (*Drillung, Scherung*)

11,41 *Grundsätzliches*

Wird der in Abb. 174 gezeigte zylindrische Stab in einem Querschnitt A fest eingespannt, während am anderen Ende das Kräftepaar P wirkt, so wird erfahrungsgemäß der Querschnitt B im Abstand l gegen A verdreht. Eine genauere Durchrechnung des Vorganges ergibt, daß im Falle eines kreisförmigen Stabquerschnittes auch der Endquerschnitt B dabei eben bleibt, für alle anderen Querschnittsformen eine Wölbung beobachtet wird. Bezeichnet man mit φ den Verdrehungswinkel pro Längeneinheit, so wird ein Querschnitt im Abstand x von A sich um

$$\varphi_x = \varphi \cdot x$$

verdrehen. Die Erzeugende $a\ b\ c$ des Zylinders geht in die Schraubenlinie $a\ b'\ c'$ über, und der Winkel γ des Dreieckes $a\ b\ b'$ wird

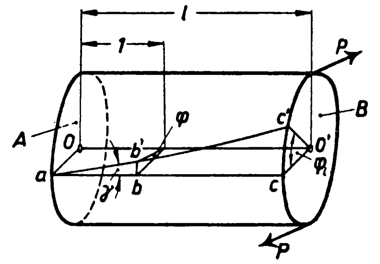


Abb. 174 Torsion eines zylindrischen Stabes

$$\gamma = \varphi\, r_0 = \varphi_l \frac{r_0}{l},$$

wenn r_0 der Zylinderradius und l dessen Länge ist. Durch diese Verdrehung entstehen in allen Punkten des Querschnittes Schubspannungen τ, die tangential gerichtet sind

und dem äußeren Moment das Gleichgewicht halten. Die Erfahrung zeigt und die Theorie bestätigt es, daß das Verhältnis τ/γ eine Materialkonstante ist, die allgemein mit Schubmodul (Torsionsmodul) G bezeichnet wird:

$$\tau = G \cdot \gamma. \qquad (11/23)$$

Der Scherungswinkel γ nimmt proportional mit dem Abstand r von der Zylinderachse ab, so daß man setzen kann:

$$\tau = \frac{r}{r_0} \tau_{\max}, \qquad (11/24)$$

wenn man die Schubspannung an der äußersten Faser mit $\tau_{\max}$ bezeichnet. Andererseits müssen die über den ganzen Querschnitt summierten Schubspannungsmomente dem äußeren Moment M das Gleichgewicht halten, also

$$M = \int_0^{r_0} r\,\tau\,d\,f,$$

woraus mit Gleichung (11/24) folgt

$$M = \frac{\tau_{\max}}{r_0} \int_0^{r_0} r^2\,d\,f.$$

Das Integral ist nun nichts anderes als das „polare Trägheitsmoment" I_p, so daß folgt

$$M = \frac{\tau_{\max}}{r_0} J_p = G \varphi\, J_p. \qquad (11/25)$$

Für die Stablänge l beobachten wir also einen Verdrehungswinkel

$$\varphi_l = \frac{M\,l}{G\,J_p}, \qquad (11/26)$$

der dem Moment M und der Stablänge proportional ist.

11,42 *Statische Torsion*

Das polare Trägheitsmoment I_p für den kreisförmigen Querschnitt beträgt bekanntlich $\frac{\pi r_0^4}{2}$. Für einen beliebigen Querschnitt gilt die Beziehung (11/26) nicht mehr, wie zuerst St. Venant nachgewiesen hat. An Stelle der Größe I_p tritt eine andere, ebenfalls nur von den Abmessungen abhängige Querschnittskenngröße. Für den elliptischen Querschnitt ergibt sich folgende Beziehung für den Torsionsmodul, wenn a und b die Achsen sind,

$$G = \frac{\pi}{16} \frac{l}{\varphi_l} \frac{a^2 + b^2}{a^3\,b^3} M, \qquad (11/27)$$

während für den rechteckigen Querschnitt mit den Seiten a und b gilt

$$G = \frac{M\,l}{\varphi_l\,a\,b^3\,f\,(u)}, \qquad (11/28)$$

wobei für die Funktion des Seitenverhältnisses $u = a/b$ einzusetzen ist

$$f(u) = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \cdot \frac{1}{u} \left[\mathfrak{Tg} \frac{\pi u}{2} + \frac{1}{3} \mathfrak{Tg} \frac{3 \pi u}{2} + \ldots \right].$$

Für sehr schmale Rechtecke (dünnes Band) kann man für $f(u) = 1/3$ setzen und bekommt

$$G = \frac{3 M l}{\varphi_l \, a \, b^3}. \tag{11/28a}$$

Zur Bestimmung des Torsionsmoduls G verwendet man meist kreiszylindrische Stäbe und Drähte, da für diese das Ergebnis am sichersten auszuwerten ist. Bei dicken Stäben muß die Einspannung an den Torsionsköpfen genügend verdrehsteif sein. Ein Ende des Stabes wird in einen starken Rahmen eingespannt, das andere durch ein an einem Hebelarm bekannter Länge befestigtes Gewicht belastet. Der Verdrehwinkel wird am sichersten und genauesten mit Hilfe zweier Spiegel gemessen, die durch Zentrierschrauben im Abstand l voneinander befestigt sind und deren Drehung mit Skala und Fernrohr abgelesen wird.

Im allgemeinsten Fall des Einkristalles (§ 12) tritt die Torsion immer mit einer Biegung zusammen auf. Für manche Kristallorientierungen, wie z. B. beim regulären System, tritt nur reine Torsion auf, wenn die Stabachse parallel zur Achse (100), (110) oder (111) verläuft. Die Biegung bei anderen Kristallsystemen bzw. -orientierungen wird in der Weise festgestellt, daß man die Stabenden kardanisch aufhängt und durch einen Spiegel an den Enden die Biegung beobachtet (*23*, *134*).

11,43 *Dynamische Verfahren* (*Torsionsschwingungen*)

Für dünne Stäbe, Drähte und Bänder ist das statische Verfahren ungenau und experimentell mit Schwierigkeiten verbunden. Bei dem wesentlich einfacheren dynamischen Verfahren befestigt man an dem zu untersuchenden Draht eine kreiszylindrische Scheibe vom Trägheitsmoment $^1/_2 \cdot r_0^2 \cdot m$ (m = Scheibenmasse) und beobachtet die Schwingungsdauer der sich ergebenden Drehschwingung. Für die ganze Schwingungsdauer t gilt dann

$$t = 2 \pi \sqrt{\frac{J}{D}}, \tag{11/29}$$

wenn J das Trägheitsmoment der Scheibe und $D = M/\varphi_l$ die Direktionskraft des Drahtes ist. Berücksichtigt man Gleichung (11/26), so erhält man für den gesuchten Torsionsmodul G den Ausdruck

$$G = \frac{4 \pi^2}{t^2} \frac{J \cdot l}{J_p},$$

wenn J_p das polare Trägheitsmoment des untersuchten Stabes ist.

Die Belastung des Versuchsdrahtes auf Zug durch die angehängte Scheibe stellt nach Guye und Freedericksz eine große Fehlerquelle dar. Sie läßt sich umgehen, wenn man die Scheibe an einem Stahldraht aufhängt und den eigentlichen Versuchsdraht in derselben Achse zwischen der Scheibenunterseite und einer festen Klemme straff einspannt. Indem man einmal mit Draht und dann ohne diesen die Direktionskraft bestimmt, findet man durch Subtrahieren die gesuchte Größe.

Versuche über die Temperaturabhängigkeit des Torsionsmoduls sind von Koch und Dannecker (*205*) veröffentlicht worden, die den Draht in einem kleinen zylindrischen Öfchen ausspannen. Dicke Drähte und Stäbe lassen sich durch ein elektromagnetisches oder piezoelektrisches Antriebssystem zu Resonanzschwingungen anregen, deren Frequenz sehr genau auf elektrischem Wege feststellbar ist.

Schließlich kann man auch wie im Falle der Dehnungsschwingungen Torsionsschwingungen anregen, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit analog zu Gleichung (11/5) sich zu

$$u_t = \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \tag{11/30}$$

berechnet. Klemmt man einen zylindrischen glatten Stab in der Mitte fest ein und reibt tangential an einem Stabende mit einem mit Kolophonium bestrichenen Korkring, so erhält man die Grundschwingung von der Wellenlänge $2\,l$ (l = Stablänge), deren Frequenz

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \cdot \frac{1}{2\,l} \tag{11/31}$$

beträgt. Auch der piezoelektrische Quarz ist bei geeigneter Schnittrichtung zur optischen Achse zu Torsionsschwingungen anzuregen, wie zuerst Giebe und Scheibe (*125*) nachgewiesen haben.

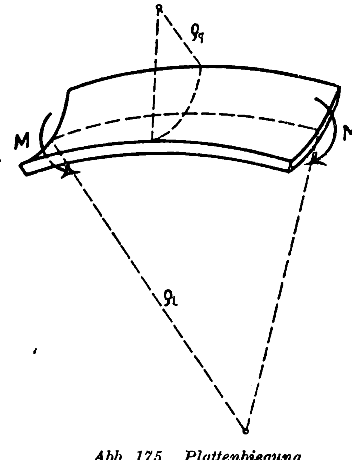


Abb. 175 Plattenbiegung

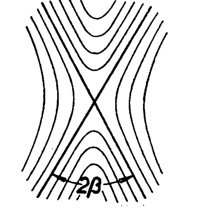


Abb. 176 Interferenzmessung der POISSON-Konstanten

11,44 *Poisson-Konstante* (*224*)

Wie bereits im § 11,21 angeführt wurde, stellt das Verhältnis von Quer- zu Längsdehnung beim Dehnungsversuch eine wichtige Stoffkonstante, die Poisson-Konstante μ, dar. Bei der Biegung von rechteckigen Platten in der in Abb. 175 angegebenen Weise durch ein Momentepaar M-M verursachen die oberhalb der neutralen Schicht entstehenden Zugspannungen gleichzeitig eine Verkürzung in der Querrichtung und umgekehrt. Es ergibt sich eine sattelförmige Oberfläche, deren Krümmungsradien in den beiden ausgezeichneten Richtungen sich wie $\varrho_q/\varrho_l = \mu$ verhalten. Beobachtet man nach Jessop zwischen der gebogenen Platte und einer darüber gelegten ebenen Glasplatte die Interferenzen im monochromatischen Licht, so bekommt man zwei Scharen von Hyperbeln, deren gemeinsame Asymptoten den Winkel 2β einschließen (Abb. 176). Aus der elementar abzuleitenden Beziehung $\mu = \operatorname{tg}^2 \beta$ läßt sich mit guter Genauigkeit der Wert der Poisson-Konstanten bestimmen.

Neben dieser direkten Meßmethode ist es möglich, die Poisson-Konstante aus den Moduln der Dehnung und Torsion zu bestimmen. Nach der mathemati-

schen Elastizitätstheorie besteht nämlich zwischen den genannten Größen die Beziehung

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1. \tag{11/32}$$

Vergleicht man diese Beziehung mit den in der nachfolgenden Tabelle XII für einige Metalle zusammengestellten Zahlenwerten, so stellt man in einzelnen Fällen stark abweichende Werte gegenüber den Meßergebnissen fest. Dieser Umstand hängt damit zusammen, daß die Elastizitätstheorie entweder vollkommen homogenes Material oder einen Einkristall zugrunde legt und beide Idealfälle nur unvollkommen verwirklicht werden können.

Material	E (10^{-5} kg/cm²)	G (10^{-5} kg/cm²)	$\mu_{gem.}$	$\mu_{ber.}$
Aluminium	6,3— 7,5	2,3—2,7	0,33	0,38
Blei	1,5— 1,7	0,55	0,40	0,45
Stahl	22,0	8,50	0,30	0,30
Gold	7,0— 9,5	2,6—3,9	0,42	0,30
Kupfer	10 —13	3,9—4,8	0,34	0,32
Platin	10 —17,5	6,0—7,0	0,38	0,33
Zink	8,0—13	4,0	0,25	0,25

Tabelle XII

11,45 *Dünne Drähte (225)*

Für die Aufhängung von empfindlichen Anzeigesystemen, wie Galvanometer, Radiometer, Quadranten- oder Binantenelektrometer, Drehwaagen, sind feine Drähte, sog. Haardrähte von 0,20 bis 0,001 mm Durchmesser, oder dünne Metallbänder in Gebrauch. Bis herunter zu 15 μ (1 μ = 0,001 mm) lassen sich die Drähte aus den meisten Metallen durch Ziehen herstellen. Bedeutend dünnere Drähte bis zu 0,5 μ Dicke gewinnt man nach WOLLASTON aus Platin, Gold und Aluminium, wenn man dünne Drähte aus diesen Metallen elektrolytisch mit einem Silbermantel versieht, den dickeren Draht durch Ziehen sehr stark verjüngt und dann das Silber in Salpetersäure auflöst. Auch Platinbänder bis zu 1 μ Dicke lassen sich auf diese Weise herstellen.

Für empfindliche Drehsysteme, bei denen also die Direktionskraft des Aufhängefadens bzw. -bandes möglichst gering sein soll, eignen sich schmale Bänder besser als zylindrische Drähte. Nach Gleichung (11/28a) ist der Drehwinkel eines schmalen Bandes $\varphi_b \sim \frac{3}{a\,b^3}$, der eines runden Drahtes $\varphi_d \sim \frac{2}{\pi\,r^4}$. Da die Wahl der Abmessungen des Aufhängefadens in erster Linie von dessen Tragkraft abhängt, sollen nur gleiche Querschnitte verglichen werden. Die sich hierbei ergebenden Drehwinkel verhalten sich wie

$$\frac{\varphi_b}{\varphi_d} = \frac{3\,a}{\pi\,b},$$

wenn mit a die Bandbreite und mit b dessen Dicke bezeichnet wird. Bei gleicher Länge und Tragkraft wird die Direktionskraft des Bandes um so geringer, je größer das Seitenverhältnis des Bandes a/b gemacht wird (bis zu 1000 möglich). Für sehr empfind-

liche Galvanometer, deren Meßsystem an einem dünnen Quarzfaden aufgehängt ist, verwendet man derartige Bänder als Stromzuführungen, da sie fast keine Rückstellkraft ausüben.

Fäden von außerordentlicher Feinheit, geringer elastischer Nachwirkung und relativ großer Zerreißfestigkeit liefert der geschmolzene Quarz (*193*). Die auf verschiedene Weise herzustellenden Fäden besitzen Durchmesser von 100 bis zu 0,5 μ. Physikalisch außerordentlich interessant ist die von REINKOBER und SCHÜRKOW (*289*, *313*) gemachte Feststellung, daß die Zerreißfestigkeit dünner Quarzfäden mit abnehmender Dicke sehr stark zunimmt, wie aus nebenstehender Tabelle XIII zu entnehmen ist.

Durchmesser μ	Bruchlast g	Zerreißfestigkeit kg/mm²
1	0,6	800
2	1,6	510
3	2,7	410
5	4,3	210
7	6,4	175
10	10	130
20	30	100
30	48	68
50	94	45
90	200	32

Tabelle XIII

11,5 Federn

Durch Ausnutzung der in den §§ 11,2—11,4 behandelten elastischen Verformungen lassen sich zwei physikalisch wichtige Aufgaben lösen: 1. Erzeugung einer genau einstellbaren elastischen Kraft, z. B. durch Vorspannen einer Feder, und 2. Aufnahme oder Abgabe mechanischer Arbeit, die aus der potentiellen, elastischen Energie des deformierten Körpers gewonnen wird. Vorrichtungen dieser Art werden allgemein *Federn* genannt.

11,51 *Blattfeder*

Unter Blattfeder versteht man gewöhnlich einen auf Biegung beanspruchten meist dünnen, elastischen Träger, bei dessen Belastung nur Zug- und Druckspannungen auftreten. Aus Gleichung (11/14) ergab sich die maximale Durchbiegung für eine einseitig eingespannte Feder gleichbleibender Breite zu

$$y_0 = \frac{P}{3\,E\,I}\,l^3, \tag{11/14}$$

wenn die Einzellast P am freien Federende angreift. Als Federungszahl C' bezeichnet man die Durchbiegung pro Krafteinheit, also

$$C' = y_0/P = \frac{l^3}{3\,E\,I}. \tag{11/33}$$

Die maximal erzeugbare Durchbiegung hängt nun von der maximalen Zug- bzw. Druckspannung σ_{max} ab, die eine Materialkonstante ist, denn nach § 11,31 tritt zuerst in den Randfasern die größte Beanspruchung auf. Setzt man Gleichung (11/11) in Gleichung (11/14) ein, so erhält man mit $I = h^3 b/12$ die maximale Durchbiegung zu

$$y_{0\,max} = \frac{2}{3} \frac{l^2}{h} \frac{\sigma_{max}}{E} \qquad (11/34)$$

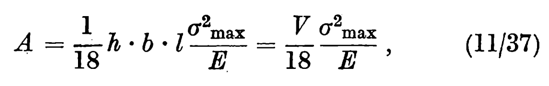
für eine einseitig eingespannte Feder von der Dicke h und der Breite b. Durch Vergleich mit Gleichung (11/14) bekommt man die maximal von der Feder ausübbare Kraft P_{max}, die der zulässigen Zugspannung verhältnisgleich ist, zu

$$P_{max} = \frac{b\,h^2}{6\,l} \sigma_{max}. \qquad (11/35)$$

Innerhalb des elastischen Bereiches ist das HOOKEsche Gesetz streng gültig und der Zusammenhang von Federkraft P und Durchbiegung y_0 linear, wie in der Abb. 177 dargestellt ist. Die schraffierte Fläche stellt die potentielle, elastische Energie $A = \int P\,d\,y$ dar, die im Höchstfalle von der Feder aufgenommen werden kann. Mit Gleichung (11/14) wird dann

$$A = \frac{3\,E\,I}{l^3} \int_0^{y_{0\,max}} y_0\,d\,y = \frac{3}{2} \frac{E\,I}{l^3} y_{0\,max}^2. \qquad (11/36)$$

Setzt man in diese Beziehung die Gleichung (11/34) ein, so erhält man schließlich



$$A = \frac{1}{18} h \cdot b \cdot l \frac{\sigma^2_{max}}{E} = \frac{V}{18} \frac{\sigma^2_{max}}{E}, \qquad (11/37)$$

Abb. 177 Energie einer gespannten Feder

da das Produkt $h \cdot b \cdot l$ das Federvolumen V darstellt. Die maximal von einer Blattfeder aufnehmbare Arbeit beträgt also nur ein Neuntel der Arbeit, die von einer Stabfeder gleichen Volumens bei reiner Zug- oder Druckbeanspruchung aufgenommen werden kann und für die gilt

$$A = \frac{\sigma^2_{max}}{2\,E} V.$$

Eine wesentlich bessere Ausnutzung des Federvolumens ist mit einer Dreiecksfeder möglich, deren Breite proportional mit $l - x$ zunimmt. In diesem Fall wird

$$A = \frac{\sigma^2_{max}}{6\,E} V.$$

11,52 *Spiralfeder*

Für eine Reihe physikalischer Instrumente, wie Torsionswaage (S. 68), elektrische Strommeßgeräte, werden ebene Biegefedern verwendet, die in meist archimedischen Spiralen mit gleichem Abstand zwischen den einzelnen Windungen gewickelt sind (Abb. 178). Damit in allen Querschnitten dasselbe Biegemoment wirkt, muß auch das äußere Federende fest eingespannt sein und die Feder durch ein Kräftepaar beansprucht werden.

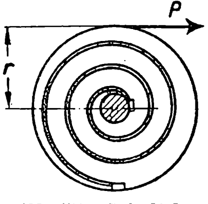


Abb. 178 Spiralfeder

Wirkt ein äußeres Moment von der Größe M und bedeuten b und h Breite und Dicke der rechteckigen Feder, so gilt für dünne Federn für das maximale Biegemoment

$$M_{\max} = \frac{b\,h^2}{6}\,\sigma_{\max}\,, \tag{11/35}$$

wobei die maximale Spannung natürlich am inneren Federende auftritt. Beträgt die abgewickelte Länge der Feder l, so erhält man für das Moment M die Winkeländerung

$$\alpha = \frac{12\,l}{E\,b\,h^3}\,M\,. \tag{11/38}$$

Aus dieser Beziehung ist zu entnehmen, daß das Einhalten der Dicke h von besonderer Bedeutung für die Konstruktion einer Feder vorgegebener Direktionskraft ist.

In etwas anderer Form wird die Spiralfeder dazu verwendet, ein Drehmoment bekannter Größe zum Antrieb von Uhren (Uhrfeder) oder Registriertrommeln auszuüben. Mit Hilfe der Beziehungen (11/35) und (11/38) läßt sich auch hierfür in erster Näherung die aufzunehmende potentielle Energie berechnen. Die in der aufgewickelten Spiralfeder enthaltene potentielle Energie $A = \int M\,d\,\alpha$ wird mit (11/38)

$$A = \frac{E\,b\,h^3}{12\,l}\int \alpha\,d\,\alpha = \frac{E\,b\,h^3}{24\,l}\,\alpha^2\,. \tag{11/39}$$

Durch Einsetzen von (11/35) in (11/38) erhält man die Beziehung

$$\alpha_{\max} = \frac{2\,l}{E\,h}\,\sigma_{\max}\,, \tag{11/40}$$

und damit in Gleichung (11/39) eingesetzt schließlich die gesuchte Maximalarbeit der gespannten Feder

$$A = \frac{b\,h\,l}{6\,E}\,\sigma^2_{\max} = \frac{V}{6\,E}\,\sigma^2_{\max}\,. \tag{11/41}$$

Es wird also bei der Spiralfeder nur ein Drittel der bei gleichmäßiger Belastung verfügbaren elastischen Energie ausgenutzt. Praktisch läßt sich auch die angegebene Arbeit nicht ganz gewinnen, da die Feder auch im entspannten Zustand wegen des Federgehäuses einen Teil potentieller Energie besitzt.

11,53 *Torsions- und Schraubenfeder*

Ein durch das Moment M senkrecht zur Symmetrieachse verdrehter kreiszylindrischer Drehstab wird bekanntlich durch Schubspannungen beansprucht, deren maximaler Wert an der Randfaser nach Gleichung (11/25)

$$\tau_{\max} = \frac{2}{\pi\,r^3}\,M$$

beträgt. Die damit verbundene Winkeländerung berechnet sich aus Gleichung (11/26) zu

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{G \cdot J_p} = \frac{2\,M \cdot l}{G\,\pi\,r^4}\,,$$

wenn G der Schubmodul und I_p das polare Trägheitsmoment des Stabquerschnittes bedeuten. Aus diesen Beziehungen läßt sich die maximal von einer Torsionsfeder aufnehmbare Energie berechnen, wenn man die Schubspannung in der Randfaser gerade bis zum zulässigen Wert anwachsen läßt. Wir erhalten dafür

$$A = \frac{\pi r^2 l}{4G} \tau^2_{\max} = \frac{V}{4G} \tau^2_{\max}. \tag{11/42}$$

Vergleicht man damit die optimale Schubspannungsenergie $\frac{V}{2G} \tau^2_{\max}$, die mit einem tordierten Rohr zu verwirklichen ist, so erkennt man im Gegensatz zur Biegefeder die gute Materialausnutzung im Falle der Torsionsbeanspruchung.

Bei der *Schraubenfeder* ist der Federdraht längs einer Schraubenlinie auf einem Zylinder aufgewickelt, wobei der Abstand der einzelnen Windungen klein gegen den Windungshalbmesser R sein soll (Abb. 179). Durch eine zentral angreifende Kraft P werden, wie man sich leicht überlegen kann, alle Querschnitte des Federdrahtes auf Torsion beansprucht. Die potentielle Energie der Torsion beträgt bekanntlich bei einer Stablänge l entsprechend Gleichung (11/26)

$$A = \frac{1}{2} M \varphi = \frac{M^2 l}{2 G J_p}. \tag{11/43}$$



Abb. 179
Schraubenfeder

Bezeichnet man mit f die unter dem Einfluß von P sich ergebende Federverlängerung, so folgt durch Gleichsetzen der beiden Energien

$$\frac{1}{2} P \cdot f = \frac{1}{2} \frac{M^2 l}{G \cdot J_p}$$

und mit $M = P \cdot R$

$$f = \frac{R^2 \cdot l}{G \cdot J_p} P. \tag{11/44}$$

Setzt man ferner die Federlänge $l = 2\pi R \cdot n$ (n = Windungszahl) ein, so ergibt sich

$$f = 2\pi \frac{R^3 n}{G J_p} P. \tag{11/44a}$$

Als Federkonstante C bezeichnet man die pro Zentimeter Federungsweg erforderliche Kraft, also

$$C = \frac{P}{f} = \frac{G J_p}{2\pi R^3 n}. \tag{11/45}$$

Bei gleicher Federlänge wird also die Federkonstante mit der dritten Potenz des Windungsradius umgekehrt proportional abnehmen. Fragen wir noch nach der für die Praxis wichtigen maximalen Energieaufnahme, so finden wir für das Beispiel einer Schraubenfeder aus Runddraht $\left(I_p = \frac{\pi}{2} r^4\right)$,

$$A_{\max} = \frac{\pi r^2 l}{4G} \tau^2_{\max} = \frac{V}{4G} \tau^2_{\max}. \tag{11/46}$$

Wie zu erwarten, finden wir den der Gleichung (11/42) entsprechenden Ausdruck.

Ist also für eine vorgegebene Aufgabe eine Feder zu entwerfen, so wird man zunächst nach Gleichung (11/46) unter Berücksichtigung einer mehrfachen Sicherheit das Federvolumen und anschließend aus der vorgegebenen Federkonstanten Windungszahl und -radius berechnen.

11,6 **Festigkeit** (*136*, *147*)

11,61 *Der Begriff der Festigkeit*

Bei der Durchführung von Dehnungsmessungen nach § 11,2, die etwa in Form einer Kraft-Dehnungskurve aufgezeichnet werden sollen, lassen sich deutlich zwei verschiedene Abschnitte unterscheiden. Ausgehend von der unbelasteten Probe erhält man zunächst nach dem HOOKEschen Gesetz eine der Zugkraft proportionale Dehnung ε, wie aus der schematischen Dehnungskurve in Abb. 180 hervorgeht. Bei weiterer Steigerung der Zugspannung bleibt die Proportionalität nicht mehr gewahrt, die Dehnung steigt vielmehr sehr viel stärker bis zum Punkt B, der sog. *Bruchdehnung*, an. Wird der Stab während des Verlaufes OA entlastet, so geht die Dehnung im all-

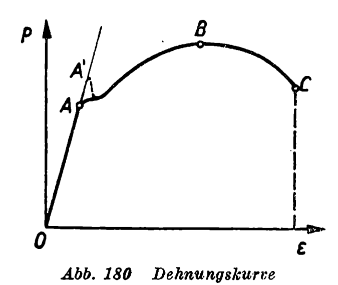


Abb. 180 Dehnungskurve

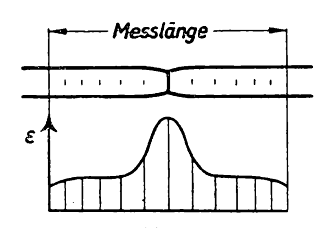


Abb. 181 Bruchdehnung eines Stabes

gemeinen vollkommen zurück, wir haben es also mit einer rein elastischen Deformation zu tun. Für den zweiten Ast des Diagramms trifft das nicht mehr zu; bei Entlastung beobachtet man eine bleibende Formänderung (plastische Deformation). Bei vielen Werkstoffen erhält man über B hinaus noch eine weitere Dehnung $B\,C$, die sogar mit einem Rückgang der Belastung verknüpft ist und im Punkt C zum endgültigen Bruch führt. Der Abfall $B\,C$ der Belastung, der vornehmlich bei zähen Materialien beobachtet wird, ist nur dann vorhanden, wenn man die in der Ordinate aufgetragene Zugspannung auf den ursprünglichen Querschnitt der meist zylindrischen Versuchsprobe bezieht. In diesem Fall schnürt sich der Stab nach Überschreiten der Fließgrenze an einer Stelle ein (siehe Abb. 181), so daß der Bruchquerschnitt bedeutend kleiner als der ursprüngliche ist. Man bezeichnet daher die zum Punkte B gehörige Ordinate als Bruchgrenze. Die zum Punkte A gehörige Zugspannung wird als Streckgrenze bezeichnet. Dementsprechend hat man bei der Festigkeitsuntersuchung zwischen den Begriffen der Zugfestigkeit σ_B und der Bruchdehnung ε_B einerseits, der Streck- oder Fließgrenze σ_S andrerseits zu unterscheiden.

Bezüglich ihres Verhaltens jenseits der Elastizitätsgrenze lassen sich die Stoffe in plastische und spröde einteilen. Bei den plastischen Materialien (Flußeisen, Blei, Kupfer u. a.) erfolgt der Bruch erst nach erheblichen bleibenden Formänderungen, während bei den spröden Stoffen (Gußeisen, Glas, keramische Materialien) der Bruch

innerhalb des Proportionalitätsbereiches zustande kommt. Dasselbe Verhalten offenbart sich auch bei Beanspruchung durch Biegung und Torsion, wofür ähnliche Formänderungskurven erhalten werden. Als Maß der Plastizität wird oft die bis zum Bruch erforderliche Arbeit betrachtet, die der zwischen Dehnungskurve und ε-Achse liegenden Fläche entspricht.

11,62 *Kennzeichnung der Werkstoffe*

Im Gegensatz zu den im § 12 zu besprechenden Einkristallen ist das physikalische Verhalten der vielkristallinen Werkstoffe durch die Korngröße, die sog. Textur, und unter Umständen durch Einlagerungen an den Korngrenzen bestimmt. Unter einem *Korn* ist ein Bereich zu verstehen, der die einheitliche Orientierung eines Einkristalles besitzt und keine merklichen Gitterstörungen aufweist. Die *Textur* ist allgemein ein Maß für die Orientierung, die abgesehen von der Wachstumsvorgeschichte auch von der nachträglichen mechanischen oder thermischen Behandlung abhängig sein kann. Ist die Achsenrichtung der Körner statistisch unregelmäßig verteilt, spricht man von regellosem Aufbau.

Ein Werkstoff mit kleinen Körnern und regelloser Orientierung verhält sich makroskopisch quasi-isotrop, d. h. eine vorhandene Anisotropie der einzelnen Körner tritt durch die räumliche Mittelung nicht mehr in Erscheinung. Je größer die Körner und je geregelter die Textur ist, um so mehr verhält sich das Material wie ein Einkristall (siehe § 12). Der Einfluß der Textur auf die Festigkeitseigenschaften der Werkstoffe ist beachtlich und erfordert deren genaue Kenntnis. Die Feststellung einer Textur ist im Grunde eine Orientierungsbestimmung der einzelnen Körner, die mit Hilfe der im § 12,6 beschriebenen Verfahren durchgeführt werden kann. Am übersichtlichsten und einfachsten wird diese nach dem Verfahren der Röntgeninterferenzen nach DEBYE-SCHERRER (siehe Band III). Die DEBYE-SCHERRER-Aufnahme eines Kristallhaufwerks zeigt bekanntlich eine Anzahl gleichmäßig geschwärzter Interferenzringe, deren Radien vom Gitterabstand und der Kristallklasse abhängen. Besitzt das Material eine Textur, so sind bestimmte Stellen der Ringe stärker geschwärzt, wohingegen andere Stellen zurücktreten. Sollen die gemessenen Festigkeitseigenschaften eines Stoffes physikalisch interpretiert werden, so lassen sich hierzu nur Messungen an Proben ohne Textur heranziehen. Oft genügt schon, wenn man den Probestab oder -draht längere Zeit in einer neutralen Atmosphäre glüht und ihn gleichmäßig abkühlen läßt.

11,63 *Messung der statischen Festigkeit*

Zum Vergleich mit der Festigkeitstheorie eignen sich besonders einfache Beanspruchungsarten, wie Zug und Druck. Als Zugfestigkeit des Materials bezeichnet man die Spannung, die bei Ausführung des Zugversuches der Höchstlast entspricht, also dem Punkt B in Abb. 180. Diese Spannung wird zumeist auf den ursprünglichen Querschnitt bezogen, ist also bedeutend kleiner als die tatsächlich herrschende Spannung, da sich der Bruchquerschnitt merklich einschnürt.

Die Messung der Zug- und Druckfestigkeit wird bei technischen Versuchen an sog. *Zerreißmaschinen* durchgeführt, die aus einem sehr kräftigen Gestell bestehen und eine Vorrichtung besitzen, mit welcher die sehr großen Kräfte ausgeübt werden können. In vielen, meist kleineren Prüfmaschinen besteht der Krafterzeuger aus einer Spindel,

die stetig angetrieben wird; bei großen Zerreißmaschinen wird meist eine hydraulische Presse verwendet. Die Messung der ausgeübten Kraft muß sehr genau erfolgen können. Für technische Prüfungen mit hydraulischer Krafterzeugung eignen sich Federmanometer, die an den Druckzylinder angeschlossen werden. Bei physikalischen Messungen bevorzugt man Druckwaagen mit Laufgewichts- oder Pendelanordnung oder elektrische Zug- bzw. Druckmesser nach § 9. Die Anzeigevorrichtung wird durch Auflegen von Gewichten bei kleinen Maschinen, durch Normaldruckdosen bei großen Prüfmaschinen geeicht.

Der Prüfstab wird beim Zugversuch zwischen zwei Einspannvorrichtungen befestigt, deren Konstruktion von großer Bedeutung für eine stetig zunehmende Belastung ist. Beim Druckversuch wird der zu prüfende Werkstoff zwischen zwei vollkommen ebene, in Kugelpfannen gelagerte Druckplatten gebracht. Da die bei diesen Messungen festgestellte Zerreißfestigkeit außer vom Material und dessen Zustandsgrößen auch von der Formgebung der Probe abhängt, werden in Deutschland Normalrund- und -flachstäbe von genormten Abmessungen (DIN 1602, 1605) verwendet. In Abb. 182 ist ein solcher Normalrundstab wiedergegeben. Bei der Formgebung dieser Stäbe — und das gilt auch für die sehr viel kleineren Abmessungen bei Messungen physikalischer Art — ist besonders zu beachten, daß der Übergang von den Einspannenden zur eigentlichen Versuchsstrecke stetig und ohne scharfe Krümmungen erfolgt. Die Meßlänge l_0 beträgt gewöhnlich 200 mm, für zylindrische Probestäbe beträgt der Anfangsquerschnitt vor der Belastung $f_0 = 314\ \text{mm}^2$. Die Querschnittsabmessungen des Probestabes müssen sehr genau an verschiedenen Stellen der Länge ermittelt werden. Innerhalb der Versuchslänge wird eine Teilung in 20 Abschnitte zu je 10 mm aufgebracht, um die bleibende Dehnung über die Versuchslänge nach dem Bruch messen zu können. Die Teilmarken werden bei weichen Stoffen unter der Teilmaschine eingerissen, bei spröden Stoffen mit Tinte gezogen. Nach dem Bruch werden an den Bruchstücken des Stabes die Abmessungen des kleinsten Einschnürungsquerschnittes und die Verlängerung der einzelnen Teilstrecken ermittelt (Abb. 181). Derartige Messungen ergeben, daß die bleibende Dehnung sich aus zwei Teilen zusammensetzt: 1. aus der sog. *Gleichmaßdehnung*, die sich über die gesamte Stablänge erstreckt, 2. aus der *Einschnürdehnung*, die in unmittelbarer Nähe der Bruchstelle auftritt.

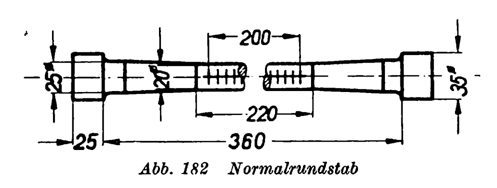


Abb. 182 Normalrundstab

Von besonderer Bedeutung und Auswirkung auf die erhaltenen Versuchswerte ist die Art der Einspannung der Probe. Alle Einspannarten haben den Nachteil, daß die zu übertragenden Kräfte nur auf Teile der Oberfläche wirken, so daß an den Stabenden die Spannungsverteilung über den Querschnitt zunächst sehr ungleichmäßig ist. Erst in einiger Entfernung davon verteilt sich die Zugspannung gleichmäßig über den Meßquerschnitt. Daher ist es wichtig, daß 1. die Probe im Vergleich zum Durchmesser hinreichend lang ist und 2. diese nur in der Stabachse beansprucht wird, was durch Gelenke an den Einspannstellen gewährleistet wird.

Die Meßergebnisse werden in Form von Spannungs-Dehnungskurven aufgezeichnet, woraus sich alle Festigkeitseigenschaften mit Ausnahme der Brucheinschnürung entnehmen lassen. An Hand solcher Messungen gewinnt man bereits einen Überblick über das plastische Verhalten des Werkstoffes. Die Dehnungskurven der fünf verschiedenen Werkstoffklassen der Metalle sind schematisch in der Abb. 183 wieder-

gegeben. Den ersten drei ist das Fehlen einer ausgeprägten Streckgrenze gemeinsam, d. h. die elastische und plastische Verformung gehen stetig ineinander über. Man legt in diesen Fällen die Streckgrenze nach Übereinkunft als die Spannung bei 0,2% bleibender Dehnung fest. Die Zugfestigkeit σ_B wird im Teilbild a bereits nach geringen bleibenden Dehnungen erreicht; man spricht von spröden Körpern, wie *Gußeisen, gehärtete Stähle, Glas.* Im Teilbild b wird σ_B nach größeren, gut meßbaren plastischen Verformungen erreicht (*Gußmessing, Bronze*). In Teilbild c, das man für *Aluminium, Kupfer, Weichblei, hochlegierte Stähle* erhält, fällt die Spannung nach Erreichen eines Maximums wieder ab, wobei nun erst die Einschnürung an der späteren Bruchstelle erfolgt. Bezieht man die Spannung auf den tatsächlichen Querschnitt, so nimmt auch in diesem Teil die wahre Zugspannung bis zum Bruch zu. Das eigenartige Verhalten des im Teilbild d festgehaltenen *Zinks* und anderer kalt stark verformbarer Metalle wird dadurch gekennzeichnet, daß das Maximum der Last schon bald erreicht wird. Durch die den hexagonalen Metallen eigentümliche Spannungsverfestigung durch Gleiten der Gitterebenen sind große Dehnungen bei fortschreitender Einschnürung festzustellen. Bei *weichen, unlegierten Stählen* beobachtet man das im Teilbild e festgehaltene Betragen. Es läßt sich eine obere und untere Streckgrenze σ_S^0 und σ_S^u angeben, deren Größe und Unterschied stark von der Dehnungsgeschwindigkeit abhängen. In Tabelle XIV sind einige Festigkeitseigenschaften für verschiedene Metalle zusammengestellt.

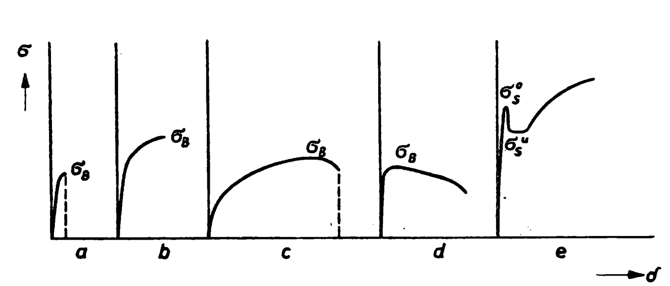


Abb. 183 Dehnungskurven der fünf Werkstoffklassen

Gittertypus	kubischflächenzentriert				kubisch-raumzentriert	Hexagonal		Einheiten
Metall	Cu	Al	Ag	Ni	Fe	Mg	Zn	
Streckgrenze σ_S	7	3	4,5	14,5	12	2,1	4	kg/mm²
Elastizitätsmodul E	12,5	6,6	7	20	22	4,5	10	· 10³ kg/mm²
E/σ_S	1,8	2,2	1,5	1,4	1,8	2,2	2,5	· 10³
Zugfestigkeit σ_B	22,5	9	14	46	22	11,5	3,5	kg/mm²
Endspannung σ_E	22	9,5	12,7	39	—	—	—	kg/mm²
Bruchdehnung δ_B	44	37	50	40	45	6	27	%

Tabelle XIV

Der beim Zerreißvorgang auftretende Fließprozeß, bei dem die innere Reibung des Werkstoffes überwunden werden muß, hat zur Folge, daß bei den Messungen auch die Dehngeschwindigkeit beachtet werden muß. Im allgemeinen nimmt der Formänderungswiderstand der Metalle mit der Streckgeschwindigkeit erst rasch, dann langsamer zu. Dieser Einfluß zeigt sich besonders deutlich bei einzelnen Metallen mit

niedrigem Schmelzpunkt, wie z. B. Pb, Sn, Zn, Mg. Bei Eisen und Stahl ist bei Zimmertemperatur dieser Einfluß gering.

Es ist zu erwarten, daß sich beim Erreichen der Streckgrenze und Einsetzen der plastischen Verformung einige physikalische Eigenschaften der Probe mehr oder weniger sprunghaft ändern. So ist vorgeschlagen worden, bei magnetischen Werkstoffen die Änderung der Permeabilität zusammen mit der Dehnungskurve zu beobachten. Aus den Wendepunkten der erhaltenen Kurven sollen Elastizitätsgrenze und Streckgrenze ersichtlich sein. Nach TAMANN (*343*) läßt sich die untere Elastizitätsgrenze aus dem Auftreten der ersten Gleitlinien in den einzelnen Gefügekörnern bestimmen, wenn man die polierten Seitenflächen der Probe unter dem Mikroskop beobachtet. Bei durchsichtigen ebenen Proben müßten unter dem Polarisationsmikroskop ähnliche Beobachtungen möglich sein. Auch die Änderung der elektrischen Leitfähigkeit des Probestabes ist schon zur Bestimmung der Streckgrenze herangezogen worden.

11,64 *Messungen der Festigkeit bei verschiedenen Temperaturen*

Da die Festigkeitseigenschaften eines Stoffes hauptsächlich durch den Widerstand der einzelnen Gitterebenen gegen Gleiten gegeben sind und dieser stark von der Temperatur abhängt, ist die Messung der Festigkeitswerte bei verschiedenen Temperaturen physikalisch von großem Interesse.

Zum Erwärmen der Versuchsprobe werden wie bei den im § 11,23 beschriebenen Dehnungsmessungen elektrisch beheizte Flüssigkeits- oder Luftbäder benutzt. Der Einbau des Dehnungsmessers darf die gleichmäßige Temperaturverteilung an der Probe nicht verändern; Meßfehler durch verschiedene Ausdehnungskoeffizienten müssen berücksichtigt werden. Die Temperatur am Versuchsstab soll an verschiedenen Stellen gemessen werden, wobei man sich am besten feiner Thermoelemente bedient. Die Belastungsgeschwindigkeit soll konstant und nicht zu groß sein, da sich die Dehnung in der Nähe der Streckgrenze nur langsam einstellt. Das gilt vor allem für höhere Temperaturen. In Abb. 184 sind für die Metalle Eisen, Aluminium und Kupfer Zugfestigkeit und Bruchdehnung in einem größeren Temperaturbereich aufgetragen. Daraus ist zu ersehen, daß die Festigkeit mit abnehmender Temperatur bedeutend zunimmt, während die Bruchdehnung, wie zu erwarten, stark abnimmt. Die Werkstoffe werden also zunehmend spröder, d. h. Gleitvorgänge an den Gitterebenen werden mit abnehmender Temperatur seltener. Da die Streckgrenze und Zugfestigkeit bei höheren Temperaturen sehr stark von der Versuchsdauer abhängen, lassen sich vergleichbare Versuchsergebnisse nur unter völlig gleichen Meßbedingungen erzielen. In vielen Fällen verschwindet bei Steigerung der Temperatur der scharf aus-

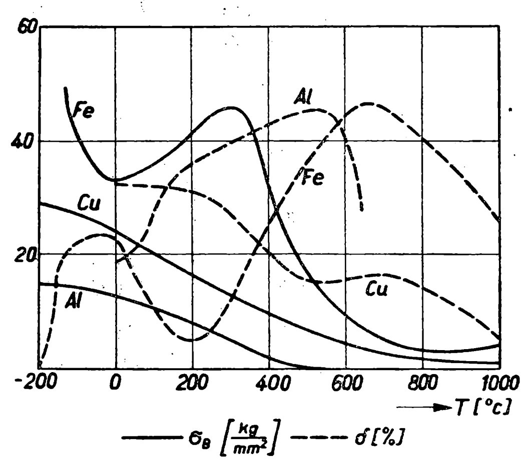


Abb. 184 Zerreißfestigkeit bei verschiedenen Temperaturen

geprägte Knick der Streckgrenze in der Spannungs-Dehnungs-Kurve (Abb. 183e), was für Stahl bei etwa 250° C der Fall ist. Nach allgemeiner Übereinkunft bezeichnet man in diesen Fällen als Streckgrenze die Spannung, bei der die bleibende Verlängerung nach Entlastung der Probe 0,2% der ursprünglichen Meßlänge beträgt.

11,65 *Messungen der dynamischen Festigkeit (97)*

Die dynamische Zugfestigkeit läßt sich durch *Schlagzerreißversuche* bestimmen, bei denen der Versuchsprobe zur Formänderung nur eine sehr kurze Zeit zur Verfügung steht. Derartige Messungen sind physikalisch von Interesse, da auf diese Weise bequem die zur Abtrennung erforderliche Arbeit gemessen werden kann. Solche Versuche werden in Fallwerken oder Pendelschlagwerken durchgeführt, wobei das Gewicht einer frei fallenden Masse bzw. eines um eine Achse schwingenden Körpers die Energie für die Abtrennung liefert. Beim Pendelschlagwerk läßt sich die abgegebene Energie bequem aus Ausgangs- und Endstellung des Pendels, die mit Schleppzeigern abgelesen werden, bestimmen. Durch Aufnahme der Wegzeitkurve beim Schlagvorgang läßt sich die größte auftretende Stoßkraft ermitteln. Der in der Technologie weitverbreitete Kerbschlagversuch, der die sog. Schlagbiegearbeit zu messen gestattet, ist für die Anwendung physikalischer Überlegungen zu verwickelt.

11,66 *Ermüdungsversuche (160, 350)*

Wie bereits in § 11,64 hingewiesen wurde, hängen Streckgrenze und Festigkeit bei höheren Temperaturen sehr stark von der Belastungsdauer ab. Für Werkstoffe, die lange Zeit einer bestimmten Belastung ausgesetzt sind, stellt die im kurzzeitigen Zugversuch gewonnene Streckgrenze im allgemeinen nicht die obere Grenze der zulässigen Spannung dar, da ein stetiges Weiterfließen des Werkstoffes stattfinden kann, das schließlich zum Bruch führt (*221*). Ein ähnliches Verhalten zeigt sich, wenn die Belastung sich periodisch ändert. Die für derartige Belastungsfälle ermittelten Stoffwerte nennt man die *Dauerfestigkeit* des betreffenden Werkstoffes, wobei man drei verschiedene Arten unterscheiden kann. Die *Dauerstandfestigkeit* wird mit einer zeitlich konstanten Belastung nach einer nach Tagen dauernden Messung festgestellt. Bei der Ermittlung der *Wechselfestigkeit* unterscheidet man die pulsierende Belastung, bei der die Beanspruchung ihren Richtungssinn beibehält, ihre Größe sich jedoch zwischen einer oberen Grenze σ_0 und einer unteren Grenze σ_u periodisch ändert. Wechselt die Beanspruchung auch ihren Richtungssinn, indem sie von σ_0 durch Null hindurch auf einen Wert $-\sigma_u$ übergeht, so spricht man von Wechselbelastung. In der Abb. 185 ist der zeitliche Verlauf der drei Belastungsarten dargestellt.

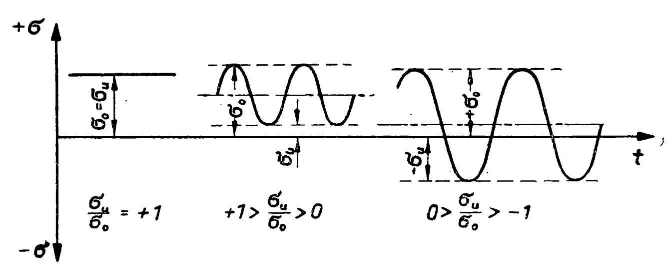


Abb. 185. Belastungsarten bei Ermüdungsversuchen.

Während beim gewöhnlichen Zugversuch die Versuchsprobe nur zu Bruch geht, wenn die statische Zugfestigkeit überschritten bzw. erreicht wird, kann der Bruch bei lang dauernder oder wechselnder Beanspruchung auch dann eintreten, wenn die Spannung weit unterhalb von σ_B, ja selbst unterhalb der Proportionalitätsgrenze liegt. Kennzeichnend für einen solchen Bruch ist das Fehlen makroskopischer Formänderungen an der Bruchstelle.

11,67 *Ermüdungsversuche bei ruhender Belastung (187, 221, 368)*

Derartige Versuche, die meistens für den Fall der Zugbeanspruchung durchgeführt werden, lassen sich bequem an dünnen Drähten ausführen, deren Dehnung in Abhängigkeit von der Zeit beobachtet und aufgezeichnet wird. Dabei kann man zwei Gruppen von Stoffen unterscheiden, deren Hauptvertreter Eisen und Zinn sind. Bei der ersten Gruppe, zu der auch Messing, Bronze, Quarzglas gehören, vergrößert sich, wie in Abb. 186 angedeutet, die statische Dehnung nach einiger Zeit bis zu einem Endwert, der auch bei einer sehr langen Belastungsdauer nicht überschritten wird. Die Stoffe der Zinngruppe, wozu Kupfer, Aluminium, Zink, Blei und Glas zu rechnen sind, ergeben eine zeitlich zunehmende Dehnung, die schließlich zum Bruch führt, wie das zweite Beispiel in Abb. 186 zeigt. Dieses unterschiedliche Verhalten der Stoffe ist durch die Größe der Rekristallisationsgeschwindigkeit bedingt. Die oben benutzte Einteilung verschiebt sich bei höheren Temperaturen in dem Sinne, daß die Neigung zum Bruch größer wird. Man kann annehmen, daß bei einer für jeden Stoff *charakteristischen* Temperatur der Ermüdungsbruch eintritt.

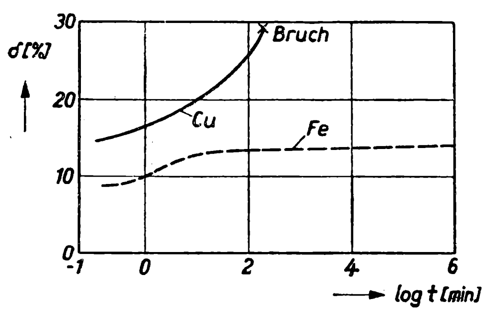


Abb. 186 Dehnungskurven bei ruhender Belastung

11,68 *Dauerversuche mit wechselnder Beanspruchung*

Für die Ermittlung der in der Technik von außerordentlicher Bedeutung gewordenen Dauerfestigkeit metallischer Werkstoffe ist eine sehr große Anzahl von Meß- und Untersuchungsgeräten entwickelt worden. Für physikalische Untersuchungen eignet sich die übersichtliche Anordnung nach Abb. 187 recht gut. Die zu untersuchende Probe in Form eines zylindrischen Stabes S wird mit Hilfe eines schlanken Konus in eine drehbar gelagerte Welle W eingesetzt, die mit konstanter Drehzahl umläuft. Das freie Ende des Probestabes wird durch eine Last P beansprucht, die am Außenring des auf dem Stabende befestigten Kugellagers L angreift. Infolge der Drehung der Probe wechselt in jeder ihrer Längsfasern die Beanspruchung periodisch zwischen einer Zugspannung $+\sigma$ und der gleich großen Druckspannung $-\sigma$, wenn man die gleichzeitig auftretenden Schubspannungen außer acht läßt. Ist l die Länge des Stabes bis zum Übergang in den Konus, so beträgt

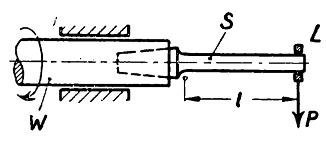


Abb. 187 Dauerbiegeanordnung

die maximale Spannung in der äußersten Faser für $h = r$ (r = Stabhalbmesser) nach Gleichung (11/11)

$$\sigma_{\max} = \frac{r}{I} M$$

und mit $M = P \cdot l$ und $I = \pi \frac{r^4}{4}$

$$\sigma_{\max} = \frac{4 P \cdot l}{\pi r^3} . \qquad (11/47)$$

Der Bruch ist am Übergang vom zylindrischen Teil zum Zentrierkonus zu erwarten. Wesentlich günstiger wird die Beanspruchung, wenn man den Probestab beiderseits einspannt, ihn dort in Pendellagern lagert und auf reine Biegung beansprucht. Die Prüfmaschinen sind mit einem Zählwerk ausgerüstet, das die Zahl der Umdrehungen angibt. Durch Anbringen eines dünnen Thermoelementes an der Staboberfläche und Beobachten der vor dem Bruch ansteigenden Temperatur läßt sich der ungefähre Zeitpunkt des Bruches abschätzen.

Zur Bestimmung der Wechselfestigkeit nach WOEHLER untersucht man eine Reihe von völlig gleichartigen Proben bei verschiedener Belastung. Die erste Probe werde an der Stelle des maximalen Biegemomentes durch die Spannung σ_1 belastet, die nach z_1 Belastungswechseln zum Bruch führen soll. Die folgende Probe werde mit der etwas geringeren Beanspruchung σ_2 geprüft und breche nach der Umdrehungszahl z_2, die größer als z_1 werden wird. Die weiteren Proben werden mit stetig abnehmenden Spannungen untersucht, bis sie schließlich auch nach einer sehr großen Zahl von Belastungswechseln nicht mehr brechen. Die Beanspruchungen σ_1, σ_2 usw. werden nun als Ordinaten meist logarithmisch zu den zugehörigen Abszissenwerten z_1, z_2 usw. aufgetragen und durch die ermittelten Versuchspunkte eine Ausgleichskurve gelegt. Diese Darstellungen, von denen in Abb. 188 ein Beispiel gezeigt ist, lassen meist deutlich erkennen, daß von einer bestimmten, vom Werkstoff und dessen Zustandsgrößen abhängigen Zahl von Belastungswechseln an auch für eine sehr große Zahl z kein Bruch erfolgt. Die Ordinate dieser Parallelen zur Lastzahlachse ist dann die gesuchte Wechselfestigkeit, d. h. die Beanspruchung, bei der der Werkstoff von unbegrenzter Lebensdauer ist. Allerdings findet man bei reinen Metallen auch nach 10^8 Wechseln noch keinen zur z-Achse parallelen Verlauf der Kurve, so daß es eine offene Frage ist, ob in diesen Fällen die Wechselfestigkeit von Null verschieden ist.

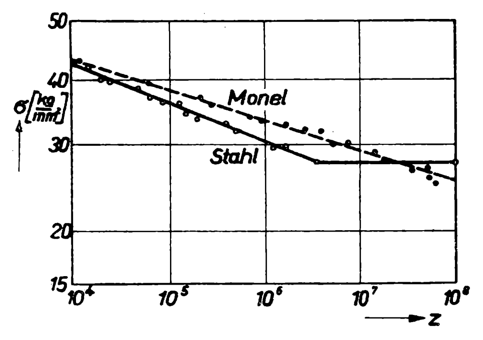


Abb. 188 Wechselfestigkeit von Monel und Stahl

§ 11,7 Messung der Härte (*147*)

11,71 *Der Begriff der Härte*

Der Begriff der Härte ist weder in physikalischer Hinsicht noch im technischen Sprachgebrauch eindeutig festgelegt und wird für den Widerstand gegen elastische

oder bleibende Formänderung und auch gegen Ritzen angewendet. Für die Physik der Werkstoffe liefert andererseits die Härtemessung ein Maß für die Größe und Art der Bindungskräfte zwischen den einzelnen Gitterbausteinen. Nach HERTZ (1882) wird zur Messung der Härte eine möglichst harte Kugel in den zu prüfenden Stoff eingedrückt und die Härte als der Druck definiert, der im Zentrum der dabei entstehenden kugelsegmentförmigen Druckfläche herrschen muß, damit in einem Punkt der Probe die Elastizitätsgrenze erreicht wird. Diese Definition wird jedoch in der Praxis aus meßtechnischen Gründen verlassen und durch Methoden ersetzt, bei denen die Elastizitätsgrenze weit überschritten wird.

11,72 *Die Härteskala von* MOHS

Der deutsche Mineraloge MOHS führte 1825 die nach ihm benannte Härteskala ein, in welcher der folgende Körper den vorhergehenden ritzen kann. Die zehn Stufen sind:

1. Talk	$Mg_3H_2Si_4O_{12}$ aq.
2. Gips	$CaSO_4 \cdot 2\,H_2O$
3. Kalkspat	$CaCO_3$
4. Fluorit	CaF_2
5. Apatit	$Ca_5F(PO_4)_3$
6. Orthoklas	$KAlSiO_4$
7. Quarz	SiO_2
8. Topas	$Al_2F_2SiO_4$
9. Korund	Al_2O_3
10. Diamant	C

Es ist von Bedeutung, festzustellen, daß sich die Härte allmählich mit dem Charakter der Bindung — vom Schichtengitter über Ionenbindung bis zur Valenzbindung — ändert. Mit Diamant als ritzendem Körper in Form eines geschliffenen Kegels von 90° Kegelwinkel läßt sich die Ritzhärteprüfung auch auf Metalle ausdehnen. Bei einer solchen Messung wird die vom Diamanten unter einer vorgegebenen Belastung erzeugte Ritzbreite als Maß für die Härte genommen. Infolge der sich dabei ergebenden Schwierigkeiten bei der Ausmessung der Strichbreiten und Abhängigkeit von der Belastung ist diese Messung mit großen Fehlern behaftet.

11,73 *Härtemessung nach* BRINELL *(67)*

In den zu prüfenden Werkstoff, dessen Oberfläche vollkommen eben und möglichst poliert sein soll, wird eine gehärtete Stahlkugel vom Durchmesser D mit der Kraft P eingedrückt. Der nach der Entlastung verbleibende kalottenförmige Eindruck (Abb. 189) wird unter dem Mikroskop ausgemessen und ist der Härte umgekehrt proportional. Ist d der Durchmesser des Eindrucks, so errechnet sich die Oberfläche des Kugeleindruckes zu

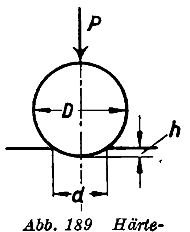


Abb. 189 Härtemessung nach BRINELL

$$O = \pi d h = \frac{\pi D^2}{2} - \frac{\pi D}{2}\sqrt{(D^2 - d^2)}.$$

Als Maß für die Härte wird das Verhältnis von P zur Oberfläche O also

$$H = P/O \qquad (11/48)$$

verwendet. Die gebräuchlichsten Kugeldurchmesser und Meßvorschriften bei der Bestimmung der Brinellhärte sind in den DIN 1605 Bl. 3 niedergelegt. Als Belastung wählt man eine Kraft P, die einen Eindruck $d = 0{,}2$ bis $0{,}5\,D$ hinterläßt. Für das Meßergebnis ist außerdem die Versuchsdauer von Einfluß, da die beim Überschreiten der Elastizitätsgrenze auftretende Verfestigung zeitabhängig ist. Wegen der Einfachheit der Härtemessung und deren Auswertung lag es nahe, einen Zusammenhang zwischen den Begriffen der Festigkeit und der Härte zu suchen. Es steht heute fest, daß eine allgemeingültige Beziehung nicht besteht und nur für Stahl und Duraluminium eine angenäherte Proportionalität zwischen Zugfestigkeit und Härte, $\sigma_B \approx 0{,}35\,H$, angenommen werden darf. Allgemein muß mit einer Streuung der Versuchswerte um $\pm$ 5% gerechnet werden, die bei härteren Werkstoffen noch größer wird.

§ 11,74 *Härtemessung nach* VICKERS

Die VICKERS-Härteprüfung verwendet grundsätzlich denselben Zusammenhang zwischen Belastung und Oberfläche des bleibenden Eindrucks wie das Brinellverfahren. Im Gegensatz zu jener Methode wird als Prüfspitze eine vierseitige Diamantpyramide verwendet, wodurch 1. die ermittelte Härte praktisch unabhängig von der Prüfbelastung wird und 2. auch sehr harte Stoffe untersucht werden können. Bei einem Pyramidenwinkel von 136° erhält man bis etwa 400 Härteeinheiten eine gute Übereinstimmung mit der Kugeldruckhärte. Der Eindruck der Diamantpyramide erscheint unter dem Meßmikroskop als Quadrat und kann wegen der scharfen Begrenzung der Kanten mit einer Genauigkeit von etwa 0,002 mm ausgemessen werden. Zur Bestimmung der Oberfläche werden die beiden Diagonalen ausgemessen und der Mittelwert d gebildet. Für die Oberfläche ergibt sich dann

$$O = \frac{d^2}{2 \cdot \cos(180 - \varphi)/2},$$

wenn φ der Spitzenwinkel der Pyramide ist. Je nach der Art des zu prüfenden Stoffes kommen als Belastung Werte von 50 g bis 120 kg in Betracht, die stoßfrei in etwa 15 s aufzubringen und 30 s auf ihren Höchstwert zu belassen sind (*25*).

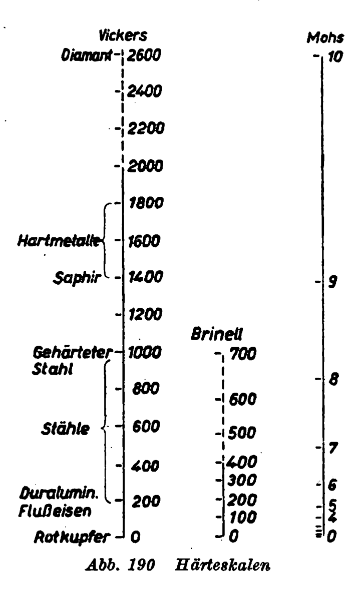


Abb. 190 *Härteskalen*

Bei der Härteprüfung nach ROCKWELL wird die Oberfläche aus der bleibenden Eindringtiefe der Kugel, die mit Meßuhren gemessen wird, abgeleitet. Außer den genannten Methoden werden noch dynamische angewendet (Rückprallverfahren), die sich jedoch nur für Differenzmessungen eignen und für physikalische Betrachtungen ohne Bedeutung sind. Auch bei Messungen der Temperaturabhängigkeit der Härte bedient man sich öfters dynamischer Verfahren.

Ein Vergleich der Härteskala nach MOHS mit den technischen Verfahren erlaubt Abb. 190, in die Meßwerte einiger Werkstoffe eingetragen sind.

11,8 Messung der mechanischen Nachwirkung und Dämpfung

11,81 *Der Begriff der inneren Dämpfung*

Wird ein belasteter elastischer Körper entlastet, so findet man bei genauerer Beobachtung der Spannungs-Dehnungs-Kurve, daß dieser Vorgang irreversibel ist, d. h. daß bei der Entlastung die Deformation je Spannungseinheit größer als bei dem umgekehrten Vorgang wird. In dieser Erscheinung verbergen sich zwei verschiedene physikalische Vorgänge: 1. die elastische Deformation ist nicht nur von der elastischen Spannung, sondern auch von der Zeit abhängig und hinkt zeitlich nach. 2. Die Gleichgewichtsdeformationen (Ruhelagen) sind bei Belastung und Entlastung verschieden. Diese Erscheinung, die meist innerhalb der Elastizitätsgrenzen beobachtet wird, nennt man Hysteresis, während die verzögerte Deformation als elastische Nachwirkung bezeichnet wird. Beide physikalischen Vorgänge sind für das Auftreten einer inneren Dämpfung des elastischen Körpers verantwortlich zu machen, die sich in einem Energieverlust bei wechselnder Beanspruchung äußert.

11,82 *Relaxationszeit*

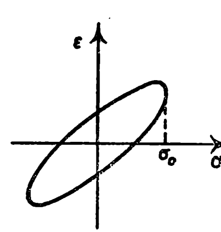


Abb. 191 Innere Dämpfung

Untersucht man eine Versuchsprobe in der Weise, daß die Dehnung ε senkrecht zur elastischen Spannung σ aufgezeichnet wird, so erhält man im allgemeinen keine doppelt durchlaufene Gerade, wie es nach dem HOOKEschen Gesetz zu erwarten wäre, sondern eine schmale Ellipse (Abb. 191). Zwischen Dehnung und Spannung besteht also eine Phasenverschiebung, die als *Verlustwinkel* δ bezeichnet wird. Bei Annahme einer periodisch veränderlichen Spannung $\sigma = \sigma_0 \cos \omega t$ bekommt man die Dehnung $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \cos(\omega t - \delta)$ und damit als Inhalt der Spannungs-Dehnungs-Ellipse:

$$\Delta N = \int \sigma \, d\varepsilon = \frac{\sigma_0^2}{E} \int_0^{2\pi} \cos \omega t \sin(\omega t - \delta) \, d\omega t = \frac{\sigma_0^2}{2E} 2\pi \sin \delta, \qquad (11/49)$$

wenn ω die Kreisfrequenz und E den Elastizitätsmodul bedeuten. Da $\sigma_0^2/2E$ die Schwingungsenergie je Volumeneinheit ist, nimmt diese nach Gleichung (11/49) um ΔN innerhalb einer Periode ab, wofür man im allgemeinen wegen der Kleinheit des Verlustwinkels angenähert $\Delta N = N \, 2\pi\delta$ setzen kann. Die Amplitude A der Schwingung nimmt daher pro Zyklus um

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta N}{2N} = \pi\delta = D \qquad (11/50)$$

ab, d. h. das logarithmische Dekrement der Schwingung beträgt $\pi\delta$. Die Zeit im Vergleich zur Schwingungsdauer T der Schwingung, in der die Amplitude auf den e-ten Teil des ursprünglichen Wertes absinkt, wird als *Relaxationszeit* τ bezeichnet; es gilt also

$$\tau = T \cdot \frac{1}{\pi\delta}. \qquad (11/51)$$

Beim Fehlen einer äußeren Dämpfung wird die Schwingungsamplitude eines elastischen Gebildes bei Resonanzanregung durch die innere Dämpfung bestimmt, da sich Massen- und elastische Kräfte aufheben. Da formal das Verhältnis von Widerstandskraft zu elastischer Kraft durch δ beschrieben wird, steigt im Resonanzfall die Amplitude auf den $1/\delta$ fachen Wert an, was z. B. bei Stahl ein Verhältnis von 2800 ergeben würde.

11,83 *Messung der inneren Dämpfung* (*231, 261, 298*)

Zur Messung der inneren Dämpfung einer Versuchsprobe K_2, die in der Form einer dicken, parallelen Platte vorliegen möge, wird diese mit einer etwa gleich großen Vergleichsplatte K_1 hintereinandergeschaltet und einer periodischen Kraft P ausgesetzt (Abb. 192). Der Verlustwinkel von K_1 wird sehr klein gehalten, etwa dadurch, daß man die Vergleichsplatte aus dünnen Stahlblechen mit dazwischenliegenden schmalen Stegen aufbaut. Die zwischen den Begrenzungsplatten L_1 und L_2 gemessene Dehnung wird also der Wechselkraft P proportional und mit ihr in Phase sein. Die Relativdehnung von K_1 und K_2 wird in der Abb. 192 mit Hilfe der Drehspiegel Sp_1 und Sp_2 gemessen, die an den dünnen Rollen R_1 und R_2 befestigt und zwischen je einem Paar federnder Übertragungsglieder festgeklemmt sind. Die Drehachsen der Spiegel stehen aufeinander senkrecht, wodurch die beiden Relativdehnungen durch einen die beiden Spiegel hintereinander treffenden Lichtstrahl in rechtwinkeligen Koordinaten auf den Schirm S geschrieben werden. Durch Belastung mit Gewichten an Stelle von P läßt sich die Anordnung vor Versuchsbeginn statisch eichen. Besitzt K_2 einen Verlustwinkel, so erscheint auf S eine der Abb. 191 entsprechende Ellipse, deren kleine Halbachse $\sin \delta$ verhältnisgleich ist. Daraus ist der Energieverlust für eine Periode zu bestimmen.

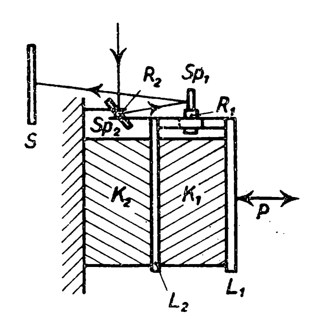


Abb. 192 Messung der inneren Dämpfung

Für kleinere, in Form eines Stabes vorliegende Proben eignet sich die von LAZAN (*220*) entwickelte, in Abb. 193 schematisch dargestellte Methode besonders. Diese besteht im wesentlichen darin, daß der Energieverlust eines mechanischen Oszillators gemessen wird, der ein linear schwingendes System, bestehend aus zwei gleichen Massen und der als elastisches Glied wirkenden Versuchsprobe, zu Resonanzschwingungen erregt. Die beiden gleich großen Massen M_1 und M_2 können sich nur linear auf gehärteten Rollen R und Stahlschienen bewegen und bilden zusammen mit der Versuchsprobe P ein schwingungsfähiges Gebilde. Der Oszillator O wird von einem regelbaren Elektromotor A angetrieben und besteht aus den beiden exzentrisch befestigten, zwangsläufig entgegengesetzt umlaufenden Massen m/2, deren Stellung an der Kreisskala S_1 abgelesen werden kann. Die Amplitude A wird mit dem Meß-

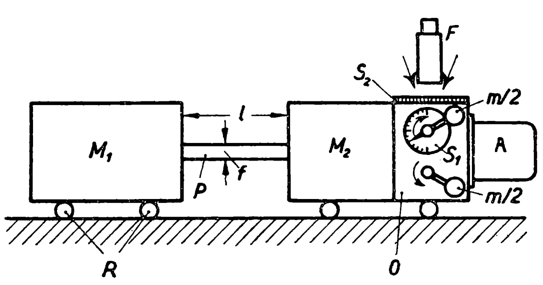


Abb. 193 Messung der inneren Dämpfung nach LAZAN

mikroskop F an der Skala S_2 festgestellt. Die Resonanzeinstellung wird durch Veränderung der Massen M_1 und M_2 vorgenommen, wobei gleichzeitig bei stroboskopischer Beleuchtung die Skalen S_1 und S_2 abgelesen werden. Für die Amplitude A = 0 muß bekanntlich der Phasenwinkel 90° betragen. Befinden sich die beiden exzentrischen Massen im Abstand d von der Drehachse und bezeichnet man wieder die Kreisfrequenz mit ω, so beträgt die Oszillatorstärke

$$P_0 = m \cdot \frac{\omega^2}{d}.$$

Die elektrische Leistung des Motors ΔN entspricht dann dem durch innere Dämpfung entstandenen Energieverlust

$$\Delta N = \frac{\pi P_0 A}{l \cdot q}, \tag{11/52}$$

worin l die Probenlänge und q deren Querschnitt ist, $l \cdot q$ also dem Volumen der Probe entspricht. Diese Gleichung gilt allerdings nur, wenn die Wärmeverluste der Probe an die Umgebung gering sind, was besonders bei geringer Spannung σ nicht immer gewährleistet ist. Die Größe der maximalen elastischen Spannung errechnet sich aus

$$\sigma_0 = M_2 \, \omega^2 \, \frac{A}{q}. \tag{11/53}$$

Aus Gleichung (11/52) in Verbindung mit Gleichung (11/53) kann man durch Vergleich mit Gleichung (11/49) den Verlustwinkel bestimmen. Bei vielen Substanzen ist δ von der Spannung stark abhängig, etwa in der Form $\Delta N = C \sigma^n$, so daß Messungen mit verschiedener Amplitude und Frequenz durchzuführen sind.

11,84 *Versuchsergebnisse*

In der Tabelle XV sind für einige Substanzen die Werte für die Verlustwinkel und die Relaxationszeit zusammengestellt.

Substanz	δ [°]	τ/T	Resonanzverstärkung
Quarz	0,01	1600	5000
Stahl	0,02	900	2700
Backsteinmauer	0,2	100	320
Beton	0,4	50	150
Holz	1,2	16	50
Kork	4,0	5	15
Gummi	6,0	3	10

Tabelle XV

Messungen an Metallen zeigen, daß der Verlustwinkel stark vom Bearbeitungszustand, der Reinheit und der Kristallgröße abhängig ist. Auf die Zunahme des Verlustwinkels mit der Belastung wurde bereits hingewiesen [siehe auch (*329*)].

§ 12 HERSTELLUNG UND EIGENSCHAFTEN VON EINKRISTALLEN (*127*, *296*, *310*)

12,1 **Kristalle und Kristallhaufwerke**

Die natürlichen und künstlichen Gesteine und Metalle bestehen in der Regel aus einem Haufwerk verhältnismäßig kleiner Kristalle, die hinsichtlich ihrer Größe, Ausbildung und gegenseitiger Orientierung außerordentlich verschieden sind. Die Entstehungsbedingungen und Gesetzmäßigkeiten der verschiedenen Ausbildungsformen sind im einzelnen noch unbekannt. Seit TAMANN (*344*) weiß man, daß diese vom Kristallisationsvermögen, der Kristallisationsgeschwindigkeit und den dabei herrschenden physikalischen Außenbedingungen abhängig sind. So ist bekannt, daß beim Erstarren einer Schmelze in einem Gefäß die Kristallite in der Regel senkrecht zu den äußeren Wandungen wachsen. Für die Prüfung der physikalischen Eigenschaften eines Materials, z. B. an Hand eines Schliffes, ist von Bedeutung, daß die chemische Zusammensetzung im Inneren der Körner des Haufwerks eine andere ist wie an den Korngrenzen, da sich häufig während des Erstarrungsvorganges die Verunreinigungen in jenen anhäufen. Da andererseits die meisten physikalischen Eigenschaften des festen Körpers, wie Zugfestigkeit, elektrische und thermische Leitfähigkeit, optische Absorption, stark vom Grade der Verunreinigungen abhängen, ist eine genaue Messung der Stoffeigenschaften nur an reinen Einzelkristallen möglich. Gerade bei Festigkeitsuntersuchungen wurde von vielen Forschern festgestellt, daß der Verformungsmechanismus in einem von seinen Nachbarn eingeschlossenen Kristallit anders verläuft als im Einkristall und im allgemeinen ein größerer Verformungswiderstand zu beobachten ist.

Auf der anderen Seite ist man heute in der Lage, wenigstens ein rohes Bild vom Ablauf elastischer und plastischer Formänderungen auf Grund theoretischer Vorstellungen über den festen Körper zu entwerfen. Eine Nachprüfung dieser Theorie ist nur möglich, wenn der Einfluß der Umgebung des Kristalles ausgeschaltet werden kann, diese also isotrop ist. Bei den meisten in Frage kommenden Substanzen, besonders den Metallen, kommen Einkristalle, wie sie für solche Versuche erforderlich sind, in der Natur nicht vor.

Die Kennzeichen eines Einkristalls sind folgende: Der Einkristall ist ein kristalliner Körper, dessen Orientierung, d. h. die Lage seiner kristallographischen Achsen in bezug auf ein raumfestes Koordinatensystem, in allen Punkten dieselbe ist. Seine äußere Form kann beliebig sein, doch sind solche von zylindrischer, prismatischer oder flächiger Form für physikalische Untersuchungen bevorzugt. Nach genauen Beobachtungen schwankt die Orientierung innerhalb eines Einkristalls um einen gewissen Betrag, der allerdings meistens innerhalb der Fehlergrenzen gewöhnlicher Orientierungsbestimmungen liegt.

Einkristalle lassen sich aus allen Stoffsystemen gewinnen, und zwar sowohl aus solchen mit gegenseitig löslichen (Mischkristalle) als auch unlöslichen Komponenten, unterscheiden sich also von den Vielkristallen nicht durch größere Reinheit, sondern nur bezüglich der Orientierung der Kristallite und des Fehlens von Gitterstörungen an den Korngrenzen.

Zur Untersuchung der physikalischen Eigenschaften von Einkristallen werden größere Stücke in Form von zylindrischen oder prismatischen Stäbchen oder ebener, dünner Plättchen benötigt. Die Verfahren zur Herstellung solcher Kristalle lassen

sich einteilen in solche, bei denen diese aus der flüssigen oder gasförmigen Phase niedergeschlagen werden, und solche, bei denen ein Kristallhaufwerk durch mechanische und thermische Behandlung im festen Zustand in einen Einkristall umgewandelt wird.

12,2 **Herstellung von Einkristallen aus dem Schmelzfluß**

Die wohl am häufigsten angewandten Verfahren, durch welche relativ reine Einkristalle erhältlich sind, gehen vom geschmolzenen Zustand aus, wobei die Schmelze entweder langsam zum Erstarren gebracht oder mit einem Kristallkeim geimpft wird, der langsam aus der Schmelze herausgezogen wird. Dabei ist zu beachten, daß durch genügend langes Erhitzen alle Keime aus der Schmelze entfernt werden.

12,21 *Langsame Erstarrung*

Das zuerst von TAMANN (1920) für die Herstellung von Wismut-Kristallen angegebene Verfahren besitzt vielseitige Anwendungsmöglichkeiten und liefert leidlich saubere Kristalle. Von verschiedenen anderen Forschern (*138*), besonders von BRIDGMAN (*44*), wurde es weiter verbessert.

Die grundsätzliche Anordnung dieses Verfahrens ist in der Abb. 194 wiedergegeben. Das zylindrische Rohr R aus Glas, Quarzglas, Porzellan oder Kohle wird mit der Schmelze gefüllt und in dem senkrecht stehenden elektrischen Ofen O durch einen mehrfach untersetzten Elektromotor oder ein Uhrwerk U langsam hinabgesenkt. Die Sinkgeschwindigkeit beträgt für große Kristalle 4 mm/h und kann bei kleineren bis auf 600 mm/h gesteigert werden. An den Ofen schließt sich ein Schutzrohr S an, das bei niedrigschmelzenden Stoffen als Kühler ausgebildet werden kann. Um die Bildung des Einkristalles zu fördern, kann man das Rohr zu einer kurzen Kapillare (TAMANN) ausziehen oder das untere Ende von R einschnüren (BRIDGMAN). Erreicht nun die in der Abbildung angedeutete feine Spitze das Gebiet, in dem die Temperatur etwas unterhalb des Schmelzpunktes liegt, so beginnt sich der Einkristall zu bilden. Um Pendelungen des Rohres R zu vermeiden, kann man auch den Ofen ganz allmählich abkühlen lassen, bekommt jedoch keine bevorzugte Wachstumsrichtung. Der Ofen muß eine um etwa 100° C höhere Temperatur als die der erstarrenden Schmelze besitzen, damit die Kristallbildung an einer Stelle mit großem Temperaturgradienten vor sich geht und daher gegen kleine, äußere Temperaturschwankungen unempfindlich ist.

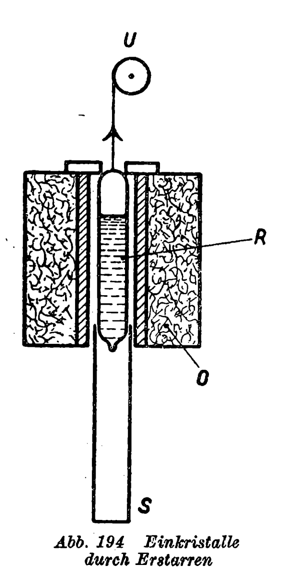


Abb. 194 Einkristalle durch Erstarren

Eine große Schwierigkeit liegt in der richtigen Auswahl des Rohrmaterials, das sowohl einen höheren Schmelzpunkt haben muß als die Schmelze als auch vakuumdicht und nicht gasabgebend sein soll. In vielen Fällen ist schwer schmelzendes Glas (Pyrex, Supremax) ausreichend, das z. B. bei Aluminium innen berußt werden muß. Für höhere Temperaturen kommt Kohlerohr in Frage, das unter Umständen jedoch durch ein neu-

trales Gas vor schnellem Verbrennen geschützt werden muß und auch nicht vakuumdicht ist. Nimmt der geschmolzene Stoff Kohlenstoff auf, so verwendet man hochschmelzende Metalloxyde, wie Aluminium- und Zirkonoxyd.

Nach diesem Verfahren gelang es BRIDGMAN, Einkristalle von Antimon, Wismut, Zink, Kadmium und Zink herzustellen und deren Festigkeitseigenschaften zu untersuchen. ELAM (*84*) hat für mechanische Untersuchungen Kristalle aus Gold, Silber, Kupfer, Messing und Aluminiumbronze erzeugt. SCHUBNIKOW (*312*) und OBREIMOW schmolzen das Metall in einem waagerecht liegenden Glasgefäß, in dessen eines Ende ein Impfkristall gebracht wurde, und ließen dieses langsam abkühlen. Auf diese Weise gelang es ihnen, sehr reine Wismut-Einkristalle herzustellen. Dasselbe Verfahren eignet sich auch für Salze, wie von STOEBER (*338*), TAMANN und VESZI (*345*) erwiesen wurde.

12,22 *Herausziehen aus der Schmelze* (*59*, *177*)

Ein weiteres Verfahren, aus geschmolzenem Metall einkristalline Fäden und Stäbchen zu gewinnen, wurde zuerst von CZOCHRALSKI (*63*) angegeben. Gegenüber der Methode in § 12,21 besitzt es den Vorteil, daß durch die vorgebbare Orientierung des Kristallkeimes teilweise eine bevorzugte Orientierung des Einkristalles erzwungen werden kann. Hierbei wird ein kleiner Kristallsplitter, ein *Kristallkeim*, mit der Schmelze in Berührung gebracht und mit einer definierten, dem Stoff angepaßten Geschwindigkeit ein Kristall senkrecht zur Oberfläche der Schmelze herausgezogen. In der Abb. 195 ist eine Ausführungsform nach Versuchen von MARK, POLANYI und SCHMID (*233*) schematisch dargestellt. Das Metall wird im Tiegel T in einem elektrischen Ofen O erschmolzen. Am unteren Ende der nach unten hin stark verjüngten Zugstange Z, die durch ein Uhrwerk U gleichmäßig und langsam nach oben gezogen wird, ist der Impfkristall I befestigt und taucht eben in die Schmelze. Durch ein auf der Schmelze schwimmendes Glimmerplättchen G, das in der Mitte durchbohrt ist, wird die Dicke des entstehenden Kristalles geregelt. Zur gleichmäßigen Abkühlung des herausgezogenen Kristallfadens ist die Zugstange konzentrisch von einem Kühlrohr S umgeben, aus dem ein neutrales Gas ausströmen kann. Ein zweites Kühlrohr K führt einen gleichmäßigen Gasstrahl unmittelbar zur Erstarrungsstelle über der Bohrung im Glimmerblatt G. Die Temperatur der Schmelze muß sehr genau eingehalten werden und wird mit Hilfe eines Thermoelementes Th überwacht und wenn nötig selbsttätig geregelt. Die Ziehgeschwindigkeit beträgt 360 bis 720 mm/h bei Kristalldurchmessern zwischen 1 und 5 mm. Nach dieser Methode gelingt es, Einkristalle von Wismut, Zink, Zinn, Kadmium, Zink-Kadmium und Gold herzustellen. Die kristallographische Achse der Kristallite schwankt infolge von Temperaturänderungen um etwa 2 bis 10°.

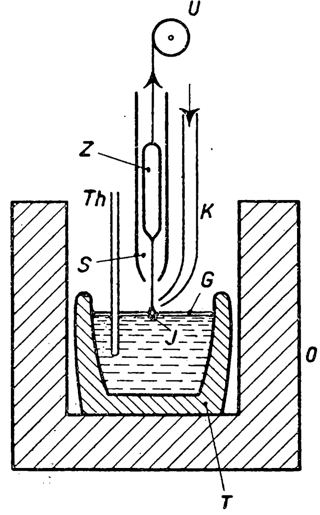


Abb. 195 Einkristalle durch Herausziehen aus der Schmelze

12,3 Erhitzen im festen Zustand (*216*)

In einem gegossenen Kristallhaufwerk, das so gleichmäßig langsam abgekühlt worden ist, daß keine inneren Spannungen zurückgeblieben sind, sind die einzelnen Kristalle stabil, d. h. beim Erhitzen bis knapp unterhalb ihres Schmelzpunktes behalten sie etwa ihre Gestalt und Größe, gleichen höchstens ihre etwa unregelmäßig verlaufenden Flächen aus, um regelmäßiger begrenzte Kristalle zu bilden.

Verformt man ein feinkristallines Haufwerk plastisch um einen geringen Betrag, so erleidet jedes Kriställchen etwa dieselbe Verformung. Wird nun dieses Material einige Zeit bei einer Temperatur geglüht, die nur wenig über der Temperatur beginnender Entfestigung liegt, so läßt sich im Schliffbild das Entstehen kleiner neuer Kristalle an den Korngrenzen feststellen. Mit steigender Temperatur und Glühdauer zehren diese *Kristallkeime* das plastisch verformte, durch die thermische Behandlung offenbar zerfallende Material auf und bauen größere, regelmäßig ausgebildete Kristalle auf. Diesen Vorgang der Bildung von Kristallkeimen bezeichnet man als *Rekristallisation*, den hierauf folgenden der Kornvergröberung als *Sammelkristallisation*. Im einzelnen hat man festgestellt, daß eine vorangegangene starke Verformung die Rekristallisation bei niedrigeren Temperaturen einsetzen läßt und relativ kleine Kristalle ergibt. Die Sammelkristallisation tritt darauf erst bei sehr hohen Temperaturen ein.

Von diesen beiden Möglichkeiten wird bei der Herstellung einzelner Kristalle Gebrauch gemacht, wie im folgenden gezeigt wird.

12,31 *Rekristallisation nach kleinen Verformungen*

Nach dem Vorhergehenden ist es von Bedeutung, als Ausgangszustand des Materials möglichst feinkörniges Gefüge zu erreichen. Die plastische Verformung erfolgt durch Recken in einer Zerreißmaschine. Der günstigste Dehnungsbetrag muß durch Vorversuche ermittelt werden, im allgemeinen liegt dieser zwischen 1 und 3%.

Für die Herstellung von Aluminiumeinkristallen aus Handelsmaterial (99,5% Reinheitsgrad) haben Carpenter und Elam (*59*) folgende Vorschrift gegeben:

1. Ziehen und Walzen des Materials.
2. Glühen bei 550° C, 6 Stunden lang (wobei ein feinkörniges Gefüge zustande kommt).
3. Dehnen (im kalten Zustand) um etwa 2%.
4. Glühen, 6 Tage bei stetig von 450 bis 550° C ansteigender Temperatur.
5. Nachglühen bei 600° C (wodurch die an der Oberfläche haftenden restlichen kleinen Kristalle noch aufgezehrt werden).

Für die Bildung großer, ebenmäßiger Kristalle muß die Temperatur, bei der sich die Kristalle bilden, genau eingehalten werden, da sich im anderen Fall eine größere Anzahl von Kristallen bildet.

Edwards und Pfeil (*80*) geben für die Herstellung von Eiseneinkristallen aus einem Stahl mit 0,13% C; 0,02% Si; 0,4% Mn; 0,03% S; 0,02% P folgende Vorschrift an:

1. Entkohlen bei 875° C im Wasserstoffstrom, 2 Tage.
2. Erhitzen auf 1000° C, 12 Stunden.
3. Abkühlen innerhalb 12 Stunden.
4. Dehnen (im kalten Zustand) um 2,8 bis 3,25%.
5. Erhitzen auf 880° C, 72 Stunden (wobei der Umwandlungspunkt bei 900° C nicht überschritten werden darf).
6. Abkühlen.

Die an der Oberfläche zurückbleibenden kleinen Kristalle müssen mechanisch entfernt werden. Nach demselben Verfahren gelang es, Kristalle von Al-Zn-Legierungen und von β-Messing (50% Cu, 50% Zn) herzustellen. Es ist allgemein anwendbar und liefert gute Kristalle von beliebiger Form.

12,32 *Sammelkristallisation*

Da die bei der Rekristallisation entstandenen großen Kristalle bei weiterem Glühen sich nicht mehr verändern, ist es gerade für die Fäden von Glühlampen von großer Bedeutung, wenn diese aus Einkristallen bestehen. Eine Herstellungsmöglichkeit bietet der Vorgang der Sammelkristallisation bei hohen Temperaturen, bei denen die nach stärkeren Deformationen beim Glühen entstehenden kleinen Kristalle zu großen Kristallen zusammenwachsen.

Nach dem PINTSCH-Verfahren (*37*) von ORBIG und SCHALLER werden Wolframfäden folgendermaßen hergestellt: Aus feinem Wolframpulver, das mit einem Bindemittel angerührt wird, werden dünne Fäden gespritzt und im elektrischen Röhrenofen zusammengesintert. Hierauf werden die Fäden langsam durch einen Ofen gezogen, wobei sich bei Temperaturen etwas unterhalb des Schmelzpunktes lange, dünne Kristalle bilden. Auf ähnliche Weise lassen sich auch größere Wolframkristalle durch Sintern von Wolframpulver unter Druck, Hämmern bei hohen Temperaturen und Erhitzen gewinnen, wenn dem Wolfram eine geringe Menge von ThO_2 beigemengt wird.

Ähnliche Verfahren sind auch bei der Herstellung von Zn- und Fe-Kristallen mit Erfolg angewandt worden.

12,4 **Einkristalle durch Züchtung aus Lösungen** (*82*)

Für die Züchtung von Kristallen aus Lösungen werden zwei verschiedene Verfahren angegeben: a) Züchtung aus Lösungen im Ruhezustande, b) Züchtung in bewegten Lösungen. In einfachster Weise überläßt man die gesättigte Lösung der Substanz in einer flachen Schale bei konstanter Umgebungstemperatur der Verdunstung, bei stark flüchtigen Lösungsmitteln kann diese durch Verkleinerung der Oberfläche oder Senkung der Temperatur verringert werden. Ein frei in die Lösung gehängter Kristallkeim begünstigt die ebenmäßige, ungestörte Kristallbildung.

L. WULF hat nachgewiesen, daß der Ruhezustand der Lösung bei der Kristallbildung nicht notwendig ist, sondern daß sich aus gleichmäßig bewegten Lösungen besonders schöne und gut ausgebildete Kristalle züchten lassen. Es ist nur darauf zu achten, daß der im Wachstum begriffene Kristall allseitig von der Lösung umspült wird, um einseitiges Wachstum zu vermeiden. Die verschiedentlich angegebenen rotierenden Kristallzuchtapparate bestehen meist aus einem zylindrischen Glasgefäß, das eine konzentrisch eingeführte Pinzette zur Halterung des Kristallkeimes enthält und um eine waagerechte Achse leicht drehbar gelagert ist. Durch ein Uhrwerk wird das die Lösung enthaltene Gefäß in langsame, gleichmäßige Drehung (einige Umdrehungen pro Stunde) versetzt. Die erforderliche Temperaturkonstanz wird durch ein Flüssigkeitsbad gewährleistet, in dem sich die Apparatur befindet.

Handelt es sich um wertvolle Lösungsmittel oder gelöste Substanzen oder um eine schwerlösliche Substanz, so verwendet man die strömende Mutterlauge selbst als Transportmittel für die auszukristallisierende Substanz. Zwei Gefäße mit etwas ver-

schiedener Temperatur sind durch zwei weite Rohre zu einer Zirkulationsvorrichtung zusammengestellt, in der die Mutterlauge vom Gefäß höherer Temperatur zu dem mit niedriger Temperatur strömen kann. In dem den Kristallkeim enthaltenden kälteren Gefäß kühlt sich die Mutterlauge ab und verarmt an gelöster Substanz, worauf diese in das Gefäß mit höherer Temperatur zurückströmt, in dem sie frische Substanz auflösen kann und den Kreislauf erneut antritt.

12,5 Einkristalle durch Niederschlag aus der Gasphase

Eine Anzahl von Metalldämpfen, z.B. von Zn und Cd, lassen sich auf kalten Flächen kristallin niederschlagen. Als Ausgangsmaterial dienen für Kristalle höchster Reinheit die Chloride und Oxychloride der betreffenden Metalle, die thermisch zersetzt werden. LODYGUINE konnte einen zusammenhängenden Niederschlag von Wolfram auf einem Platindraht oder Kohlefaden erzeugen, indem er ein Gemisch von Wolframhexachlorid und Wasserstoff über den rotglühenden Draht leitete.

Nach KOREF (*211*) lassen sich langgestreckte W-Einkristalle mit der in Abb. 196 dargestellten Apparatur erzielen. In dem elektrischen Röhrenofen O befindet sich die Glasröhre G, die an einem Ende zu einer Kugel K aufgeblasen ist. In K befindet sich Wolframhexachlorid (WCl_6), das einen Schmelzpunkt von 275° C und einen Siedepunkt von 347° C besitzt. In diesem Rohr G, das evakuiert werden kann, ist das Rohr T befestigt, in das ein Thermoelement Th eingeführt wird und das außerdem zwischen den Klemmen K_1 und K_2 den zu behandelnden Draht F trägt. Durch ein Zuführungsrohr tritt Wasserstoff ein, der sich mit den Metallsalzdämpfen belädt. An dem auf Rotglut erhitzten Einkristalldraht F zersetzt sich ein Teil des Gasgemisches, wobei sich W niederschlägt. Der sich dabei bildende Chlorwasserstoff wird durch eine Pumpe abgesaugt. Bei Einhalten der optimalen Versuchsbedingungen von 110° C Ofentemperatur, etwa 1000° C Fadentemperatur und 12 Torr Druck, wächst der zunächst 0,05 mm starke Faden innerhalb von 30–40 min auf den drei- bis vierfachen Durchmesser an, währenddessen die Fadentemperatur durch Nachregeln der Heizstromstärke konstant zu halten ist. Das Kristallwachstum stellt man sich hierbei so vor, daß in Fadennähe eine Dissoziation des WCl_6 stattfindet und die W-Atome in unmittelbarer Fadennähe zu einem Kristallverband zusammentreten. Da in diesem Fall nur der Einfluß eines einzigen Mutterkeimes wirksam ist, kann der Kristall unbehindert mit ebenen Begrenzungskanten auswachsen, wie das Schliffbild des Drahtquerschnittes beweist.

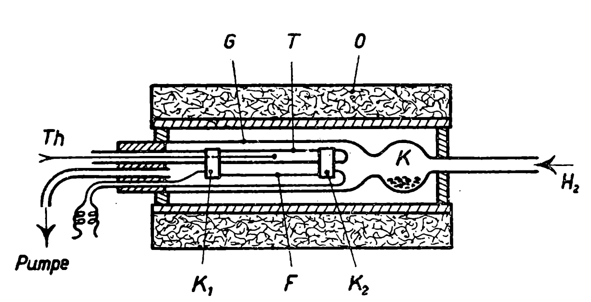


Abb. 196 Wolfram-Einkristalle aus der Gasphase

Die auf diese Weise erhaltenen Anwachskristalle sind sehr spröde, werden jedoch durch kurzzeitiges Erhitzen auf 2500° C ebenso weich wie gewöhnliche Einkristalldrähte. Es ist von Interesse, daß röntgenographische Unterschiede zwischen spröden und weichen Kristallen nicht bestehen.

Einkristalle von *Kadmiumsulfid* (CdS), deren lichtelektrische Erscheinungen in

theoretischer und praktischer Hinsicht bedeutungsvoll sind, lassen sich in ausreichender Größe nach einem zuerst von FRERICHS (*103*) angegebenen und später weiterentwickelten Verfahren herstellen. Die dabei verwendete Anordnung ist vereinfacht in Abb. 197 dargestellt. Das Reaktionsrohr Q aus Quarzglas befindet sich in einem elektrischen Röhrenofen O, dessen Temperatur auf etwa 1000° C eingeregelt wird. Reinstes metallisches Kadmium wird in feinen Spänen in einem Schiffchen S etwa in die Mitte des Ofens geschoben. Sorgfältig getrockneter und gereinigter

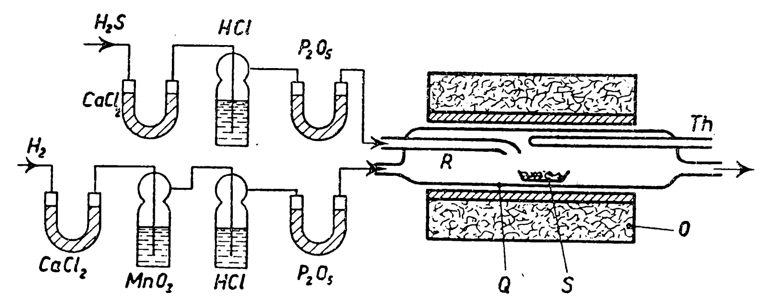


Abb. 197 Herstellung von CdS-*Einkristallen*

Schwefelwasserstoff wird durch das Rohr R zugeleitet und bildet zusammen mit dem verdampfenden Cd bei einer bestimmten Temperatur, die in der Nähe von 1000° C liegt, an den etwas kühleren Rohrwandungen Einkristalle verschiedener Formen und Abmessungen. Als Schutzgas wird getrockneter und gereinigter Wasserstoff aus einer Druckflasche durchgeleitet. Von besonderer Bedeutung ist offenbar neben der Strömungsgeschwindigkeit des Gases der sich in Rohrachse und senkrecht hierzu ausbildende Temperaturgradient, den man in der Rohrachse durch das verschiebbare Thermoelement Th mißt.

Die mit einer solchen Anordnung erhaltenen Kristalle sind vom Wurtzit-Typ, glasklar und schwach gelblich gefärbt und finden sich in Form länglicher Nadeln oder meist dünner Plättchen von 5 bis 100 μ Dicke und bis zu mehreren mm^2 Fläche, ja bis zu Abmessungen von 5 · 20 mm.

12,6 Bestimmung der Kristallorientierung

Für die genaue Bestimmung der physikalischen Eigenschaften von Einkristallen ist es erforderlich, die Kristallorientierung zu kennen, da jene vielfach eine Funktion der Richtung der Kristallachsen sind. Liegen die Kristallflächen ganz oder teilweise als äußere Begrenzungen frei, wie es auch bei gezüchteten Kristallen zum Teil der Fall ist, kann die Achsenrichtung nach den bekannten Methoden der Kristallographie (Goniometer) bestimmt werden. In vielen Fällen jedoch versagt dieses Verfahren und muß im einzelnen durch die nachstehend aufgeführten Methoden ersetzt werden. Vielfach genügt es, den Winkel der Stabachse zur Kristallachse zu kennen.

12,61 *Optische Bestimmung*

Bei durchsichtigen Kristallen geringer Symmetrie bietet das Polarisationsmikroskop ein bequemes Mittel für die Orientierungsbestimmung. Der Kristall wird dabei auf den allseitig schwenkbaren Drehtisch aufgebaut und so lange geschwenkt, bis die leicht

erkennbare optische Achsenrichtung eingestellt ist. Bei den Metallkristallen, denen eine äußere Kennzeichnung im allgemeinen fehlt, lassen sich nach BRIDGMAN (*45*) die an ihrer Oberfläche vorhandenen, kristallographisch begrenzten Wachstumsgrübchen für eine bequeme Orientierungsbestimmung ausnutzen. Sind solche nicht vorhanden, können durch Ätzen der Oberfläche Kristallflächen freigelegt werden, wobei darauf zu achten ist, daß bis zum hellsten Glanz zu ätzen ist, um die Flächen optisch bestimmen zu können (*236*).

Ein derart angeätzter Kristall reflektiert das Licht ganz ähnlich wie die Kristallform des betreffenden Systems. So reflektieren die im regulären System kristallisierenden Metalle Fe, Al und Cu meist wie Würfel. Jedoch sind die Reflexionen an den Kristallflächen ziemlich unscharf und können mit dem Goniometer nur mit einer Genauigkeit von etwa $\pm$ 1° bestimmt werden. Nach SACHS lassen sich Orientierungsbestimmungen auch im reflektierten Licht mit Hilfe des Polarisationsmikroskopes bei angeätztem Aluminium sehr genau durchführen.

12,62 *Röntgenographische Bestimmung* (*128, 148*)

Die röntgenographischen Methoden besitzen wegen ihrer allgemeinen Anwendbarkeit für die Orientierungsbestimmung von Einkristallen die größte Bedeutung. An Hand einer LAUE-Aufnahme, die man je nach dem Absorptionsvermögen des Kristalles im *Durchstrahl-* oder *Rückstrahlverfahren* gewinnen kann, läßt sich die vollständige Orientierung bezüglich eines im Kristall festen Koordinatensystems bestimmen. Eine weitere Methode, den Kristall auf einem Drehtisch zusammen mit dem Film so lange zu schwenken, bis eine völlige Symmetrie der Interferenzpunkte erreicht ist, erfordert einen größeren experimentellen Aufwand. Beim Drehkristallverfahren sind für eine vollständige Orientierungsbestimmung zwei Aufnahmen erforderlich, doch genügt in vielen Fällen *eine* Aufnahme, deren Auswertung einfach ist. Im einzelnen sei bezüglich der experimentellen Anordnung und Indizierung der Aufnahmen auf Band IV verwiesen.

In diesem Zusammenhang sei die für die Festigkeitseigenschaften besonders wichtige Bestimmung der Textur von Kristallhaufwerken erwähnt. Sind die einzelnen gleichgearteten Kristallite regellos im Raum orientiert, so zeigen sich bekanntlich im *Pulververfahren* nach DEBYE-SCHERRER konzentrische Ringe. Der Einkristall zeigt hingegen im Durchstrahlverfahren nach LAUE diskrete Interferenzpunkte, deren Symmetrie von der kristallographischen Ordnung des Kristalles bestimmt wird. Die dem Einkristall eigentümliche Anisotropie der physikalischen Eigenschaften kann man auch an vielkristallinen Haufwerken beobachten, wenn die Kristallite nicht völlig regellos orientiert, sondern in bestimmter Weise statistisch geordnet sind. Diese Ordnung kann von einer plastischen Verformung (gezogene Drähte, gewalzte Folien) herrühren, aber auch durch natürliches Wachstum und Auskristallisieren entstanden sein. Die Interferenzringe drängen sich in diesem Fall zu „Sicheln" zusammen, deren Schärfe und Anordnung auf die Größe und Art der Textur schließen lassen. Solche Röntgendiagramme nehmen also eine Mittelstellung zwischen Laue- und DEBYE-SCHERRER-Diagramm ein.

12,63 *Messung des elektrischen Widerstandes*

Wie durch VOIGT (*360*) theoretisch nachgewiesen wurde, ist bei Einkristallen der Betrag des elektrischen Widerstandes im allgemeinen von der jeweiligen Richtung des

Meßstromes zu den Kristallachsen abhängig. Das gilt für alle nicht regulär kristallisierenden Stoffe. Durch GRÜNEISEN und GOENS (*142*) ist dieser theoretische Befund erstmalig experimentell bestätigt worden. Erleichternd wirkt sich hierbei aus, daß die meisten nicht regulären Metalle tetragonal oder hexagonal kristallisieren und eine axiale Symmetrie des Widerstandes zeigen. Das bedeutet, daß der elektrische Widerstand in einer Ebene senkrecht zur Hauptachse für alle Richtungen derselbe ist und

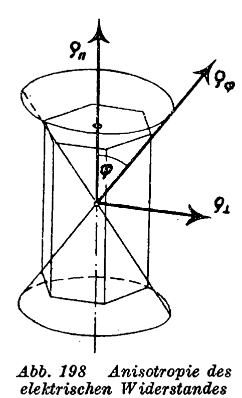


Abb. 198 Anisotropie des elektrischen Widerstandes

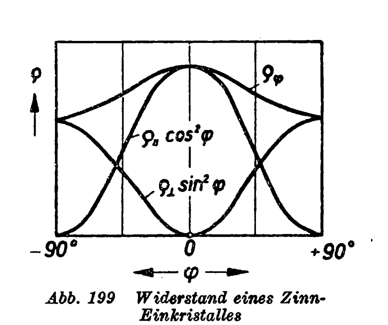


Abb. 199 Widerstand eines Zinn-Einkristalles

alle Richtungen mit gleichem spez. Widerstand ϱ_φ auf einem Doppelkegel liegen, dessen Achse die kristallographische Hauptachse ist und dessen Öffnungswinkel 2φ beträgt, wie aus der Abb. 198 zu ersehen ist. Nach VOIGT setzt sich ϱ_φ tensoriell aus den Werten $\varrho_{||}$ und $\varrho_{\perp}$ in und senkrecht zur Hauptachse gemäß

$$\varrho_\varphi = \varrho_{||} \cos^2 \varphi + \varrho_{\perp} \sin^2 \varphi \qquad (12/1)$$

zusammen. Da $\varrho_{||}$ im allgemeinen von $\varrho_{\perp}$ verschieden ist, wird der elektrische Widerstand in der Hauptachse einen Extremwert besitzen. In Abb. 199 sind nach Messungen von BRIDGMAN für einen Zinneinkristall die Widerstandswerte abhängig vom Winkel φ aufgetragen. Durch Aufsuchen des Widerstandsmaximums läßt sich mit einiger Genauigkeit die Richtung der Hauptachse finden. In der Tabelle XVI sind für einige Metalle die spezifischen Widerstände in den beiden ausgezeichneten Richtungen angegeben.

Metall	T (°K)	$10^4 \varrho_{||}$ [Ω cm]	$10^4 \varrho_{\perp}$ [Ω cm]	$\varrho_{||}/\varrho_{\perp}$
Magnesium	273	0,0350	0,0422	0,829
Zink	273	0,0583	0,0539	1,082
Kadmium	293	0,0824	0,0682	1,208
Quecksilber	228	0,1775	0,2349	0,776
Zinn	273	0,1313	0,0905	1,451
Antimon	293	0,321	0,426	0,768
Wismut	293	1,38	1,09	1,27

Tabelle XVI

12,7 **Ausführung von Festigkeitsuntersuchungen** (*207*)

Bei der Ausführung von Festigkeitsuntersuchungen an Einkristallen, deren theoretische Deutung am weitesten fortgeschritten ist, muß auf die sorgfältige Einhaltung der Versuchsbedingungen in noch größerem Maße als bei polykristallinen Proben geachtet werden.

Die einzelnen Kristalle sollen bei der Zubereitung der Versuchsproben in ihren Eigenschaften nicht beeinflußt werden. Die Formgebung von Kristallen, die durch die im § 12,3 besprochene Rekristallisationsmethode gewonnen werden, muß vor dem Glühvorgang geschehen. Verbleibende kleine Kriställchen an der Oberfläche werden durch Abätzen beseitigt. Nachträgliches Bearbeiten durch Schleifen oder Polieren beeinflußt meistens die Oberflächeneigenschaften und ist daher zu vermeiden. Kristalle aus Legierungen, die durch langsames Erstarren gewonnen wurden, müssen, da sie noch nicht homogen sind, knapp unterhalb des Schmelzpunktes längere Zeit vorsichtig nachgeglüht werden.

Bei *Druckversuchen* müssen die gedrückten Ebenen sorgfältig poliert und mit zähem Fett eingeschmiert werden. Zur Aufnahme der Dehnungskurven können in zähen Kristallen Dehnungsmarken eingeritzt werden, spröde Kristalle sind vor jeglicher Verletzung der Oberfläche zu schützen.

Zugversuche bei höheren Temperaturen erfolgen in Wasser- oder Ölbädern und elektrischen Widerstandsöfen. Messungen bei tiefen Temperaturen (*309*) werden in Kältebädern (Azeton-feste Kohlensäure — 80° C, flüssige Luft — 190° C) durchgeführt. Außer den statischen homogenen Verformungen bietet die Wechselverformung die Möglichkeit, Aufschlüsse über den Mechanismus des Gleitens, der Bildung und Wanderung von Versetzungen zu bekommen. Solche Versuche sind von Held (*157*) beschrieben und gedeutet worden.

Neben der homogenen Verformung, die die Gesetze des reinen Gleitens zu beobachten gestattet, hat die Untersuchung der inhomogenen Verformung, also der Biegung und Torsion, den Zweck, das plastische Verhalten des vielkristallinen Materials zu erklären, da jedes Korn in einem polykristallinen Stoff als inhomogen verformter Einkristall angesehen werden kann. Die Biegungsversuche müssen dabei so vorgenommen werden, daß der Kristall nur auf reine Biegung beansprucht wird, also längs der Probe ein konstantes Biegemoment angreift. Nähere Einzelheiten sind von Held (*156*) angegeben.

§ 13 ZÄHIGKEIT

13,1 **Grundlagen** (*87, 245, 274*)

13,11 *Definition und Einheiten*

Als *Zähigkeit* oder *Viskosität* bezeichnet man den Widerstand, den flüssige und gasförmige Substanzen einer gleichförmigen Deformation durch Schubspannung entgegensetzen. Bei den Flüssigkeiten wird die Zähigkeit nach dem Newtonschen Reibungsgesetz definiert, dessen Voraussetzungen aus Abb. 200 erkenntlich sind.

Wirkt in der Fläche F die Schubkraft P mit der Geschwindigkeit u gegen die Grundfläche, wobei der Abstand von dieser s sein soll, so gilt

$$\frac{P}{F} = \tau = \eta \frac{d u}{d s}, \tag{13/1}$$

d. h. die Schubspannung τ ist bei vorgegebenem Geschwindigkeitsgefälle der Zähigkeit η proportional. Wird die Schubspannung in dyn/cm² und das Geschwindigkeitsgefälle in cm s^{-1}/cm = s^{-1} angegeben, so ergibt sich für die Zähigkeit die Dimension dyn s/cm². Die Einheit 1 dyn s/cm² wird 1 *Poise* (P) genannt (nach POISEUILLE). Den hundertsten Teil eines Poise nennt man *Centipoise* (cP). Im technischen Maßsystem bekommt die *dynamische Zähigkeit* η die Dimension kg s/m², wobei

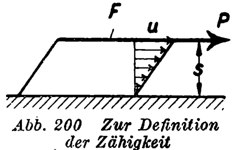


Abb. 200 Zur Definition der Zähigkeit

$$1\,\text{P} = \frac{1}{98{,}1}\,\text{kg s/m}^2$$

entspricht. Der Kehrwert der dynamischen Zähigkeit wird *Fluidität* genannt und meist mit dem Buchstaben φ bezeichnet.

Bei vielen Flüssigkeiten ist η eine Konstante, die nur vom äußeren Druck p und der Temperatur T, nicht aber vom Geschwindigkeitsgefälle abhängt.

Neben der nach Gleichung (13/1) definierten dynamischen Zähigkeit η ist der Begriff der kinematischen Zähigkeit ν in Gebrauch, der gegeben ist durch

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho}, \tag{13/2}$$

wenn wir mit ϱ die Stoffdichte bezeichnen. Die kinematische Zähigkeit ν bekommt im physikalischen Maßsystem die Dimension $\text{cm}^2\,\text{s}^{-1}$, im technischen Maßsystem $\text{m}^2\,\text{s}^{-1}$ bei einem Umrechnungsfaktor von 10^{-4}.

Bei vielen kolloidalen Lösungen ist die Voraussetzung entsprechend der Gleichung (13/1) nicht mehr gegeben und die gemessene Zähigkeit sowohl von der Schubspannung als auch vom Geschwindigkeitsgefälle stark abhängig.

13,12 *Zähigkeit von Gasen nach der kinetischen Gastheorie*

Nach der kinetischen Gastheorie wird die innere Reibung als Impulstransport durch die Wärmeenergie der Moleküle erklärt. Die Geschwindigkeit der Moleküle, die bekanntlich als vollkommen elastisch angesehen werden, verteilt sich nach MAXWELL um einen Mittelwert $\bar{c}$. Durch die sehr große Zahl von Zusammenstößen pro Sekunde findet ständig ein Austausch des Impulses und damit der Geschwindigkeit statt. Da die Summe der in der Sekunde ausgetauschten Impulse zwischen zwei benachbarten Schichten das Maß für die innere Reibung darstellt, hängt diese von der Zahl N im cm³, der Masse m der Moleküle und natürlich von der Stoßzahl bzw. der freien Weglänge ab. Bezeichnet man die mittlere freie Weglänge, d. h. die mittlere Flugstrecke zwischen zwei Zusammenstößen mit $\bar{\lambda}$, so liefert die kinetische Gastheorie die Beziehung

$$\tau = N\,m\,\frac{\bar{\lambda}\,\bar{c}}{3}\,\frac{d u}{d x}. \tag{13/3}$$

Da $N\,m = \varrho$, liefert der Vergleich mit (13/1)

$$\eta = \frac{1}{3}\,\varrho\,\bar{\lambda}\,\bar{c}. \tag{13/4}$$

Nennt man σ den Durchmesser eines Moleküles, so wird dessen „Stoßquerschnitt" $\pi\,\sigma^2$, woraus sich $\bar{\lambda}$ aus der Beziehung

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\,N\,\pi\,\sigma^2} \tag{13/5}$$

berechnen läßt. Setzt man (13/5) in die Gleichung (13/4) ein, so bekommt man für die Zähigkeit den Ausdruck

$$\eta = \frac{m\,\bar{c}}{3\sqrt{2}\,\pi\,\sigma^2}, \tag{13/6}$$

der nur von den speziellen Größen m und σ der Moleküle und deren thermischer Geschwindigkeit $\bar{c}$, aber nicht von der Dichte ϱ abhängt. Dieses bemerkenswerte Ergebnis ist bereits von MAXWELL geliefert worden und hat sich experimentell innerhalb gewisser Grenzen bestätigt. Für hohe Drucke, bei denen sich Abweichungen vom idealen Gasgesetz ergeben, sind solche auch für die Beziehung (13/6) zu erwarten. In Übereinstimmung damit ist bei Annäherung an das Verflüssigungsgebiet eine erhebliche Zunahme der Zähigkeit gefunden worden.

Beim Übergang zu *sehr niedrigen Drucken*, bei denen die Voraussetzung, daß die freie Weglänge sehr klein gegen die Gefäßabmessungen ist, nicht mehr erfüllt ist, ist für die innere Reibung eine von der Gleichung (13/6) abweichende Beziehung gültig, in der die Gefäßdimension auftritt. Bezeichnet man mit r den Halbmesser der Kapillare, durch die Gas unter sehr kleinem Druck strömen soll, so gilt die Beziehung

$$\eta = \frac{\sqrt{6\pi}}{64}\,\varrho\,\bar{c}\,r, \tag{13/7}$$

nach der die Zähigkeit sowohl der Dichte als auch der Rohrweite proportional wird (vgl. § 7,23).

Die *Temperaturabhängigkeit* der inneren Reibung ist aus der Gleichung (13/4) abzuleiten. Da nach den Vorstellungen der Gastheorie $\bar{c}^2$ mit der abs. Temperatur T zunimmt, müßte die Zähigkeit proportional mit $\sqrt{T}$ anwachsen. Dieses Ergebnis wird durch das Experiment nur unvollkommen bestätigt, da in der Ableitung die zwischen den Molekeln herrschenden Anziehungskräfte unberücksichtigt blieben. Die von SUTHERLAND unter Einbeziehung der Abstoßungskräfte abgeleitete Formel, wonach die Zähigkeit mit $\sqrt{T}\,(1 + C/T)^{-1}$ zunehmen soll, ist innerhalb weiter Grenzen in guter Übereinstimmung mit dem Experiment gefunden worden.

13,13 *Das HAGEN-POISEUILLEsche Gesetz*

Legt man für die Reibungskräfte das NEWTONsche Gesetz zugrunde und wendet man dieses auf die Parallelströmung in einem kreiszylindrischen Rohr an, so herrscht bei einem Druckunterschied $\varDelta\,p$ zwischen den Rohrenden und einer Rohrlänge l im Abstand r von der Rohrachse die Geschwindigkeit

$$u = \frac{a^2 - r^2}{4\,\eta}\cdot\frac{\varDelta\,p}{l}, \tag{13/8}$$

wenn mit a der Rohrradius bezeichnet wird. Das *Geschwindigkeitsprofil* ist also die in der Abb. 201 gezeigte Parabel, deren Scheitel in der Rohrachse liegt. Die an dieser Stelle herrschende *maximale* Geschwindigkeit $u_{\max}$ errechnet sich aus (13/8) mit $r = 0$ zu

$$u_{\max} = \frac{a^2}{4\eta} \frac{\Delta p}{l}. \qquad (13/8\,a)$$

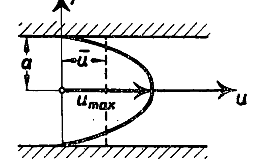


Abb. 201 Laminarströmung

Durch Integration der Gleichung (13/8) über den Rohrquerschnitt erhält man das sekundliche Durchflußvolumen zu

$$V = \int_0^a 2\pi r u \, dr = \frac{\pi a^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l}. \qquad (13/9)$$

Die *mittlere* Strömungsgeschwindigkeit $\bar{u}$ erhält man durch Division von V mit dem Rohrquerschnitt πa^2 zu

$$\bar{u} = \frac{a^2}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l}, \qquad (13/10)$$

woraus sich durch Vergleich der Beziehungen (13/8a) und (13/10)

$$u_{\max} = 2\,\bar{u}$$

ergibt. Bei der Ableitung dieses Gesetzes, das für die Bestimmung der Zähigkeit von grundlegender Bedeutung ist, ist allerdings stillschweigend vorausgesetzt worden, daß die Strömung durch das Rohr nicht nur stationär, sondern auch über die gesamte Rohrlänge konstant ist. Für genaue Messungen ist daher zu berücksichtigen, daß die Beschleunigung der Flüssigkeit am Einlauf der Kapillaren einen Energieaufwand erfordert und dort auch die Geschwindigkeitsverteilung von der parabolischen erheblich abweicht. Außerdem ist die am Ende der Kapillaren vorhandene kinetische Energie in Rechnung zu setzen. HAGENBACH (1860) hat diese Faktoren in Rechnung gesetzt und erhielt an Stelle der Beziehung (13/9) für die Zähigkeit den Ausdruck

$$\eta = \frac{\pi a^4}{8V} \cdot \frac{\Delta p}{l} - \frac{m \varrho V}{8\pi l}, \qquad (13/11)$$

worin V das in der Sekunde durchfließende Flüssigkeitsvolumen und m ein empirischer Wert ist, der experimentell zu 1,124 bestimmt wurde.

13,14 *Laminare und turbulente Strömung (308)*

Die durch das HAGEN-POISEUILLEsche Gesetz beschriebene Beziehung zwischen dem durchfließenden Volumen, der Zähigkeit und dem Rohrradius, deren Grundlage die von NEWTON angenommene Proportionalität zwischen Schubspannung und Geschwindigkeitsgefälle ist, gilt nur innerhalb gewisser Grenzen. Bei der Strömung von zähen Flüssigkeiten durch ein Rohr beobachtet man, daß die Beziehung (13/9) bei großen Geschwindigkeiten von einem anderen Gesetz abgelöst wird, nach dem der Druckabfall nicht mehr linear mit dem Durchflußvolumen anwächst, sondern etwa mit dessen zweiter Potenz zunimmt. Gleichzeitig wird aus der zuerst schlichten Strömung, bei der die Flüssigkeitsteilchen sich in zur Rohrachse parallelen Bahnen bewegen, eine *turbulente* mit unregelmäßig wirbelnden Mischbewegungen.

Nach O. REYNOLDS ist die Strömungsform eine Funktion der Geschwindigkeit, des Rohrdurchmessers und der kinematischen Zähigkeit. Aus hydrodynamischen Ähnlichkeitsbetrachtungen leitet sich diese Funktion als dimensionslose Größe ab, die *REYNOLDS-Zahl* genannt wird und die Form hat

$$Re = \frac{\overline{u}\, d\, \varrho}{\eta}. \tag{13/12}$$

u ist darin wieder die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und d der Rohrdurchmesser. Überschreitet die REYNOLDSsche Kennziffer Re einen bestimmten, zunächst durch das Experiment bestimmten Wert, so geht die laminare Strömungsform in die turbulente über, und es gelten damit andere Widerstandsgesetze. So erfolgt z. B. der „Umschlag" von laminarer in turbulente Strömung für ein Rohr, das mit scharfer Kante an ein Gefäß mit ebener Wand anschließt, bei der *kritischen* REYNOLDS-Zahl von etwa 2800, d. h. unterhalb $Re = 2800$, herrscht POISEUILLE-Verteilung, darüber ist der Strömungszustand turbulent. In neuerer Zeit gelang es MEISSNER und SCHUBERT (*241*) aus thermodynamischen Überlegungen die bislang nur experimentell bestimmbare kritische REYNOLDS-Zahl theoretisch abzuleiten.

Trotz der Unregelmäßigkeiten der turbulenten Bewegung bildet sich ein quasistationäres Profil der Strömungsgeschwindigkeit aus, das von dem der laminaren Strömung weitgehend verschieden ist, wie ein Blick auf die Abb. 202 zeigt. In Wandnähe wird ein sehr starker Geschwindigkeitsanstieg beobachtet, so daß die mittlere Geschwindigkeit sich nur wenig von der Maximalgeschwindigkeit in der Rohrachse unterscheidet. Allerdings lassen sich hierzu keine Festwerte angeben, da die Verteilung der Geschwindigkeit längs der Rohrachse und senkrecht dazu außer von der REYNOLDS-Zahl auch von der *Anlaufstrecke* und der Wandbeschaffenheit (glatt, rauh) abhängt.

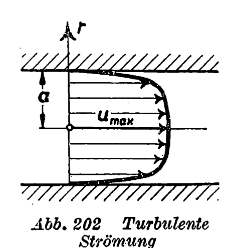


Abb. 202 Turbulente Strömung

Nach Gleichung (13/8) gilt für die parabolische Geschwindigkeitsverteilung bei laminarer Strömung senkrecht zur Rohrachse

$$u = 2\,\overline{u}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right],$$

wenn $\overline{u}$ wieder die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Rohr ist. Mit $V = \pi a^2 \overline{u}$ ergibt sich aus Gleichung (13/9) für den Druckabfall längs des Rohres die Beziehung

$$\Delta p = 8\,\eta\,\overline{u}\,\frac{l}{a^2}. \tag{13/13}$$

Andrerseits beschreibt man in der Hydrodynamik den Druckverlust in einem Rohr durch die sog. *Widerstandsziffer* λ entsprechend

$$\Delta p = \frac{\varrho}{2}\,\overline{u}^2 \cdot \frac{l}{2a}\,\lambda. \tag{13/14}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (13/13) und (13/12) erhält man also für die Laminarströmung die Widerstandsziffer

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \tag{13/15}$$

Nach umfangreichen experimentellen Untersuchungen verteilt sich in der turbulenten Strömung die Geschwindigkeit in einem Abstand von der Einströmöffnung, der größer als 10 a ist, nach der Beziehung

$$u = 1{,}19\,\bar{u}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{5}{4}}\right]^{\frac{1}{7}}, \tag{13/16}$$

woraus nach Blasius für Reynolds-Zahlen $> 3 \cdot 10^5$ sich die Widerstandsziffer zu

$$\lambda = 0{,}3164\left(\frac{1}{Re}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{13/17}$$

ergibt. Kennt man also aus Messungen die Widerstandsziffer, so läßt sich auch im Bereich der turbulenten Strömung bei bekannter Geschwindigkeit mittels Gleichung (13/12) die Zähigkeit bestimmen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß Widerstandsziffer

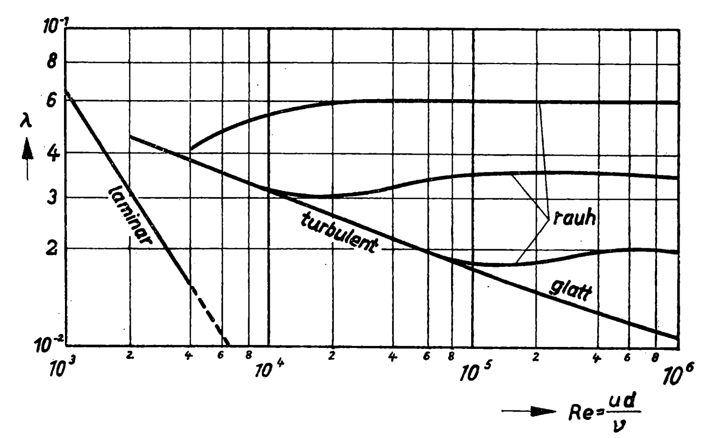


Abb. 203 Widerstandsziffer bei verschiedenen Re-Zahlen

und dementsprechend die Geschwindigkeitsverteilung außerordentlich stark von der relativen Wandrauhigkeit abhängen. Zum Beweis dafür sind in Abb. 203 die Widerstandsziffern langer Leitungen in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl für Laminarströmung und für verschiedene Rauhigkeiten für den turbulenten Zustand aufgetragen. Daraus ist zu ersehen, daß der Druckverlust eines Rohres bei Turbulenz bedeutend größer als in laminarer Strömung ist und daß Zähigkeiten nur bei außerordentlich glatter Rohrwand genügend genau gemessen werden können (*188*).

13,2 Kapillarviskosimeter (*66*, *244*)

13,21 *Allgemeines*

Wie die Bezeichnung bereits andeutet, wird bei diesem Verfahren die zu messende Flüssigkeit durch eine zylindrische Kapillare geleitet und nur mit relativ kleinen Druckdifferenzen gearbeitet. Die dabei sich einstellenden geringen Strömungsgeschwindigkeiten ergeben zusammen mit dem kleinen Rohrdurchmesser eine weit unter der kritischen liegende Reynolds-Zahl und erlauben die strenge Anwendung des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes. Bei den meisten Geräten wird die Druckdifferenz

durch die hydrostatische Druckhöhe $h\,\varrho$, die durch die Abmessungen des Apparates vorgegeben ist, gemessen. Für kleine Durchflußvolumina ist nach Gleichung (13/9) die Zähigkeit der Durchflußzeit für ein vorgegebenes Volumen proportional, für größere Strömungsgeschwindigkeiten ist die HAGENBACHsche Korrektur anzubringen und die Zähigkeit aus $\eta = A\,(t - B/t)$ zu berechnen.

13,22 *Viskosimeter nach OSTWALD*

Die am häufigsten verwendete Form des Kapillarviskosimeters stammt von W. OSTWALD und ist in Abb. 204 schematisch dargestellt.

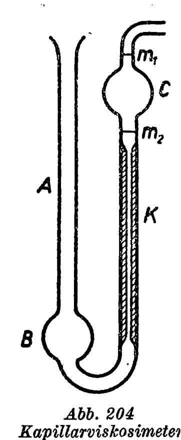


Abb. 204 Kapillarviskosimeter nach OSTWALD

Das aus Glas gefertigte Gerät hat die Form eines U-Rohres, dessen Schenkel K von einer Kapillaren gebildet wird. Durch den zweiten Schenkel A wird die zu untersuchende Flüssigkeit in die kugelförmige Erweiterung B an dessen unterem Ende gefüllt. Vor Beginn des Versuches wird diese in eine an die Kapillare angesetzte Erweiterung C hochgesaugt, deren Inhalt durch die Meßmarken m_1 und m_2 festgelegt ist. Die Flüssigkeit strömt unter ihrem eigenen Gewicht durch die Kapillare, wobei die Zeit gemessen wird, während der der Meniskus von der Marke m_1 bis zur Marke m_2 sinkt. Der wirksame Druckunterschied beträgt $\varrho\,h_m$, wenn h_m die mittlere Druckhöhe der Flüssigkeitssäule ist. Nach Gleichung (13/11) errechnet sich dann die gesuchte Viskosität aus der Beziehung

$$\eta = A\,\varrho\,t - B \cdot \frac{\varrho}{t}. \qquad (13/18)$$

Die Apparatekonstanten A und B können empirisch aus zwei Messungen mit zwei verschiedenen Flüssigkeiten bekannter Zähigkeit bestimmt werden. Ist die Kapillare relativ lang und von geringer lichter Weite, kann das zweite Glied in (13/18) auch vernachlässigt werden. Bei der Eichung ist zu beachten, daß dieselben Flüssigkeitsmengen wie bei der späteren Messung eingefüllt werden. Da die Zähigkeit außerordentlich stark von der Temperatur abhängig ist, wird bei genauen Messungen das Viskosimeter in ein Flüssigkeitsbad bekannter Temperatur gebracht.

13,23 *Kapillar-Viskosimeter für hohen Druck* (*46*)

Zur Untersuchung der Zähigkeit von Quecksilber bei sehr hohen Drucken benutzte BRIDGMAN das in der Abb. 205 schematisch dargestellte Viskosimeter. Dieses besteht aus einer Kapillare K und zwei offenen Gefäßen A und B aus Kupfer, die etwa zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt sind. Zur Druckübertragung befand sich das Viskosimeter in einem mit Petroläther gefüllten Piezometer, das gleichzeitig als Temperaturbad diente und bis zu 12000 at Druck einzustellen erlaubte. Durch Neigen des Apparates wurde eine definierte Druckdifferenz hervorgerufen, unter deren Wirkung das Quecksilber durch die Kapillare strömte. Zwei elektrische Schaltkontakte S_1 und S_2 wurden dadurch abwechselnd durch die Quecksilberoberflächen geöffnet und geschlossen und ermöglichten eine sehr genaue Zeitmessung. Aus der

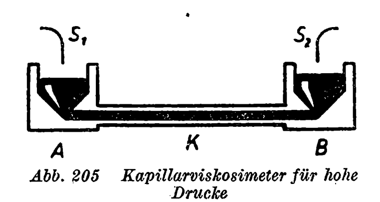


Abb. 205 Kapillarviskosimeter für hohe Drucke

verflossenen Zeitdifferenz und der bekannten Durchflußmenge konnte bei Kenntnis der Apparatekonstanten die Zähigkeit bestimmt werden.

13,24 *Viskosimeter nach Ubbelohde*

Das von Ubbelohde (*354*) angegebene Glasviskosimeter (Abb. 206) besitzt gegen das Ostwaldsche einige Vorzüge und erreicht im allgemeinen eine Meßgenauigkeit von 0,1%. Es unterscheidet sich von diesem durch die am unteren Ende der Kapillaren K angesetzte kleine, kugelförmige Erweiterung C, an die ein drittes Rohr D angeschmolzen ist. Das zunächst in B eingefüllte Flüssigkeitsvolumen wird durch einen in A erzeugten Unterdruck vollständig hochgesaugt, wobei der Rohransatz D verschlossen wird. Gibt man dessen Öffnung nun frei, so bildet sich an der Austrittsstelle der Kapillaren in C ein von der Oberflächenspannung und Fließgeschwindigkeit unabhängiges „hängendes" Niveau. Dadurch ist die mittlere Druckhöhe genau angebbar und die Durchlaufzeit wird unabhängig von der Füllmenge. Der Apparat wird mit drei verschiedenen Kapillaren mit den Konstanten 0,01, 0,1 und 1 hergestellt; die kinematische Zähigkeit erhält man ohne Rechenarbeit durch Multiplizieren der gemessenen Durchlaufzeit mit der jeweiligen Apparatekonstanten.

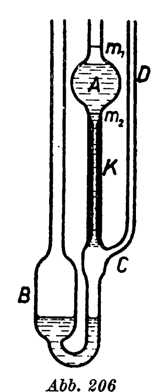


Abb. 206 Viskosimeter nach Ubbelohde

13,25 *Kapillar-Viskosimeter nach Couette*

Für Präzisionsbestimmungen der Zähigkeit und deren Temperaturabhängigkeit ist die Berücksichtigung der Hagenbachschen Korrektur nicht immer ausreichend und auch möglich, da diese die Kenntnis der Dichte voraussetzt. Sie läßt sich nach Überlegungen von Couette (1890) vermeiden, wenn man dieselbe Flüssigkeitsmenge nacheinander durch zwei verschieden lange, aber gleich weite Kapillaren strömen läßt. In diesem Fall sind nämlich die durch Beschleunigung und Reibungszuwachs innerhalb der Anlaufstrecken verursachten Energieverluste für jede Kapillare gleich und brauchen bei der Auswertung nicht berücksichtigt zu werden.

Man bedient sich dabei der in der Abb. 207 vereinfacht dargestellten Anordnung. Aus dem Vorratsgefäß A, das unter einem sehr genau gleichbleibenden äußeren Druck steht, strömt die zu untersuchende Flüssigkeit durch die beiden Kapillaren K_1 und K_2 verschiedener Länge l_1 und l_2, deren Halbmesser $r_1 = r_2$ sein sollen. An die kugelförmigen Erweiterungen B, C und D, zwischen denen die Kapillaren durch Schliffe eingesetzt sind, wurden die Manometerröhren B′, C′ und D′ angesetzt. Wegen des Druckabfalles in den Kapillaren steht in diesen die Flüssigkeit verschieden hoch; die Menisken werden mit einem Kathetometer abgelesen. Der ganze Apparat

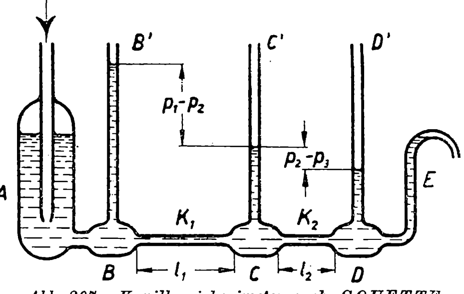


Abb. 207 Kapillarviskosimeter nach Couette

befindet sich in einem heizbaren, nach außen isolierten Flüssigkeitsbad, dessen Temperatur auf $\pm$ 0,02° C konstant gehalten werden kann. Durch den Wegfall der HAGENBACHschen Korrektur ergibt sich für die Berechnung der Zähigkeit folgende einfache Beziehung:

$$\eta = \frac{\pi t}{8V} \cdot \frac{r_1^4 (p_1 - p_2) - r_2^4 (p_2 - p_3)}{l_1 - l_2}. \tag{13/19}$$

Darin ist V das in der Zeit t durchgelaufene, bei E aufgefangene Flüssigkeitsvolumen und $p_1 - p_2$ bzw. $p_2 - p_3$ die gemessenen Druckunterschiede. Für vollkommen gleichweite Kapillaren ($r_1 = r_2$) vereinfacht sich die Gleichung (13/19) zu

$$\eta = \frac{\pi t}{8V} \frac{r^4 (p_1 - 2p_2 + p_3)}{l_1 - l_2}. \tag{13/19a}$$

Der Einfluß der Oberflächenspannung auf die Meßergebnisse des Kapillarviskosimeters wurde von DRUCKER (*70*) eingehend untersucht.

13,26 *Kapillar-Viskosimeter für Gase*

Die Gasviskosimeter gleichen im wesentlichen den in den vorigen Paragraphen besprochenen Geräten, nur mit dem Unterschied, daß wegen der kleinen Zähigkeit der Gase die Kapillare außerordentlich dünn und von großer Länge sein muß, um zu genauen Resultaten zu gelangen.

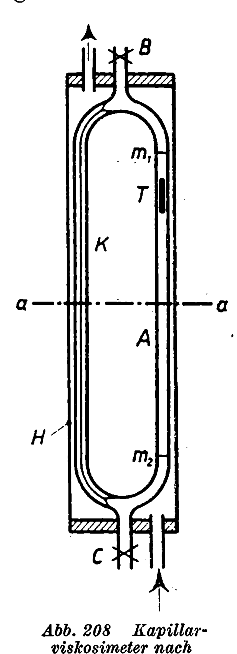


Abb. 208 Kapillarviskosimeter nach RANKINE

Eine besonders einfache Anordnung wurde von RANKINE (*286*) angegeben und ist in Abb. 208 dargestellt. Die Kapillare K bildet mit der Glasröhre A von größerer Weite eine geschlossene Strecke, die durch die absperrbaren Zuleitungen B und C mit dem zu untersuchenden Gas gefüllt werden kann. Ein in A fallender Quecksilbertropfen T drückt das Gas unter seinem Eigengewicht, also mit konstantem Druck, durch die Kapillare. Seine Fallzeit wird zwischen den Durchgängen an den Marken m_1 und m_2 am Rohr A gemessen. Der ganze Apparat ist von einem weiten Rohr H umgeben, das von Flüssigkeiten oder Dämpfen bekannter und gleichbleibender Temperatur durchströmt wird. Zur Wiederholung des Versuches läßt sich die Anordnung um eine waagerechte Achse a–a schwenken. Unter Zugrundelegung des HAGEN-POISEUILLEschen Gesetzes erhält man für die Zähigkeit folgende Beziehung

$$\eta = \frac{\pi r^4 b g}{8 l V F} \cdot t \left(1 + 4\frac{\zeta}{r}\right), \tag{13/20}$$

wobei F der Querschnitt des Fallrohres A, V das durch Kalibrieren festgestellte Volumen zwischen den Marken m_1 und m_2, l die Länge der Kapillaren, g die Erdbeschleunigung und b eine Apparatkonstante, die das Gewicht des Quecksilbertropfens enthält, sind. Der Faktor $1 + \frac{4\zeta}{r}$, worin ζ der Gleitungskoeffizient ist, berücksichtigt die Gleitung des Gases an der Kapillarwand. ζ ist mit guter Näherung der mittleren freien Weglänge des Gases bei dem herrschenden Druck in K gleichzusetzen.

13,3 Rotationsviskosimeter

13,31 *Grundlagen*

Die Viskosimeter mit drehender Bewegung bestehen aus einem beweglichen Teil, der entweder eine gleichförmige Drehbewegung oder eine Drehschwingung um eine feste Achse ausführt, und dem feststehenden Gehäuse. Die zu untersuchende Flüssigkeit befindet sich zwischen rotierendem und festem Teil und besitzt in beiden Grenzschichten die Geschwindigkeit der Begrenzungswand. Durch die innere Reibung wird die Bewegung auf die benachbarten Schichten übertragen, so daß im Gleichgewichtszustand ständig kinetische Energie in Richtung des feststehenden Teiles wandert. Bei solchen Messungen wird die Zähigkeit entweder aus der Abnahme der Schwingungsenergie des Drehteils oder aus dem auf den feststehenden Teil übertragenen Drehmoment bestimmt.

Dieses Meßprinzip eignet sich vor allem zur Messung der inneren Reibung von Gasen, da bei konstantem Druck gearbeitet werden kann, was z. B. bei den Kapillarviskosimetern nicht möglich ist. Außerdem gestatten spezielle Anordnungen durch Umrechnen des auf den feststehenden Apparateteil übertragenen Drehmomentes eine unmittelbare Anzeige der Zähigkeit.

13,32 *Viskosimeter mit Drehschwingungen*

Das ursprünglich von COULOMB (1800) vorgeschlagene Verfahren zur Messung der Zähigkeit von Gasen benutzt für deren Maß die Dämpfung von Drehschwingungen einer zwischen zwei festen Platten schwingenden Kreisscheibe. Eine strenge mathematische Durchrechnung des Problems mit endlichem Scheibendurchmesser ist nicht möglich, weshalb bei der Auswertung empirisch zu bestimmende Korrekturen zu berücksichtigen sind.

In der Abb. 209 ist das von VOGEL (*358*) angegebene und zur Messung von Gaszähigkeiten bei sehr tiefen Temperaturen verwendete Schwingungsviskosimeter dargestellt. In dem Glasgefäß A sind in genau bekanntem und konstantem Abstand von einigen Millimetern zwei durchbohrte Kreisscheiben P_1 und P_2 befestigt. Zwischen diesen Scheiben kann die kreisförmige Scheibe C aus Glas von etwa 40 mm Durchmesser, die an einem dünnen Platindraht F aufgehängt ist, Drehschwingungen ausführen. Zwischen dem Torsionsfaden und der Platte C befindet sich als Achse D ein stärkerer Draht, an dem der Beobachtungsspiegel S und zwei kleine Magneten m_1 und m_2 astatisch aufgekittet sind, um die Drehschwingungen von außen einleiten zu können. Bei den Messungen bei tiefen Temperaturen befindet sich A in einem Bad von flüssiger Luft bzw. Wasserstoff, während das Rohr R und damit auch der Torsionsfaden F etwa Zimmertemperatur besitzen. Dadurch ist die Gewähr dafür gegeben, daß sich der Torsionsmodul des Platinfadens nicht merklich ändert.

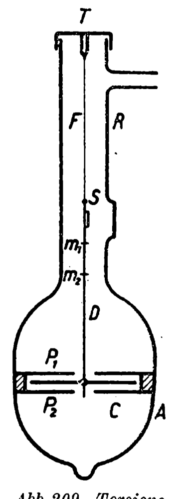


Abb. 209 Torsionsviskosimeter nach VOGEL

Durch Beobachtung der Umkehrpunkte wird das Verhältnis der Amplituden $k = a_1/a_3 = a_3/a_5 \ldots$ bestimmt, dessen Logarithmus $\log k = \lambda$ das logarithmische Dekrement der Schwingung wird. Die gesuchte Zähigkeit des Gases erhält man aus

$$\eta = \frac{\lambda - \lambda'}{\tau \cdot C \cdot (1 + c)}. \qquad (13/21)$$

Hierin ist τ die Dauer der ganzen Schwingung, C eine Apparatekonstante, λ' das von der Reibung der Aufhängung (Spiegel, Magnetchen, innere Reibung des Drahtes) herrührende logarithmische Dekrement und c eine von MAXWELL eingeführte Korrekturgröße. Durch Eichmessungen in trockener Luft bei 0° C, für die sich die Werte λ_0 und λ_0' ergeben mögen, wird die Messung der gesuchten Zähigkeit auf eine Verhältnismessung entsprechend

$$\eta = \eta_0 \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda_0 - \lambda_0'} \tag{13/22}$$

zurückgeführt. Dieses Verfahren eignet sich auch zur Untersuchung von Gasen bei sehr kleinem Druck. Auch zur Bestimmung der Zähigkeit von Schmelzen ist die schwingende Scheibe gut geeignet, da sie besser als eine Kapillare aus hitzebeständigem Material, wie Porzellan, Kohle oder Quarz, angefertigt werden kann.

An Stelle der schwingenden Scheibe wurden auch Kugeln oder Hohlzylinder verwendet, deren mathematische Behandlung leichter durchzuführen ist.

13,33 *Viskosimeter mit gleichbleibender Drehrichtung*

Bei diesen Geräten befindet sich die Versuchsflüssigkeit zwischen zwei koaxialen Zylinderflächen, von denen die eine sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht und durch innere Reibung ein Moment auf die feststehende Zylinderfläche überträgt.

Bezeichnen wir mit r_i und r_a die Radien der beiden Zylinder, mit ω die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Zylinders, mit h die Länge des völlig eingetauchten festen Zylinders und mit M das auf diesen übertragene Drehmoment, so gilt nach COUETTE

$$\eta = \frac{M}{4\pi h \cdot \omega}\left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_a^2}\right), \tag{13/23}$$

woraus ersichtlich ist, daß bei konstanter Zähigkeit das übertragene Drehmoment der Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Teiles proportional ist. Gleichung (13/23) gilt allerdings nur, solange die Strömung zwischen den Zylindern laminar ist. Der Umschlag zur Turbulenz wurde bei einer REYNOLDS-Zahl von $Re = \omega r_a \cdot (r_a - r_i)\,\varrho/\eta = 2124$ gefunden, wenn r_a der Halbmesser des rotierenden Zylinders ist.

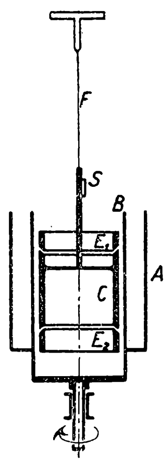


Abb. 210 Rotationsviskosimeter nach HATSCHEK

Dieses Prinzip ist von vielen Forschern zur Konstruktion von Viskosimetern verwendet worden; eine Anordnung von HATSCHEK (*151*) ist in Abb. 210 angedeutet. Der rotierende Zylinder B ist von einem zweiten A konzentrisch umgeben, um die zu untersuchende Flüssigkeit auf einer definierten und konstanten Temperatur zu halten. In geringem Abstand von B ist der an einem Torsionsfaden F aufgehängte feste Teil C angeordnet, dessen durch die Schubspannungen ausgeübtes Drehmoment am Spiegel S gemessen wird. Um die störenden Randeffekte zu eliminieren, sind noch zwei kürzere in geringem Abstand von C angebrachte Zylinder E_1 und E_2 vorgesehen, die feststehen. Bei gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit von B wird C und damit der Aufhängedraht F so lange tordiert, bis dessen Drehmoment gleich der von B aufgenommenen Schubkraft ist. Die gesuchte Zähigkeit läßt sich dann nach der Beziehung

$$\eta = k \cdot \frac{\varphi}{\omega} \tag{13/24}$$

berechnen, wenn k eine Apparatekonstante und φ der am Spiegel festgestellte Verdrehungswinkel ist. Die meisten Flüssigkeiten und Lösungen gehorchen der Gleichung (13/24) und besitzen daher eine Zähigkeit, die von der Relativgeschwindigkeit zwischen den Zylindern unabhängig ist. Das gilt allerdings nicht mehr bei den lyophilen Kolloiden, die daher mit einer bestimmten Relativgeschwindigkeit untersucht werden müssen.

13,4 Fallkörperviskosimeter

13,41 *Das STOKESsche Gesetz*

Infolge des Fortfalls von Trägheitskräften eignet sich der Vorgang eines in einer zähen Flüssigkeit fallenden Körpers innerhalb gewisser Grenzen ebenfalls zur Zähigkeitsmessung. Dabei halten sich nur die am fallenden Körper angreifenden Reibungskräfte und das Druckgefälle bzw. das Gewicht des Fallkörpers das Gleichgewicht. Für einige einfache Körperformen läßt sich die Bewegung in der zähen Flüssigkeit streng lösen; am bekanntesten ist die von STOKES (1850) angegebene Beziehung für die Bewegung einer Kugel vom Radius a in einer Flüssigkeit mit der Zähigkeit η. Bei einer Relativgeschwindigkeit v ergibt sich ein Widerstand von

$$W = 6\,\eta\,\pi\,v\,a. \tag{13/25}$$

Diese Beziehung gilt allerdings nur für sehr kleine Geschwindigkeiten und entsprechende REYNOLDS-Zahlen, die kleiner als 1 sind. Für den Fall einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit hält der Widerstand W dem Kugelgewicht, vermindert um seinen Auftrieb, das Gleichgewicht. Es gilt daher

$$6\,\pi\,\eta\,v\,a = \frac{4\,\pi}{3}\,a^3\,g\,(\varrho_1 - \varrho_2), \qquad (g = \text{Erdbeschleunigung})$$

wenn ϱ_1 und ϱ_2 die Dichten des Fallkörpers bzw. der Flüssigkeit sind. Daraus ergibt sich die Fallgeschwindigkeit zu

$$v = \frac{2}{9}\,\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\eta}\,g\,a^2. \tag{13/26}$$

Von dieser Beziehung wird sowohl bei Gasen als auch bei zähen Flüssigkeiten Gebrauch gemacht.

13,42 *Fallkörperviskosimeter (215, 283)*

Die von STOKES angegebene Beziehung (13/26) gilt allerdings nur für den Fall in einem sehr großen Flüssigkeitsvolumen, dessen Begrenzung keinen Einfluß auf die Umströmung der Fallkugel ausüben darf. Meist wird die Geschwindigkeit durch die Fallzeit t für eine markierte Meßstrecke der Länge s gemessen. Für die Zähigkeit ergibt sich damit:

$$\eta = \frac{2}{9}\cdot g\,(\varrho_1 - \varrho_2)\,\frac{a^2\,t}{s}\,. \tag{13/27}$$

Mit Ausnahme des im § 13,43 näher erläuterten Beispieles ist die unendliche Ausdehnung des Flüssigkeitsvolumens nur angenähert zu verwirklichen. In den meisten Fällen muß mit einem endlichen Durchmesser und einer begrenzten Höhe der Fall-

strecke gerechnet werden. Der Einfluß dieser Korrekturen wird nach FRANCIS (*99*) in folgender Beziehung berücksichtigt:

$$\eta = \frac{2}{9}\, g\, (\varrho_1 - \varrho_2)\, \frac{t\, a^2}{s} \left(1 - \frac{a}{R}\right)^{\frac{9}{4}} \left(1 + 3{,}3\, \frac{a}{h}\right). \tag{13/28}$$

Darin bedeuten R den Radius der zylindrischen Fallstrecke und h den Abstand des Anfanges der Fallstrecke vom Rohrboden. Aus der Gleichung ist ersichtlich, daß für zähe Flüssigkeiten und dementsprechend kleine Werte von a/R und a/h die Korrekturen nur gering sind. Um theoretisch gut gesicherte Absolutwerte von η zu erhalten, muß man also Flüssigkeiten mit verschiedener Zähigkeit mit möglichst kleinen Kugeln bestimmen. Der größte noch tragbare Durchmesser beträgt für $\eta = 10$ P etwa 2 mm und für $\eta = 300$ P etwa 8 mm.

Eine für technische Messungen vollkommen ausreichende Genauigkeit und auch für physikalische Untersuchungen vielseitige Verwendbarkeit besitzt das von HÖPPLER (*168*) angegebene Viskosimeter, das schematisch in Abb. 211 dargestellt ist. Das mit großer Präzision hergestellte Fallrohr A aus Glas wird von einem zweiten, weiteren Glasrohr G umgeben, durch das ein Flüssigkeitsstrom von sehr konstanter Temperatur aus einem Thermostaten geleitet werden kann. Um einen reproduzierbaren Fallvorgang zu erhalten, ist das Fallrohr um 5 bis 10° gegen die Vertikale geneigt. Da der Radius der Fallkugel K nur wenig kleiner als der des Rohres ist, läßt sich die Gleichung (13/27) nicht mehr anwenden, denn der Reibungswiderstand, den die Kugel erfährt, ist im wesentlichen durch die Strömung im Spalt zwischen Kugel und Rohr bedingt. Es gilt jedoch eine empirisch festgestellte Beziehung der Art

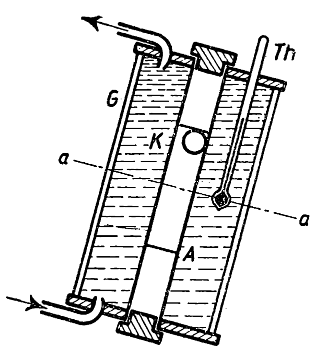


Abb. 211 Fallkörperviskosimeter nach HÖPPLER

$$\eta = K\, (\varrho_1 - \varrho_2)\, t,$$

worin K eine Apparatekonstante ist, die ebenfalls die Fallhöhe enthält. Durch Verwendung mehrerer Kugeln lassen sich Viskositäten zwischen 0,5 cP und 4000 P bestimmen. Wegen der großen Abhängigkeit der Zähigkeit von der Temperatur muß man, um die erreichbare Genauigkeit von 0,5% wirklich auszunutzen, durch Verwendung eines Thermostaten die Flüssigkeitsprobe auf etwa 0,01° C konstant halten. Man arbeitet meistens in einem Bereich von — 35 bis + 150° C und mit Fallzeiten zwischen 30 und 150 s.

Für spezielle Untersuchungen wird auch ein dem HÖPPLER-Viskosimeter ähnliches Gerät verwendet, bei dem die Fallkugel durch eine am unteren Ende der Röhre eintretende Luftblase ersetzt wird, die durch ihren Auftrieb in der Flüssigkeit nach oben steigt.

13,43 *Freier Fall von Tröpfchen*

In einigen Fällen läßt sich auch der Zusammenhang zwischen Fallgeschwindigkeit, Tröpfchengewicht und Zähigkeit, wie er durch die Beziehung (13/26) dargestellt wird, zur Bestimmung der Viskosität von Gasen benutzen. Zu diesem Zweck werden mittels eines Zerstäubers sehr kleine Flüssigkeitströpfchen erzeugt, deren Durchmesser unter dem Mikroskop bestimmt werden. Die Fallgeschwindigkeit wird mit einem mitgeführten Mikroskop gemessen. Allerdings bedarf es wegen der meist kleinen Tröpfchendurchmesser (10^{-4} cm) einer Korrektur, da das STOKESsche Gesetz für ein konti-

nuierliches Medium abgeleitet wurde, in diesem Fall die freie Weglänge der Gasmoleküle jedoch von derselben Größenordnung ist.

Nach CUNNINGHAM ist das STOKESsche Widerstandsgesetz durch einen Korrekturfaktor, der die freie Weglänge λ enthält, zu ergänzen; man erhält

$$W = 6\pi\eta\, a\, v\left(1 + K\frac{\lambda}{a}\right)^{-1}, \qquad (13/29)$$

worin die Konstante K den Wert 0,86 besitzt. Das bedeutet, daß mit abnehmendem Druck, also wachsendem λ, eine etwas geringere Zähigkeit gemessen wird.

Im allgemeinen richtet sich bei diesem Versuch die Frage nach dem Tröpfchendurchmesser, der wegen der quadratischen Abhängigkeit von der Fallgeschwindigkeit mit großer Genauigkeit bei bekannter Zähigkeit der Luft und der Tröpfchendichte bestimmt werden kann. Von diesem Verfahren wird Gebrauch gemacht, wenn etwa der Vorgang der Verdunstung oder der Kondensation von Wasserdampf an kleinen Wassertröpfchen studiert werden soll.

Die bekannteste Anwendung hat dieses Verfahren bei der Bestimmung der Elementarladung durch MILLIKAN (1910) gefunden.

13,5 Einige Zahlenwerte

Um bei der Auswahl der jeweiligen Meßverfahren einen Anhalt über die ungefähre Größe der zu erwartenden Zähigkeit zu bekommen, werden im folgenden die Zahlenwerte für einige Gase und Flüssigkeiten zusammengestellt.

Nach der im § 13,12 erwähnten Formel von SUTHERLAND gilt für die Zähigkeit von Gasen mit guter Näherung die Beziehung

$$\mu = \mu_0 \sqrt{T/T_0}\,\frac{1 + C/T_0}{1 + C/T} = B\,\frac{\sqrt{T}}{1 + C/T},$$

worin μ_0 die Zähigkeit bei der Temperatur T und B und C Konstante sind. In der Tabelle XVII ist die Zähigkeit einiger Gase und Dämpfe mit den SUTHERLANDschen Konstanten zusammengestellt.

Gas	t	$\eta \cdot 10^7$	$B \cdot 10^7$	C
Azetylen	20°	1020	99,8	198,2
Ammoniak	20	982	180,1	626
Argon	16	2204	193,5	142
Chlorwasserstoff	0	1332	186,5	360
Helium	0	1876	145,9	78,2
Jod	106	1785	219,1	568
Kohlendioxyd	0	1366	165,5	274
Krypton	16	2459	238,8	188
Luft	0	1720	150,3	123
Neon	14	3080	536	56
Quecksilber	218	4709	620	942
Sauerstoff	0	1920	174,7	138
Stickstoff	0	1665	137,8	103
Wasserdampf	100	1255	182,3	673
Wasserstoff	0	850	67,1	83
Xenon	15	2222	247	252

Tabelle XVII [aus (87)]

In der Tabelle XVIII ist die Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit für einige Flüssigkeiten, in Tabelle XIX für eine bestimmte Glassorte (75 % SiO_2; 22,1 % Na_2O; 2,5 % MgO) gegeben. Die relative Änderung der Zähigkeit von Wasser mit dem Druck bei verschiedenen Temperaturen nach Messungen von BRIDGMAN ist aus der Tabelle XX zu entnehmen.

Temperatur	0	20	40	60	80	100° C
Hexan	0,402	0,324	0,269	0,229	—	—
Chloroform	0,701	0,566	0,471	0,401	—	—
Toluol	0,765	0,581	0,468	0,385	0,323	0,272
Benzol	0,900	0,640	0,490	0,388	0,319	0,263
Äthylalkohol	1,77	1,20	0,830	0,591	0,435	0,325
Anilin	10,2	4,40	2,37	1,51	1,09	0,825
Glyzerin	5400	1200	330	100	33	—
Quecksilber	1,685	1,554	1,450	1,367	1,298	1,240

Tabelle XVIII (η in cP)

Temp. °C	log η	Temp. °C	log η
500	12,44	806	5,67
550	10,76	885	4,65
600	9,40	970	4,00
653	8,24	1090	3,25
690	7,57	1197	2,74
750	6,50	1300	2,24

Tabelle XIX. Zähigkeit von Glas (nach ENGLISH)

Temp. °C Druck (at)	0°	10,3°	30°	75°
1	1,000	0,779	0,488	0,222
500	0,938	0,755	0,500	0,230
1000	0,921	0,743	0,514	0,239
2000	0,957	0,754	0,550	0,258
4000	1,111	0,842	0,658	0,302
6000	1,347	0,981	0,786	0,367
8000		1,152	0,923	0,445
10000			1,058	

Tabelle XX. Rel. Zähigkeit von Wasser (nach BRIDGMAN)

§ 14 MESSUNG DER OBERFLÄCHENSPANNUNG

14,1 Definition und Einheiten

Die genauere Betrachtung eines durch eine freie Oberfläche begrenzten Flüssigkeitsvolumens zeigt, daß neben den großen Abstoßungskräften der Moleküle, die diese als harte, undurchdringliche Kugeln in der Modellvorstellung erscheinen lassen und sich in der Inkompressibilität einer Flüssigkeit zeigen, auch Anziehungskräfte bestehen

müssen. Diese intermolekularen Kräfte erweisen sich als mit r^{-6} abnehmend, sind also sehr kurzreichweitig. Im Innern einer Flüssigkeit heben sich diese Kräfte auf, da sie gleichmäßig nach allen Richtungen verteilt sind, nicht aber an der Flüssigkeitsoberfläche. Sie setzen sich hier zu einer Resultierenden zusammen, die die Richtung der Flächennormalen hat. Diese Kraft läßt sich ersetzt denken durch eine in der Flüssigkeitsoberfläche überall gleich große, tangential wirkende *Oberflächenspannung* $\varkappa$, die die Flüssigkeit gewissermaßen wie ein undurchdringliches, elastisches Häutchen bedeckt und deren Zugspannung eine individuelle, von der Gestalt der Oberfläche unabhängige Konstante ist. Wegen des großen Einflusses der Oberflächenspannung auf die Gestalt der Menisken in dünnen Kapillaren wird diese Zugspannung auch *Kapillarkonstante* genannt. Ihre Dimension wird damit dyn/cm oder, da man der Oberfläche eine gewisse potentielle Energie beimessen kann, die freie Oberflächenenergie genannt wird, erg/cm². Die gesamte Energie wird also

$$E = \varkappa F, \tag{14/1}$$

wenn F die Größe der Oberfläche ist. Für kleine Änderungen δF der Oberfläche bei festem Rand folgt aus $\delta E = \varkappa\, \delta F$, daß im Gleichgewicht $\delta F = 0$ werden muß, d.h. die Flüssigkeit bildet eine Fläche kleinsten Inhalts, eine sog. Minimalfläche.

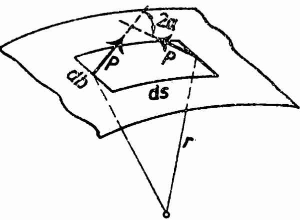


Abb. 212 Krümmungsdruck

Ist die Oberfläche nicht eben, sondern gekrümmt, so bewirkt die Oberflächenspannung eine resultierende Kraft, die einem zusätzlichen Flüssigkeitsdruck entspricht. Um diesen zusätzlichen Krümmungsdruck zu berechnen, soll ein Teil einer zunächst zylindrischen Flüssigkeitsoberfläche entsprechend Abb. 212 betrachtet werden. Denken wir uns senkrecht zur Erzeugenden dieser Fläche einen schmalen Streifen von der Breite db und der Länge ds herausgeschnitten, so greift an dessen Schmalseite je eine Kraft $P = \varkappa \cdot d\,b$ tangential an. Die beiden Kapillarkräfte lassen sich zu einer senkrecht auf der Oberfläche stehenden resultierenden Kraft P_r zusammenfassen, für die gilt:

$$P_r = 2\,\varkappa\, db \sin\alpha, \tag{14/2}$$

wenn α der halbe Winkel zwischen den beiden Kräften P ist. Da für kleine Winkel $\sin\alpha \approx \frac{1}{2}\frac{ds}{r}$ gesetzt werden darf, wird

$$P_r = \varkappa\, db \frac{ds}{r}. \tag{14/3}$$

Nach Division durch die in Betracht kommenden Fläche $ds \cdot db$ erhält man schließlich den gesuchten Normaldruck der Oberflächenspannung

$$p = \frac{\varkappa}{r}. \tag{14/4}$$

Für doppelt gekrümmte Flächen, deren Krümmungsradien r_1 und r_2 betragen, erhält man an Stelle von Gleichung (14/4) die zuerst von LAPLACE abgeleitete Beziehung

$$p = \varkappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \tag{14/5}$$

Der Einfluß des Krümmungshalbmessers äußert sich z. B. merklich in der Abhängigkeit des Dampfdruckes bei kleinen Tröpfchen. Da nach Gleichung (14/5) zum Dampfdruck noch der Kapillardruck $2\,\varkappa/r$ zu addieren ist, wird der Dampfdruck in Tröpfchen mit abnehmender Größe anwachsen.

14,2 Randwinkel

Neben der Wirkung der Oberflächenspannung an der Grenzfläche von Flüssigkeit und Dampf bzw. Luft ist eine solche auch dann vorhanden, wenn eine Flüssigkeit an einen festen Körper, z. B. eine Gefäßwand, grenzt. Auch die Moleküle im Festkörper üben Attraktionskräfte auf die Flüssigkeitsteilchen aus, deren Gesamtheit sich in zwei Komponenten zerlegen läßt, die senkrecht zur Begrenzungswand und parallel zu dieser verlaufen. Betrachtet man den in Abb. 213 dargestellten allgemeinen Fall, so wirken die beiden Tangentialkomponenten $\varkappa_{gf}$ und $\varkappa_{fl}$ in verschiedener Richtung, während die Normalkräfte weggelassen wurden, da sie ohne Einfluß auf die Oberflächengestalt der Flüssigkeit sind. Die dritte, von der Oberflächenspannung $\varkappa_{lg}$ herrührende Kraft, die an dem in unmittelbarer Wandnähe befindlichen Molekül A angreift, hat die Richtung der Tangente an die Flüssigkeitsoberfläche im Punkte A. Nennt man den Winkel zwischen $\varkappa_{lg}$ und der Wand φ, den *Randwinkel*, so muß für A die Gleichgewichtsbedingung

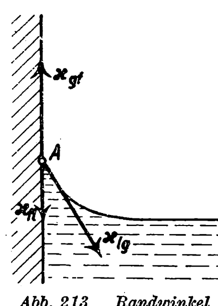


Abb. 213 Randwinkel

$$\varkappa_{fl} + \varkappa_{lg} \cos\varphi = \varkappa_{gf}$$

gelten, woraus sich der Winkel φ zu

$$\cos\varphi = \frac{\varkappa_{gf} - \varkappa_{fl}}{\varkappa_{lg}} \qquad (14/6)$$

berechnen läßt. Daraus ist ersichtlich, daß sich für $|\varkappa_{gf} - \varkappa_{fl}| < \varkappa_{lg}$ ein spitzer Randwinkel ergibt, wenn $\varkappa_{gf} > \varkappa_{fl}$ ist, wie das beispielsweise in der Abb. 213 gilt. Im anderen Fall wird sich die Flüssigkeitsoberfläche konvex gegen die Wand krümmen. Man spricht von einer benetzenden Flüssigkeit, wenn $\varphi < \pi/2$ ist, bei $\varphi = 0$ hat man es mit einer vollkommen benetzenden Flüssigkeit zu tun. Randwinkel und Oberflächenspannung bestimmen bei vorgegebener Berandung vollkommen die Gestalt der Flüssigkeitsoberfläche.

14,3 Messung der Oberflächenspannung an Menisken

14,31 *Steighöhenmethode*

Für die Messung der Oberflächenspannung taucht man eine kreiszylindrische, genau ausgemessene Kapillare vom Innenradius r in die zu untersuchende Flüssigkeit, wie in Abb. 214 angedeutet ist. Ohne Berücksichtigung der Schwere bildet sich in feinen Kapillaren ein kugelförmiger Meniskus aus, dessen Krümmungsradius ϱ sei. Für einen Randwinkel von der Größe φ wird dann von jedem Flächenelement des Meniskus ein nach O gerichteter Druck ausgeübt, der mit $\varrho = r/\cos\varphi$ nach Gleichung (14/5)

$$p = \frac{2\,\varkappa}{r}\cos\varphi$$

wird. Die Resultierende aller Oberflächenkräfte liegt in der Achse der Kapillaren und hält der Flüssigkeitssäule von der Höhe h das Gleichgewicht, dessen Bedingung durch Integration über die Oberfläche des Meniskus erhalten wird. Es gilt

$$2\,\varkappa\, r\, \pi \cos\varphi = r^2\, \pi\, h\, s\, g$$

(g = Erdbeschleunigung), woraus sich die gesuchte Oberflächenspannung ergibt zu

$$\varkappa = \frac{h\, r\, s\, g}{2 \cos\varphi}, \qquad (14/7)$$

wenn die Flüssigkeitsdichte mit s bezeichnet wird. Bei vollständiger Benetzung der Glaswand wird wegen $\cos\varphi = 1$

$$\varkappa = \frac{h\, r\, s\, g}{2}. \qquad (14/7\,\mathrm{a})$$

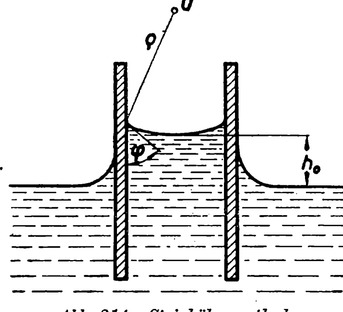


Abb. 214 Steighöhenmethode

Da nach Gleichung (14/7) die Steighöhe dem Kosinus des Randwinkels verhältnisgleich ist, muß erreicht werden, daß die Flüssigkeit die Kapillarwand vollständig benetzt. Zu diesem Zweck reinigt man die Kapillare sorgfältig mit konzentrierter Schwefelsäure, Chromsäure, Alkohol oder Kalilauge, durchspült sie mit der zu untersuchenden Flüssigkeit und taucht nun die Glasröhre senkrecht ein.

Zur genauen Bestimmung der Steighöhe beobachtet man mit einer Lupe, die zusammen mit einem kleinen Hohlspiegel auf der Skala verschoben werden kann, ähnlich wie beim Manometer nach PRANDTL (§ 8,531). Das sich über dem tiefsten Punkt des Meniskus befindliche Flüssigkeitsvolumen hat eine Korrektur der abgelesenen Steighöhe h_0 zur Folge, die nach VOLKMANN lautet:

$$h = h_0 + r/3 - 0{,}129\, r^2/h_0,$$

wenn der Kapillarradius sehr klein gegen h_0 ist. In ähnlicher Weise läßt sich auch die Oberflächenspannung aus der Kapillardepression nicht benetzender Flüssigkeiten, z. B. Quecksilber, bestimmen. Nach FERGUSON und DOWSON (*95*) läßt sich die Kapillarkonstante direkt aus der Beziehung $\varkappa = r\,p/2$ bestimmen, wenn man mit einem Mikromanometer (siehe § 8,53) den Druck p mißt, der nötig ist, um den Meniskus auf die Höhe der ebenen Flüssigkeitsoberfläche zu bringen.

Der Einfluß der Kapillarkräfte ist, wie schon im § 8,51 gestreift, bei der Ablesung von Flüssigkeitssäulen dann zu berücksichtigen, wenn die beiden Ableseschenkel verschieden weit sind. Die Berechnung von Quecksilbermenisken haben SCHEEL und HEUSE (*301*) ausgeführt, allgemeine Volumina von Menisken sind nach PORTER (*278*) zu berechnen.

14,32 *Messung des Krümmungsdruckes*

Nach FERGUSON und KENNEDY (*96*) läßt sich die oben abgeleitete Beziehung $\varkappa = r\,p/2$ benutzen, um die Oberflächenspannung von vollkommen benetzenden Flüssigkeiten direkt zu bestimmen. Nach Abb. 215 füllt man in eine dünne, waagerecht liegende Kapillare, deren eines Ende eben geschliffen ist, einen kurzen Flüssigkeitsfaden. Steigert man den auf den Faden ausgeübten, genau meßbaren Druck so lange, bis der Meniskus am Ende der Kapillaren vollkommen eben wird, so ist aus Druck p und dem durch Auswägen

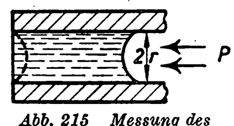


Abb. 215 Messung des Krümmungsdrucks

bestimmten Rohrradius r die Kapillarkonstante zu berechnen. Die Ebenheit des freien Meniskus ist mit großer Genauigkeit einzustellen, wenn man das Bild einer Lichtquelle, das am Meniskus reflektiert wird, unter einem Mikroskop betrachtet. Die mit dieser Methode erreichbare Genauigkeit beträgt etwa 1%. Mit Vorteil läßt sich dieses Verfahren, das nur geringe Flüssigkeitsmengen verlangt und ohne Dichtebestimmung auskommt, auch anwenden, um die Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung zu bestimmen (*250*).

14,33 *Reflexionsmethode*

Nach LENARD und EÖTVÖS läßt sich die Oberflächenspannung mit großer Genauigkeit aus dem mit optischen Mitteln ausgemessenen Profil eines Meniskus an einer senkrechten Wand bestimmen. In der Abb. 216 stelle O—O den sich an einer senkrechten Wand W bildenden Meniskus dar. Mit Hilfe zweier, an der gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche reflektierten Lichtstrahlen 1 und 2 wird die Neigung der Oberfläche für die Punkte P_1 und P_2 bestimmt. Die Neigungswinkel φ_1 und φ_2 lassen sich unter Berücksichtigung der Brechung an der Trennfläche Wasser—Luft angeben. Durch Anwenden der LAPLACEschen Gleichung (14/5) erhält man die gesuchte Oberflächenspannung aus der Beziehung

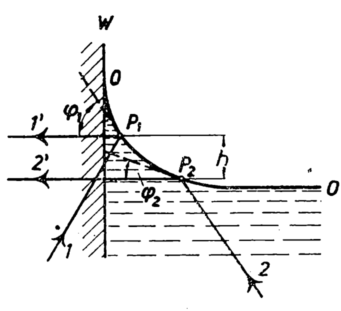


Abb. 216 Reflexionsmethode I

$$\varkappa = \left[\frac{h}{2\left(\sin\frac{\varphi_1}{2} - \sin\frac{\varphi_2}{2}\right)}\right]^2 (\varrho - \varrho'), \qquad (14/8)$$

wenn h der Vertikalabstand der Reflexionsstellen P_1 und P_2, und ϱ und ϱ' die Dichte der Flüssigkeit bzw. des an diese grenzenden Dampfes ist. Rechnet man den Abstand h von der ebenen Flüssigkeitsoberfläche aus ($\varphi_2 = 0$), so vereinfacht sich Gleichung (14/8) zu

$$\varkappa = \frac{h^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} (\varrho - \varrho'). \qquad (14/8a)$$

Der Abstand h, dessen genaue Bestimmung maßgebend für die Genauigkeit der gemessenen Oberflächenspannung ist, wird meist mit dem Kathetometer gemessen. Da im günstigsten Falle $h \approx 0{,}25$ cm beträgt und in der 2. Potenz in die Berechnung von $\varkappa$ eingeht, muß man zur genauen Messung mit starker Vergrößerung beobachten. MOSER (*256*) hat durch zweckmäßige Abänderung der ursprünglichen Beobachtungsmethode eine gesteigerte Meßgenauigkeit erzielen können. Er ersetzte die erforderliche Parallelverschiebung des Kathetometers, die Anlaß zu Meßfehlern gibt, durch meßbares Heben und Senken des Flüssigkeitsspiegels. Dabei wurde ein genau ausgemessener Messingzylinder, der an einem Zeißschen Dickenmesser hing, in die Flüssigkeit getaucht und die Reflexionswinkel mit dem fest montierten Beobachtungsmikroskop gemessen. Unter Beachtung der Fehlerquellen beträgt die Meßgenauigkeit einer Einzelmessung etwa 0,5%.

Die Methode ist noch weiter zu vereinfachen und zu verfeinern, wenn man einen Durchgang der reflektierten Strahlen durch die Trogwände und der damit verbun-

denen Brechung vermeidet. Das läßt sich mit der in der Abb. 217 schematisch dargestellten Methode erreichen, wobei in diesem Fall der horizontale Abstand l der Reflexionsstellen P_1 und P_2 zu messen ist. Die beiden senkrechten Lichtstrahlen 1′ und 2′ werden bei P_1 und P_2 teilweise an der Flüssigkeitsoberfläche reflektiert und gelangen ungebrochen in das senkrechte Beobachtungsmikroskop. Die gesuchte Oberflächenspannung errechnet sich aus:

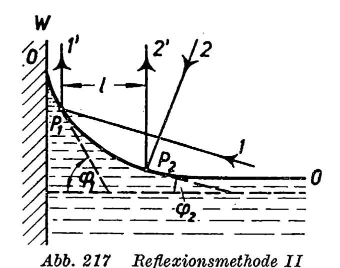


Abb. 217 Reflexionsmethode II

$$\varkappa = \frac{l^2 (\varrho - \varrho')}{4 \left[\frac{1}{4} \ln \frac{B + A}{B - A} - A \right]^2}, \qquad (14/9)$$

wobei

$$A = \cos \frac{\varphi_1}{2} - \cos \frac{\varphi_2}{2} \qquad \text{und} \qquad B = 1 - \cos \frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_2}{2}.$$

Die Messung der Längendifferenz l wird mit einem ZEISSschen Komparator durchgeführt, dessen Beobachtungsrichtung genau senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche steht. Die Winkel φ_1 und φ_2 werden direkt aus der Stellung der beiden Lichtquellen (Einfadenlämpchen) ermittelt. Mit dieser Methode wurde die Meßgenauigkeit der Einzelmessung auf $\pm$ 0,38% gesteigert und eine mittlere Genauigkeit von 0,1% erzielt.

14,4 Adhäsionswaage

Dieses auch *Abreißmethode* genannte Verfahren mißt direkt die Kraft, die auf einen durch die Flüssigkeitsoberfläche gezogenen Abreißkörper im Augenblick des Zerreißens der Flüssigkeitshaut ausgeübt wird. Bei vollkommener Benetzung des Abreißkörpers greift die Oberflächenspannung senkrecht an diesem an und berechnet sich direkt aus der Beziehung (14/1). Nach LENARD eignet sich für Präzisionsmessungen der Oberflächenspannung als Abreißkörper ein dünner, geradliniger Draht, der parallel zur Flüssigkeitsoberfläche angeordnet senkrecht hierzu aus dieser herausgezogen wird. Die kapillare Zugkraft bestimmt man am besten mit einer Waage, deren Belastung kontinuierlich gesteigert werden kann, wie z. B. Federwaage, Torsionswaage. Der Abreißkörper in der von LENARD vorgeschlagenen und bewährten Form hat das in Abb. 218 gezeigte Aussehen. Ein geradliniger Drahtbügel B von etwa 0,5 mm Drahtdurchmesser enthält einen dünnen, 0,05 bis 0,1 mm starken Platindraht als Meßdraht D von 2 bis 5 cm Länge. Für die Brauchbarkeit des Bügels ist es wichtig, daß der Meßdraht erst über der eigentlichen Befestigungsstelle an B angelötet wird, um Kapillarkräfte an Oberflächenunregelmäßigkeiten auszuschließen. Bezeichnet man mit P die Abreißkraft, mit P' das Gewicht des Meßbügels bei gleicher Eintauchtiefe, jedoch ohne Flüssigkeitshaut, so errechnet sich die Oberflächenspannung in erster Näherung aus:

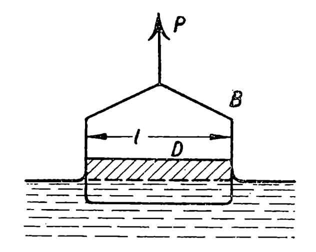


Abb. 218 Adhäsionswaage

$$\varkappa_0 = (P - P')/2\,l, \qquad (14/10)$$

wenn l die Meßdrahtlänge bedeutet. Die von LENARD abgeleitete Beziehung berücksichtigt ferner die Kapillarkräfte am Haltebügel und den Auftrieb am Meßdraht in der Flüssigkeit von der Dichte ϱ; sie lautet:

$$\varkappa = \varkappa_0 - r\left(\sqrt{2\varkappa_0\varrho} - \frac{2\varkappa_0}{l}\right) + r^2\left[\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\varrho - \frac{3}{l}\sqrt{2\varkappa_0 \cdot \varrho}\right], \qquad (14/11)$$

worin r der Radius des Meßdrahtes ist. Durch Verwendung verschieden langer Meßdrähte bei gleichen Bügelabmessungen läßt sich der Einfluß des Bügels eliminieren. Sind $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die mit Meßdrähten gleicher Dicke jedoch verschiedener Länge l_1 und l_2 nach (14/11) gemessenen Oberflächenspannungen, so erhält man den wahren Wert aus:

$$\varkappa = \varkappa_2 + (\varkappa_2 - \varkappa_1)\frac{l_1}{l_2 - l_1}. \qquad (14/12)$$

MOSER (*257*) hat nach dieser Methode die Abhängigkeit der Oberflächenspannung des Wassers von der Temperatur bestimmt. Zur Messung der Kräfte diente dabei eine Federwaage, die noch 10^{-4} g abzulesen gestattete. Der Meßdraht muß sehr genau parallel zur Flüssigkeitsoberfläche sein, damit das Abreißen über die ganze Meßlänge gleichzeitig erfolgt. Als Kennzeichen einer guten Benetzung bleiben nach dem Abreißen kleine Flüssigkeitströpfchen in Form einer Perlschnur am Meßdraht hängen. Bei kurzen Meßdrähten zeigt sich außerdem ein zweites Maximum der Zugkraft, das als Kennzeichen einer guten Benetzung gilt.

Die Genauigkeit der Drahtbügelmethode beträgt bei Beachtung aller Fehlerquellen etwa 0,1%.

14,5 Maximaldruck in Tropfen und Blasen

Ist es möglich, aus der zu untersuchenden Flüssigkeit luftgefüllte Blasen (z. B. Seifenlösung) zu bilden, so kann man aus dem im Inneren der Blase herrschenden Druck p die Oberflächenspannung berechnen, wobei zu berücksichtigen ist, daß eine innere und äußere Oberfläche derselben Krümmung in Gleichung (14/5) einzusetzen sind. Es gilt dann

$$\varkappa = p\frac{r}{4}, \qquad (14/13)$$

wenn r der Radius der Blase (mit dem Komparator gemessen) ist.

Bei einer anderen Ausführungsform läßt man aus einer senkrecht in die Flüssigkeit eintauchenden Kapillaren mit scharfem Rand Luftblasen austreten und mißt gleichfalls den hierzu notwendigen Druck. Ist der Durchmesser $2r$ der Kapillare sehr klein, so wird die austretende Blase die Gestalt einer Halbkugel annehmen, wofür in erster Näherung gesetzt werden kann

$$\varkappa = r\frac{p}{2}.$$

Unter Berücksichtigung der Schwere der Flüssigkeit erhält man für eine Flüssigkeit von der Dichte ϱ den vollständigen Ausdruck:

$$\varkappa = \frac{rp}{2}\left[1 - \frac{2}{3}\frac{r\varrho}{p} - \frac{1}{6}\left(\frac{r\varrho}{p}\right)^2\right], \qquad (14/14)$$

wobei bei der Angabe des Druckes p der auf der Kapillaröffnung lastende hydrostatische Druck abgezogen werden muß. Dieses Verfahren eignet sich besonders für

die Messung der Oberflächenspannung von Salz- und Metallschmelzen bei allerdings mäßiger Genauigkeit. Auch die Oberflächenspannung zwischen zwei verschiedenen Flüssigkeiten ist mit diesem Verfahren leicht zu ermitteln, wenn man eine der Flüssigkeiten durch die Kapillare austreten läßt.

14,6 Austropfmethode

Läßt man aus einer unten genau plangeschliffenen Tropfpipette sehr langsam eine Flüssigkeit auslaufen, so bilden sich einzelne Tropfen, deren Gewicht durch die Oberflächenspannung bis zum Abtropfen gehalten wird. Beträgt der Radius am Umfang der Pipette r, so kann ein maximales Tropfengewicht $G = 2\, r\, \pi\, \varkappa$ gehalten werden. Da sich jedoch der austretende Tropfen an der Pipettenöffnung etwas einschnürt, wird das Maximalgewicht nicht erreicht, sondern ist nach KOHLRAUSCH um den Faktor k geringer; es gilt also $G = k\, r\, \varkappa$. Die Größe k ist eine Funktion von $r, \varkappa$ und der Flüssigkeitsdichte ϱ von der Form $k = f\left(r \sqrt{\varrho/2\, \varkappa}\right)$, und ist in Abb. 219 innerhalb gebräuchlicher Grenzen zahlenmäßig dargestellt. Um $\varkappa$ berechnen zu können, wird es zunächst mit einem angenäherten Wert von k ermittelt und daraus eine bessere Näherung von k und damit von $\varkappa$ gewonnen. Auch für geschmolzene Metalle ist diese Methode bei mäßigen Genauigkeitsansprüchen anwendbar.

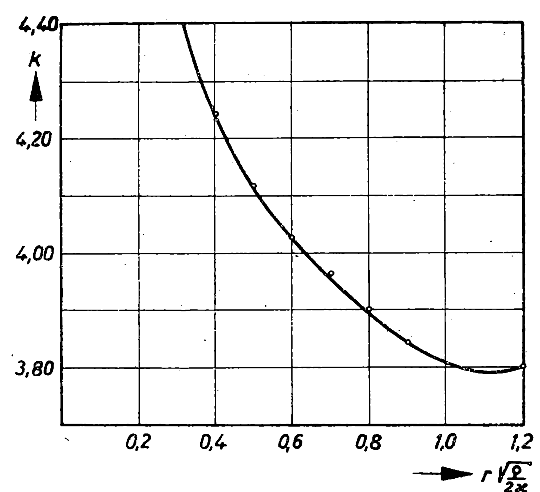


Abb. 219 Korrektur bei der Austropfmethode

14,7 Tropfenschwingungen

Läßt man Flüssigkeitstropfen aus der Tropfpipette austreten, so bemerkt man, daß diese quasielastischen Gebilde Schwingungen um eine kugelförmige Gleichgewichtslage der Oberfläche ausführen, deren Umkehrphasen gestreckte bzw. abgeplattete Rotationsellipsoide darstellen. Bezeichnet man wieder die Flüssigkeitsdichte mit ϱ, so führt ein Tröpfchen vom Radius r eine Grundschwingung mit der Frequenz

$$\nu = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\,\varkappa}{r^3\,\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (14/15)$$

aus. Um daraus die Oberflächenspannung mit guter Genauigkeit ermitteln zu können, müssen Tröpfchenradius und Schwingungsfrequenz sehr genau gemessen werden. Beides kann entweder durch photographische Aufnahmen mit einer Zeitdehnerkamera geschehen oder durch stroboskopische Beleuchtung eines in einem senkrechten Luftstrom von örtlich verschiedener Geschwindigkeit schwebenden Tropfens gemessen werden.

In ähnlicher Weise läßt sich die Oberflächenspannung auch aus der periodischen Einschnürung von Flüssigkeitsstrahlen, die mit konstanter Geschwindigkeit aus einer schwach elliptischen Düse ausströmen, berechnen (*354*).

Literaturhinweise (Teil 1: Mechanik)

1. Adams, L. H., Goranson, R. W. und Gibson, R. E., Rev. Sci. Instr. 8 (1937) 230
2. Alexander, P., J. sci. instr. 23 (1946) 11
3. Alexander, P., J. sci. instr. 25 (1948) 313
4. Anderson, P. T., Rev. Sci. Instr. 8 (1937) 493
5. Andrae, J. L., Z. phys. Chem. 76 (1911) 491
6. Angersbach, F. u. Hueter, E., Elektrot. Z. 71 (1950) 275
7. Arndt jr., J. P., J. Acoust. Soc. Amer. 21 (1949) 385
8. Avery, D. G., und Witty, R., Proc. phys. Soc. Lond. 59 (1947) 1016

9. Ballou, J. W. und Smith, J. C., J. appl. Phys. 20 (1949) 493
10. Barkhausen, H., Elektronenröhren, Bd. I. Leipz. 1950
11. Barnartt, S., und Ferguson, J. B., Rev. Sci. Instr. 14 (1943) 46
12. Barnes, R. B., und Matossi, F., Z. Phys. 76 (1932) 24
13. Bartholomeyczyk, W., Z. techn. Phys. 22 (1941) 25
14. Barus, C., Proc. nat. Acad. Sci. USA 7 (1921) 207; 14 (1928) 641, 771, 855
15. Barus, C., Proc. Amer. Acad. 7 (1921) 71
16. Batuecas, J. chim. phys. 31 (1934) 165
17. Beams, J. W., Science in Progress, II. Ser. Yale Univ. Press. 1946, S. 232
18. Beams, J. W., Phys. Rev. 72 (1947) 987
19. Beams, J. W., Rev. Sci. Instr. 21 (1950) 182
20. Beams, J. W., Phys. Rev. 78 (1950) 471
21. Beams, J. W., und Linke, F. W., Rev. Sci. Instr. 8 (1937) 161
22. Bechmann, R., Z. Hochfrequtechn. 44 (1934) 145
23. Bender, D., Ann. Phys. 34 (1939) 359
24. Bergmann, L., Phys. Z. 32 (1931) 688
25. Bergsman, E. B., Schweiz. Arch. 14 (1948) 294
26. Berlit, G., Z. Ver. Dtsch. Ing. 92 (1950) 231
27. Bernal, J. D. und Crowfoot, D., Nature 134 (1934) 809; 135 (1935) 305
28. Berndt, G., Grundlag. u. Geräte techn. Längenmessg. Berl. 1929
29. Berndt, G., Meßtechn. 20 (1944) 193
30. Betz, A., Meßtechn. 7 (1931) 37
31. Betz, A., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. IV/1, Berl. 1930
32. Blears, J., Nature 154 (1944) 20
33. Block, W., Chem. Z. 41 (1917) 641
34. Block, W., Z. Instrkde. 40 (1920) 205
35. Block, W., Z. Instrkde. 45 (1925) 220
36. Block, W., Mess. u. Wägen, Leipz. 1928, S. 194
37. Böttger, W., Z. Elektrochem. 23 (1917) 121
38. Bosselmann, R., Technik 2 (1947) 551
39. Bratzler, K., Adsorption von Gasen u. Dämpfen, Leipz. 1944
40. Bredner, R., D. Elektrotechn. 2 (1950) 239
41. Bretschneider, O., Forschg. VDI Heft 121 (1912)
42. Bridgman, P. W., Proc. Amer. Acad. 44 (1909) 255; 47 (1911) 362; 58 (1923) 169

43. BRIDGMAN, P. W., Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 10 (1924) 572
44. BRIDGMAN, P. W., Proc. Nat. Acad. Amer. 10 (1924) 411; 11 (1925) 609
45. BRIDGMAN, P. W., Proc. Amer. Acad. Sci. 60 (1925) 306
46. BRIDGMAN, P. W., Proc. Amer. Acad. 62 (1927) 187
47. BRIDGMAN, P. W., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. VIII, Leipz. 1932
48. BRIDGMAN, P. W., Physics of high pressure, Lond. 1945
49. BRIDGMAN, P. W., Science in Progress 3 (1945) 108
50. BRIDGMAN, P. W., Rev. mod. phys. 18 (1946) Nr. 1
51. BRIDGMAN, P. W., J. appl. Phys. 20 (1949) 1241
52. BRIEGLEB, G., Chem.-Ing.-Tech. 21 (1949) 6
53. BRUNS, H., Z. Instrkde. 46 (1926) 289
54. BURGER, H. C., und MOLL, W. J. H., Z. techn. Phys. 21 (1940) 199
55. BURGERS, J. M., Proc. Acad. Amsterd. 39 (1926) 547
56. BURGERS, J. M., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. IV/1, Leipz. 1930

57. CABARAT, R., C. R. 217 (1943) 529
58. CADY, W. G., Proc. Inst. Rad. Engr. 10 (1922) 88
59. CARPENTER, H. C. H., und ELAM, C. F., Proc. Roy. Soc. Lond. (A) 100 (1921) 329
60. CHATTOCK, A. P., WALKER, W. E., und DIXON, E. H., Phil. Mag. 1 (1901) 79
61. CLARK, J. W., Rev. Sci. Instr. 18 (1947) 915
62. COFFMAN, M. G., und BORNEMAN, C. H., Gen. Electr. Rev. 41 (1938) 502
63. CZOCHRALSKI, J., Z. phys. Chem. 92 (1918) 219

64. DAUT, W., Z. phys. Chem. 106 (1923) 225
65. DAY, A. L., und SOSMAN, R. B., J. Ind. Eng. Chem. 4 (1912) Nr. 7
66. DESREUX, V., und BISCHOFF, J., Bull. Soc. Chim. Belg. 59 (1950) 93
67. DÖHMER, P. W., Die Brinellsche Kugeldruckprobe, Berl. 1925
68. DOWLING, C., Phil. Mag. 46 (1923) 81
69. DOWNING, J. R. und MELLEN, G. L., Rev. Sci. Instr. 17 (1946) 218
70. DRUCKER, C., Acta Chem. Scand. 2 (1948) 883
71. DUSHMAN, S., High vacuum, New York 1922, deutsch 1926
72. DUSHMAN, S., Scientific Foundations of Vacuum Technique, Lond. 1949
73. DUSHMAN, S., und FOUND, C. G., Phys. Rev. 17 (1921) 7
74. DYE, D. W., Proc. Phys. Soc. Lond. 38 (1926) 399

75. EBERT, H., Hdbch. Phys. Bd. II, Leipz. 1926, S. 372 ff.
76. EBERT, H., Phys. Z. 36 (1935) 385
77. EBERT, H., Z. angew. Phys. 1 (1949) 331
78. EBERT, H., und GIELESSEN, J., Ann. Phys. 1 (1947) 229
79. ECK, B., Techn. Strömungslehre 3. Aufl. Berlin 1949
80. EDWARS, L. A., und PFEIL, L. B., J. Iron Steel Inst. 109 (1924) 129
81. EINSTEIN, A., Ann. Phys. 17 (1905) 549; 19 (1906) 371
82. EITEL, W., Hdbch. Arb.-Meth. anorg. Chem. Bd. IV, S. 448, Berl. 1926
83. EKLUND, S., Ark. Mat. Astron. och Fys. (A) (1941)
84. ELAM, C. F., Proc. Roy. Soc. Lond. (A) 112 (1926) 289
85. EMICH, F., Lehrbch. Mikrochem., Wiesbad. 1926
86. ENSKOG, D., Phys. Z. 12 (1911) 533
87. ERK, S., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. IV, Leipz. 1932
88. ESSEN, L., Proc. Roy. Soc. Lond. (A) 155 (1936) 498
89. ESTERMANN, I., und KANE, E. D., J. appl. Phys. 20 (1949) 608
90. EWALD, W., Z. Instrkd. 47 (1927) 97

91. FAIRCHILD, C. D., Temperature Symposion, New York 1941, S. 587
92. FART, Glas u. Apparat 22 (1941) 97

93. Felgentraeger, W., Hdbch. Phys. Bd. II, Berl. 1926 S. 112
94. Felgentraeger, W., Feine Waagen, Wägungen u. Gewichte, Berl. 1932
95. Ferguson, R. H., und Dawson, L. H., Trans. Farad. Soc. 17 (1921) 384
96. Ferguson, R. H., und Kennedy, W. R., Proc. Phys. Soc. 44 (1932) 511
97. Fink, K., Arch. Eisenhüttenwes. 21 (1950) 129, 137
98. Föppl, L., und Mönch, E., Praktische Spannungsoptik, Berl. 1950
99. Francis, A. W., Physics 4 (1933) 403
100. Freise, H., Bl. Unters.- u. Forschg.-Instr. 17 (1943) 13
101. Freise, H., Z. angew. Phys. 1 (1949) 526
102. Freise, H., Z. Ver. Dtsch. Ing. 92 (1950) 76
103. Frerichs, R., Phys. Rev. 72 (1947) 594
104. Friesen, St. v., Rev. Sci. Instr. 11 (1940) 362
105. Fritsch, V., Arch. Techn. Mess. V 3531-1
106. Froböse, E., AEG-Mitt. (1937) 405
107. Froböse, E. und Schönbacher, K., Arch. Elektrot. 33 (1939) 341
108. Fröhlich, H., Meßtechn. 15 (1939) 113
109. Fryburg, G. C. und Simons, J. H., Rev. Sci. Instr. 20 (1949) 541
110. Funk, W. und Seeliger, R., Z. Phys. 117 (1941) 651

111. Gaede, W., Phys. Z. 6 (1905) 758
112. Gaede, W., Ann. Phys. 41 (1913) 337
113. Gaede, W., Ann. Phys. 46 (1915) 373
114. Gaede, W., Z. techn. Phys. 4 (1923) 337
115. Gaede, W., Hbch. Exp.-Phys. Bd. IV, Leipz. 1932, S. 413
116. Gaede, W., Z. techn. Phys. 15 (1934) 664
117. Gaede, W., Z. Naturforschg. 2a (1947) 233
118. Garrod, R. J. und Gross, K. A., J. sci. instr. 25 (1948) 373
119. Gehlhoff, G., Z. techn. Phys. 3 (1922) 225
120. Geiger, J., Mech. Schwingg. u. ihre Messg. Berl. 1927
121. Gerlach, W., und Lehrer, E., Naturwiss. 15 (1927) 15
122. Gerloff, G., Forschg. VDI 8 (1937) 143
123. Geyger, W., Arch. techn. Mess. V 3822–1/2
124. Giebe, E., und Blechschmidt, F., Ann. Phys. 11 (1931) 905
125. Giebe, E., und Scheibe, A., Z. Phys. 46 (1928) 607
126. Giebe, E., und Scheibe, A., Elektr. Nachr. Tech. 5 (1928) 65
127. Giesen, K., Techn. 2 (1947) 393
128. Gillette, R. H. und Jellinek, M. H., Rev. Sci. Instr. 20 (1949) 480
129. Glamann, W., Arch. techn. Mess. (1933) V 132-12
130. Glocker, R., Materialprüfung mit Röntgenstrahlen, Berl. 1949
131. Gmelin, P., Chem.-Ing. Bd. II, Leipz. 1933, S. 25
132. Goens, E., Ann. Phys. 4 (1930) 733
133. Goens, E., Ann. Phys. 11 (1931) 649
134. Goens, E., Ann. Phys. 16 (1933) 793
135. Göpel, F., Hbdch. Phys. Bd. II, Berl. 1926, S. 42
136. Goerens, P., und Mailänder, R., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. V, Leipz. 1930, S. 149
137. Goetz, A., Phys. u. Techn. d. Hochvakuums, Braunschw. 1926
138. Gold, L., Rev. Sci. Instr. 20 (1949) 115
139. Gold, L., Phys. Rev. (2) 77 (1950) 390
140. Grüneisen, E., Z. Instrkd. 27 (1907) 38
141. Grüneisen, E., Ann. Phys. 22 (1907) 801; 25 (1908) 829
142. Grüneisen, E., und Goens, E., Phys. Z. 24 (1923) 506; Z. Phys. 26 (1924) 250
143. Gustavsson, G., Ann. Phys. 22 (1935) 507
144. Guye, J. chim. phys. 10 (1912) 332; 19 (1921) 100

145. Haase, G., Z. angew. Phys. 2 (1950) 188
146. Haber, F., und Kerschbaum, F., Z. Elektrochem. 20 (1914) 296
147. Hahn, G., Meßmitt. u. Prüfverfahr. i. d. mech.-technol. Metallprüfg., Braunsch. 1941
148. Halla, F., und Mark, H., Röntgenogr. Unters. v. Kristall.., Leipz. 1937 S. 300ff
149. Hardung, V., Bull. schweiz. elektrot. Ver. 30 (1939) 188
150. Hartmann, G., Luftwiss. 11 (1944) 135
151. Hatschek, E., Koll. Z. 7 (1910) 301; 8 (1911) 34; 11 (1912) 284
152. Hauk, V., Z. Metallkd. 35 (1943) 156
153. Hayashi, C., Hashimoto, K., Okamoto, K. und Sagane, R., Rev. Sci. Instr. 20 (1949) 524
154. Hearmon, R. F. S., Rev. Mod. Phys. 18 (1946) 409
155. Heinrich, Wien. Ber. 145 (2a) (1936) 219
156. Held, H., Dipl. Arb. TH. Stuttg. 1938
157. Held, H., Z. Metallkd. 32 (1940) 201
158. Henriot und Huguenard, J. Phys. Rad. 8 (1927) 433
159. Hensel, W., Diss. Leipz. 1928; Phys. Z. 30 (1929) 274
160. Herold, W., Wechselfestigkeit metall. Werkstoffe, Berl. 1934
161. Hertwig, H., Funk u. Ton 1 (1947) 93
162. Hett, J. H., und King, R. W., Rev. Sci. Instr. 21 (1950) 150
163. Heuvelink, H. K. J., Z. Instrkd. 45 (1925) 70
164. Hickman, K. D., J. opt. Soc. Amer. 18 (1929) 305
165. Hickman, K. D., J. Frankl. Inst. 221 (1936) 215, 383
166. Higgs, P. M., Rev. Sci. Instr. 20 (1949) 23
167. Hoadley, H. O., Rev. Sci. Instr. 20 (1949) 30
168. Höppler, F., Z. techn. Phys. 14 (1933) 165
169. Hofer, K., Z. phys. Chem. 27 (1935) 467
170. Hoffrogge, C., Z. Phys. 126 (1949) 671
171. Hofmann, F. G., Chem. Fabr. 4 (1931) 325
172. Holborn, L., Scheel, K., und Henning, F., Wärmetechn. Tab. der PTR 1919
173. Holborn, L., und Schultze, H., Ann. Phys. (4) 47 (1915) 1089
174. Holder, L. F., Gen. Electr. Rev. 33 (1930) 500
175. Hoppe, K., Motortechn. Z. 6 (1944) 147
176. Hort, W., und Thoma, A., Diff.-Gleichg. d. Techn. u. Phys., Leipz. 1949
177. Hoyem, A. G., und Tyndall, E. P. T., Phys. Rev. 33 (1929) 81
178. Hunton, R. D., und Ellitt, A., Phys. Rev. (2) 49 (1936) 381, 417
179. Hurwitz, A., Math. Ann. 46 (1895) 273

180. Ising, G., Phil. Mag. (7) 1 (1926) 827
181. Ising, G., Ann. Phys. 5 (1931) 905

182. Jackson, C. V., Proc. Roy. Soc. Lond. (A) 155 (1936) 407
183. Jackson, J., und Bowyer, W., Monthly not. 88 (1928) 465; 90 (1930) 268
184. Jacob, W., Diss. Göttg. 1939
185. Jaeckel, R., Z. Naturforschg. 2a (1947) 666
186. Jaeckel, R., Kleinste Drucke, ihre Erzeugg. u. Messg., Berl. 1950
187. Jäniche, W., und Thiel, G., Arch. Eisenhüttwes. 21 (1950) 105
188. Jaeschke, R., Z. Ver. Dtsch. Ing. 92 (1950) 237
189. Janovski, W., Arch. techn. Mess. (1933) V 132–6
190. Janovsky, W., Z. techn. Phys. 14 (1933) 466
191. Jefferies, E. J., J. sci. instr. 8 (1937) 282
192. Juhasz, de, und Geiger, J., Der Indikator., Berl. 1938

193. Keeley, T. C., J. sci. instr. 1 (1924) 369
194. Keinath, G., Techn. d. elektr. Meßgeräte, Münch.-Berl. 1928, Bd. I

195. KERSTEN, J. A. H., Physica 14 (1948) 567
196. KERSTEN, M., Z. Phys. 71 (1931) 553
197. KEYES, F. G., Proc. Amer. Acad. 68 (1933) 505
198. KING, L. V., Phil. Trans. 214 (1914) 373
199. KLEIN, P. E., Zeit- u. Kurzzeitmessg. m. Elektronenstrahloszillogr., Berl. 1950
200. KLEINSCHMIDT, E., Hdbch. meteor. Instr. Berl., 1936, S. 288
201. KLOTTER, K., Messg. mech. Schwingg., Berl 1943
202. KLUGE, J., LINCKH. H E., und FAHRENHOLZ, S., Phys. Z. 38 (1937) 73
203. KNUDSEN, M., Ann. Phys. 28 (1909) 75
204. KNUDSEN, M., Ann. Phys. (4) 32 (1910) 809
205. KOCH, A., und DANNECKER, Ann. Phys. 47 (1915) 197
206. KOCH, H. W., und ZELLER, W., Z. Ver. Dtsch. Ing. 80 (1936) 1440
207. KOCHENDÖRFER, A., Plast. Eigenschaft. v. Krist. u. metall. Werkstoff. Berl. 1941
208. KÖSTERS, W., Z. Instrkd. 33 (1913) 233
209. KÖSTERS, W,. Feinmech. I (1922) 2, 19, 39
210. KÖSTERS, W., Z Feinmech. u. Präzis. 34 (1926) 55
211. KOREF, F., Z. Elektrochem. 28 (1922) 511
212. KRETSCHMER, V., Forschg. Ing.-Wes. 3 (1932) 150
213. KREUSLER, G., Z. techn. Phys. 13 (1932) 241
214. KRÖNERT, J., Arch. techn. Mess. J. 910–1
215. KUSS, E., Naturwiss. 33 (1946) 312

216. LACOMBE, P., und BERGHEZAN, A., Physica 15 (1949) 161
217. LANGMUIR, I., J. Amer. Chem. Soc. 35 (1913) 107
218. LANGMUIR, I., Phys. Rev. 1 (1913) 337
219. LAPORTE, H., Hochvakuum, seine Erzeugg., Messg. u. Anwendg. i. Labor., Halle 1951
220. LAZAN, B. J., Trans. A. S. M. E. 65 (1943) 87
221. LEIBFRIED, G., Z. Phys. 127 (1950) 580
222. LEONHARD, A., D. selbsttät. Regelg. i. d. Elektrotech. Berl. 1940
223. LEONHARD, A., Arch. Elektrotech. 38 (1944) 17
224. LETHERSICH, W., J. sci. instr. 21 (1944) 180
225. LIEBHAFSKY, A. H., BRONK, L. B., und BALIS, E. W., Rev. Sci. Instr. 18 (1947) 854
226. LIEBMANN, G., J. sci. instr. 25 (1948) 186
227. LIHL, F., Arch. Metallkd. 1 (1947) 25
228. LITTMANN, M., Getterstoffe, Leipz. 1938
229. LOEBE, W., Arch. techn. Mess. I 131–1 (1937)
230. LOOMIS, A. L., und MARRISON, W. A., A. I. E. E. 51 (1932) 542
231. LYONS, W. J., und PRETTYMAN, J. B., J. appl. Phys. 18 (1947) 586

232. MACHATTIE, L. E., Phys. Rev. 59 (1941) 468
233. MARK, H., POLANYI, M., und SCHMID, E., Z. Phys. 12 (1922) 58
234. MARRISON, W. A., Proc. Inst. Rad. Engr. 17 (1929) 1103
235. MASCH, R., Z. Instrkd. 58 (1938) 121
236. MCCUTCHEON, M., J. appl. Phys. 20 (1949) 414
237. MCPHERSON, A. I., und DOUGLAS, D. G., Rev. Sci. Instr. 20 (1949) 457
238. MEGGERS, W. F., J. opt. Soc. Amer. 38 (1948) 7
239. MEISSNER, W., Z. Instrkd. 30 (1910) 137
240. MEISSNER, W., Forschg. Ing.-Wes. 9 (1938) 213
241. MEISSNER, W. und SCHUBERT, G. U., Ann. Phys. 3 (1948) 163
242. MEISSNER, W. und VOIGT, W. Z., Instrkd. 50 (1930) 121
243. MELLEN, G. L., Electronics 22 (1950) 90
244. MERRINGTON, A. C., Nature 152 (1943) 214
245. MERRINGTON, A. C., Viscosimetry, 1. Aufl., Lond. 1949

246. MERSHON, A. V., J. Amer. Inst. electr. Engr. 45 (1926) 820
247. MERZ, L., Arch. techn. Mess. 174 (1950) V 91122–11; 175 (1950) V 91122–11
248. MERZ, L., und SCHARWÄCHTER, H., Arch. techn. Mess. (1937) V 132–15
249. MEYER, E., und BÖHM, W., Z. techn. Phys. 16 (1935) 567
250. MEYERSTEIN, W. und MORGAN, J. D., Phil. Mag. (7) 35 (1944) 335
251. MÖNCH, E., Z. angew. Phys. 1 (1949) 306
252. MÖNCH, G. Ch., Hochvakuumtechnik. 2. Aufl., Pößneck 1950
253. MOLL, W. J. H., und BURGER, H. C., Z. Phys. 34 (1925) 109
254. MONK, G. W., J. appl. Phys. 19 (1948) 485
255. MORIN, H. DE, Les Appareils d'integration, Paris 1913
256. MOSER, H., Ann. Phys. 82 (1927) 963
257. MOSER, H., Ann. Phys. 82 (1927) 993
258. MOSER, H., Phys. Z. 35 (1934) 682

259. NADAI A., Elastische Platten, Berl. 1925
260. NIESIOLOWSKI-GAWIN, V., Hdbch. Phys. Bd. I, Berl. 1926
261. NOLLE, A. W., J. appl. Phys. 19 (1948) 753

262. OBATA, J., J. opt. Soc. Amer. 16 (1928) 419
263. OPPEL, W., Forschg. Ing.-Wes. 7 (1936) 240
264. OPPELT, W., Stetige Regelvorgänge, Wolfenbütt. 1947
265. OPPELT, W., Grundgesetze d. Regelung, Wolfenbütt. 1947
266. OPPELT, W., Arch. elektr. Übertr. 4 (1950) 11

267. PALACIOS, J., Phys. Z. 24 (1923) 151
268. PARKINS, W. E., und HIGINBOTHAM, W. A., Rev. Sci. Instr. 12 (1941) 366
269. PENNING, F. M., Philips techn. Rdsch. 2 (1937) 201
270. PENNING, F. M., und NIENHUIS, K., Philips techn. Rdsch. 11 (1949) 116
271. PFLIER, P. M., Elektr. Messg. mech. Größen. 3. Aufl., Berl. 1948
272. PFUND, A., Phys. Rev. 18 (1921) 78
273. PFUND A., Science 68 (1929) 11
274. PHILIPPOFF, W., Phys. Meßmethod., Leipz. 1944, S. 100
275. PIERCE, G. W., Proc. Amer. Acad. Bost. 59 (1924) 81
276. PIERCE, G. W., Proc. Amer. Acad. 63 (1928) 1
277. PIRANI, M. v., Verh. Dtsch. phys. Ges. 8 (1906) 686
278. PORTER, G., Phil. Mag. 14 (1932) 694; 17 (1934) 511
279. POSPIŠIL, V., Phys. Z. 30 (1929) 82
280. PRANDTL, L., Erg. AVA Göttg. 1. Liefg. 1921
281. PRANDTL, L., Strömungslehre, 3. Aufl., Braunschw. 1942
282. PRZIBRAM, K., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. VIII/2, Berl. 1929 S. 690
283. PUGH, H. L. D., J. sci. instr. 21 (1944) 177
284. PUNNETT, S. W., und JERRARD, H. G., Electr. Engng. 23 (1951) 55

285. RAINWATER, J., Rev. Sci. Instr. 13 (1942) 118
286. RANKINE, A. O., Proc. Roy. Soc. Lond. (A) 83 (1910) 265
287. REICHARDT, W., Z. Instrkd. 55 (1935) 23
288. REIN, A., Physiologie d. Mensch., Berl. 1948 S. 527
289. REINKOBER, O., Phys. Z. 32 (1931) 243; 38 (1937) 112
290. REISCH, S., Z. Hochfrequ.-Techn. 38 (1931) 101
291. ROHDE, L., Z. techn. Phys. 21 (1940) 30
292. RICHTER, B., Arch. techn. Mess. 174 (1950) J 162–6
293. RIEGGER, H., Z. techn. Phys. 1 (1920) 16
294. ROBINSON, B. W., Proc. Roy. Soc. Lond. (A) 142 (1933) 422
295. ROEBUCK, J. R., und CRAM, W., Rev. Sci. Instr. 8 (1937) 215

296. SACHS, G., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. V, Leipz. 1930
297. SACHS, G., und WEERTS, I., Z. Phys. 64 (1930) 344
298. SACK, H. S., MOTZ, J., RAUB, H. L., und WORK, R. N., J. appl. Phys. 18 (1947) 450
299. SCHAAFFS, W., Frequenz 3 (1949) 295
300. SCHEEL, K., Hdbch. Phys. Bd. II, Berl. 1926 S. 146
301. SCHEEL, K., und HEUSE, W., Ann. Phys. 3 (1910) 291
302. SCHEEL, K., und HEUSE, W., Verh. D. Phys. Ges. 16 (1914) 1
303. SCHEEL, K., und HEUSE, W., Hdbch. Arb.-Meth. anorg. Chem. 1919
304. SCHEIBE, A., Erg. exakt. Naturwiss. Bd. 15 (1936) 262
305. SCHEIBE, A., Piezoelektrizität d. Quarzes. Braunschw. 1938
306. SCHEIBE, A., und ADELSBERGER, U., Phys. Z. 33 (1932) 835; Ann. Phys. 18 (1933) 1
307. SCHEIBE, A., und ADELSBERGER, U., Phys. Z. 37 (1936) 185; Hochfrequ.u. Elektroakust. 43 (1934) 37
308. SCHILLER, L., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. IV/4, Leipz. 1932
309. SCHMID, E., Proc. Int. Congr. Appl. Mech. Delft (1925) 342
310. SCHMID, E., und BOAS, W., Kristallplastizität Berl. 1935
311. SCHNEIDER, W. C. und BURTON, C. J., J. appl. Phys. 20 (1949) 48
312. SCHUBNIKOW, L., Z. Phys. 25 (1924) 31
313. SCHÜRKOW, S., Phys. Z. d. Sowj. U. (1932) 123
314. SCHÜTZ, v., Z. Ver. Dtsch. Ing. 76 (1932) 521
315. SCHULER, M., Ges. Zeitmeßkd. u. Uhrentech. 6 (1935) 95
316. SCHULZ, L. G., J. opt. Soc. Amer. 40 (1950) 177
317. SCHULZE, Phys. Z. 14 (1913) 922
318. SCHULZE, A., Phys. Z. 38 (1937) 598
319. SCHWAIGERER, S., Arch. Metallkd. 3 (1949) 307
320. SEARS, G. W., Rev. Sci. Instr. 20 (1949) 458
321. SEIDEL, F., Neue phys. Blätt. 4 (1946) 82
322. SELL, H., Z. techn. Phys. 18 (1937) 3
323. SERRADO, M., Mesures 14 (1949) 293
324. SIEBEL, E., Hdbch. d. Werkstoffprüfg. Berl. 1940, Bd. I
325. SIMON, A., und FEHÉR, F., Z. Elektrochem. 35 (1929) 162
326. SIMON, H., Z. techn. Phys. 5 (1924) 221
327. SINCLAIR, D., J. appl. Phys. 21 (1950) 380
328. SMOLUCHOWSKI, M., Ann. Phys 21. (1906) 756
329. SPÄTH, W., Phys. d. techn. Werkstoffprüfg. Berl. 1938
330. SPIWAK, G., Z. Phys. 77 (1932) 123; Phys. Z. Sowj. U. 2 (1932) 101
331. STAUFFACHER, A. L., BEAMS, J. W., u. SNODDY, L. B., Phys. Rev. 59 (1941) 468
332. STEELE, B., u. GRANT, K., Proc. Roy. Soc. Lond. (A) 82 (1909) 580
333. STEENBECK, M., u. STRIGEL, R., Arch. Elektrotech. 26 (1932) 831, Arch. techn. Mess. (1933) V 142-2
334. STEPS, H., Optik 4 (1948) 294
335. STEUDING, H., Messg. mech. Schwingg., Berl. 1928
336. STILLE, U., Z. Ver. Dtsch. Ing. 91 (1949) 617
337. Stock und RITTER, Z. phys. Chem. 119 (1926) 333; 126 (1927) 172
338. STÖBER, F., Z. Krist. 61 (1925) 299
339. STRECKER, F., Prakt. Stabilitätsprüfg. mitt. Ortskurven u. numer. Verfahr. Berl. 1950
340. SULLIVAN, H. M., Rev. Sci. Instr. 19 (1948) 1
341. SVEDBERG, T., Naturwiss. 22 (1934) 225
342. SYROMJATNIKOW, F. W., Minerl. Rohstoffe (russ.) 5 (1930) 1905

343. TAMMANN, G., Z. phys. Chem. 80 (1912) 687
344. TAMMANN, G., Lehrb. d. Metallograph. Leipz. 1923
345. TAMMANN, G., und VESZI, G., Z. anorg. Chem. 150 (1926) 355

346. Taylor, J., Z. Instrkd. 27 (1907) 59
347. Taylor, G. J., und Elam, C. F., Proc. Roy. Soc. Lond. (A) 102 (1923) 643
348. Teichmann, H., Z. techn. Phys. 9 (1928) 22
349. Thompson, W. R., Ind. Eng. Chem. analyt. Edit. 14 (1942) 268
350. Thum, A., und Richard, K., Z. Ver. Dtsch. Ing. 87 (1943) 513
351. Thum, A., und Svenson, O., Z. Ver. Dtsch. Ing. 88 (1944) 153
352. Titoff, A., Z. phys. Chem. 74 (1910) 641
353. Tomaschek, R., Erg. exakt. Naturwiss. Bd. 12 (1936) 36

354. Ubbelohde, L., Öl u. Kohle 12 (1936) 1749

355. Van der Hegge Zijnen, Proc. Roy. Soc. 32 (1926) 547
356. Vereschagin, L., und Alexandrow, B., J. techn. Phys. USSR 9 (1939) 343
357. Voege, W., Phys. Z 7 (1906) 498
358. Vogel, H., Ann. Phys. 43 (1914) 1235
359. Voigt, W.. Wied. Ann. 31 (1887) 474
360. Voigt, W., Lehrb. d. Kristallphys. Leipz. u. Berl. 1910
361. Voigt, W., Göttg. Nachr. (1918) 424
362. Vries, H. de, Experientia 4 (1948) 205

363. Wade, F., Electronic Engng. 23 (1951) 30
364. Walter, R., Chem.-Ing.-Techn. 21 (1949) 49
365. Wanach, B., Z. Instrkd. 46 (1926) 221
366. Warburg, E., Leithäuser, G., und Johannsen, E., Ann. Phys. 24 (1907) 25
367. Weber, M., Helv. Phys. Acta 22 (1949) 425
368. Wellinger, K., und Keil, E , Z. Metallkd. 35 (1943) 169
369. Wertenstein, L., Proc. Cambridge Phil. Soc. 23 (1927) 578
370. West, S. S., und Bentley, L. C., Electronic Engng. 19 (1947) 207
371. Whiddington, L., Phil. Mag. 40 (1920) 634
372. Wilde, H., und Eisele, E., Z. angew. Phys. 1 (1949) 359
373. Wildhack, W. A., J. appl. Phys. 19 (1948) 972
374. Willers, F. A., Math. Instr. Leipz. 1926
375. Witty, R., J. sci. instr. 23 (1945) 201
376. Wright, F. E., J. opt. Soc. Amer. 9 (1924) 187
377. Wuest, W., Arch. techn. Mess. 168 (1950) V 1343-11

378. Yamaruki, F., und Yorida, Z., Proc. physico-math. Soc. Jap. (3) 15 (1933) 400
379. Yousef, Y. L., und Sultan, F., Rev. Sci. Instr. 20 (1949) 533
380. Regeln f. d. Durchflußmessg. mit genormten Düsen u. Blend. DIN VDI 1952 4. Aufl. Berl. 1937

ZWEITER TEIL

Akustik

§ 1 GRUNDBEGRIFFE DER AKUSTIK (*11, 13, 60, 105, 114, 150*)

Der große Aufschwung, den die angewandte Akustik in den beiden vergangenen Jahrzehnten genommen hat und der hauptsächlich durch die großen, an diesen Wissenszweig gestellten Anforderungen der Technik hervorgerufen wurde, hat eine bedeutende Rückwirkung auf die Untersuchungsmethoden und Schallerzeugungs- und Nachweisverfahren in der physikalischen Akustik gezeigt. Das trifft besonders auf die mit modernsten elektrischen Geräten ausgerüsteten, äußerst empfindlichen Verfahren im Ultraschallbereich zu, die zu einem wertvollen Hilfsmittel bei der Untersuchung der Struktur der Stoffe geworden sind. Es ist eine Eigenheit der physikalischen und technischen Akustik, auf die hier auch Rücksicht genommen werden wird, daß in noch größerem Umfang als in den anderen physikalischen Disziplinen deren Meßverfahren zum größten Teil rein elektrischer Natur sind. Diesem Sachverhalt entspricht die Darstellung dieses 2. Teils, in dem ausgehend von den Grundtatsachen der Schallausbreitung vor allem die elektroakustischen Meßmethoden behandelt werden.

1,1 **Das Schallfeld, Grundbegriffe und Einheiten**

Wird der Gleichgewichtszustand eines den Raum vollständig erfüllenden elastischen Mediums durch eine Schallquelle gestört, d. h. werden den Molekeln bzw. Gitterbausteinen an einer bestimmten Stelle Impulse erteilt oder wird der Druck lokal kurzzeitig verändert, so breitet sich diese Störung mit einer bestimmten, für das Medium charakteristischen Geschwindigkeit aus. Als Übertrager dieses Störvorganges wirken die elastischen Kräfte zwischen den Bausteinen bzw. Molekeln des Mediums. Ist die Störung eine periodische Funktion der Zeit mit der Frequenz $\nu = \omega/2\pi$, so breitet sich diese in Form von Wellen mit der Länge $\lambda = c/\nu$ fort, wenn man mit c die Ausbreitungsgeschwindigkeit in dem betreffenden Stoff bezeichnet.

Betrachtet man zunächst eine ebene Welle, die sich in Richtung der positiven X-Achse fortpflanzen soll, so wird die Verrückung a eines Teilchens zur Zeit t gegeben durch

$$a = a_0 \sin \omega (t - x/c), \tag{1/1}$$

worin man a_0 häufig als *Schallausschlag* bezeichnet. Die Geschwindigkeit eines Teilchens erhält man durch Differentiation von (1/1) zu

$$v = \frac{da}{dt} = a_0 \, \omega \cos \omega (t - x/c) = v_0 \cos \omega (t - x/c), \tag{1/2}$$

sie wird im Gegensatz zur Ausbreitungsgeschwindigkeit c als *Schallschnelle* v mit der Maximalamplitude v_0 bezeichnet. Der periodisch sich ändernde Teilchenabstand hat ebensolche, wegen der hohen Frequenzen adiabatisch verlaufende Dichteschwankungen zur Folge. Nach dem NEWTONschen dynamischen Grundgesetz müssen sich Massenkräfte $\varrho \frac{d^2 a}{d t^2}$ (ϱ = Dichte) und Druckgefälle $-\frac{d p}{d x}$ das Gleichgewicht halten, woraus folgt

$$\varrho \frac{d^2 a}{d t^2} = -\omega^2 a_0 \varrho \sin \omega (t - x/c) = -\frac{d p}{d x}. \tag{1/3}$$

Daraus ergibt sich durch Integration über x die zeitliche und räumliche Abhängigkeit des Druckes

$$p_{\text{ges}} = p_{\text{n}} + a_0 \varrho \omega c \cos \omega (t - x/c), \tag{1/4}$$

worin p_n der konstante normale Gasdruck bzw. in Flüssigkeiten der hydrostatische Druck ist. Der Ausdruck $a_0 \varrho \omega c = p_0$ wird *Schalldruck* genannt; seine Dimension ist dyn/cm², wofür allgemein die Bezeichnung *Mikrobar* (μb) verwendet wird. Es sei bereits hier darauf hingewiesen, daß jede der genannten Größen: Schallausschlag, Schallschnelle und Schalldruck, durch geeignete Empfänger getrennt gemessen werden kann (siehe § 5).

Die gesamte Energie der Volumeneinheit in einem Schallfeld setzt sich aus der kinetischen Energie der bewegten Teilchen, deren zeitlicher Mittelwert $\bar{E}_{\text{kin}} = \pi^2 \nu^2 \varrho\, a_0^2$ ist, und dem gleichgroßen potentiellen Energiebetrag zusammen, so daß die gesamte mittlere Schallenergie

$$\bar{E} = 2\, \pi^2 \nu^2 a_0^2\, \varrho \tag{1/5}$$

beträgt. Die Dimension der mittleren Schallenergie wird also erg/cm² s oder μW/cm² (1 μW = 10 erg/s).

Der Vergleich zweier Schallintensitäten, die sich, wie aus der Tabelle XXI ersichtlich, um viele Größenordnungen unterscheiden, wird entsprechend dem WEBER-FECHNERschen Empfindungsgesetz (1. Teil, § 1,22) durch die Rechenvorschrift

$$10 \log \frac{E_1}{E_2} = 20 \log \frac{p_1}{p_2}$$

gewonnen. Die Einheit in dieser Vergleichsskala nennt man 1 *Dezibel* (db). Es sei darauf hingewiesen, daß die Energievergleichsgröße Dezibel zahlenmäßig mit der sog. Phon-Skala übereinstimmt, 1 *Phon* jedoch die Maßeinheit für die subjektive Lautstärke darstellt.

Schallquelle	Leistung (W)
Unterhaltungssprache	$7 \cdot 10^{-6}$
Höchste Stimmentfaltung	$2 \cdot 10^{-3}$
Geige (ff)	$1 \cdot 10^{-3}$
Pianoforte (ff)	$2 \cdot 10^{-1}$
Trompete (ff)	$3 \cdot 10^{-1}$
Orgel (ff)	$1 \div 10$
Orchester (18 Instrumente)	2,5
Großlautsprecher	bis 100
Ultraschallsender	bis 1000

Tabelle XXI

Als Schallintensität oder *Schallstärke* I wird die in Ausbreitungsrichtung senkrecht durch 1 cm² in der Zeiteinheit hindurchtretende Energie bezeichnet, für die mit Gleichung (1/5) gilt

$$I = \bar{E}\, c = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, \omega^2\, a_0^2\, c. \tag{1/6}$$

Integriert man die Schallstärke über eine die Schallquelle vollständig umschließende Oberfläche, so erhält man die *Schalleistung* N. Tabelle XXI vermittelt einen Überblick über die Größenordnung der von den gebräuchlichsten Schallquellen ausgesandten Leistung.

Bei Berücksichtigung der Gleichung (1/2) und (1/4) läßt sich der Ausdruck (1/6) für die Schallintensität auch umformen in

$$I = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, c\, v_0^2 = \tfrac{1}{2}\, p_0^2/\varrho\, c = \tfrac{1}{2}\, p_0\, v_0. \tag{1/7}$$

Die Schallintensität läßt sich also angeben, wenn Schallschnelle und Schalldruck bekannt sind, oder nur eine von beiden Größen und die Schallgeschwindigkeit vorgegeben sind. Von der Beziehung $I = \frac{1}{2}\, p_0^2/c\, \varrho$ wird in der Schallmeßtechnik besonders häufig Gebrauch gemacht, da diese auch für Kugelwellen ihre Gültigkeit behält. Wie der Vergleich der Gleichungen (1/2) und (1/4) ergibt und es die Betrachtung der Beziehung (1/7) nahelegt, besteht zwischen den beiden Größen Schallschnelle v und Schalldruck p der Zusammenhang

$$v = \frac{p}{\varrho\, c}, \tag{1/8}$$

der formal dem OHMschen Gesetz für den elektrischen Strom entspricht. Dabei entspricht die Schallschnelle der Stromstärke und der Schalldruck der Spannung, so daß dem Produkt $\varrho \cdot c$ die Bedeutung eines Widerstandes zukommt. Man bezeichnet daher das Verhältnis p/v allgemein als *Schallwellenwiderstand* $\mathfrak{Z}$ oder akustische Impedanz, die als Verhältnis zweier komplexer Schwingungsgrößen gewöhnlich selbst auch eine komplexe Größe, für den einfachsten Fall der ebenen Welle jedoch reell ist. Wird der zwischen p und v bestehende Phasenverschiebungswinkel φ berücksichtigt, so ergibt sich die Schallstärke I aus:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T p\, v\, dt = \tfrac{1}{2}\, p_0 v_0 \cos\varphi\,. \tag{1/9}$$

Substanz	Schall-geschwindigkeit c 10^2cm/s	Schallwellen-widerstand $\mathfrak{z}$ g/cm² s
Luft (18°)	342	41,5
Kohlensäure (0°)	260	51,5
Wasserstoff (0°)	1261	11,3
Wasser (19°)	1461	146100
Eis	2100	190000
Eisen	5000	3900000
Kupfer	3900	3500000
Glas	5400	1350000

Tabelle XXII

Setzt man für den komplexen Schallwellenwiderstand pro Flächeneinheit $\mathfrak{z} = z_1 + i z_2$, so wird bekanntlich $\cos\varphi = z_1/|\mathfrak{z}|$ und aus Gleichung (1/9)

$$I = \tfrac{1}{2} z_1 v_0^2 = \tfrac{1}{2} \frac{z_1}{|\mathfrak{z}|^2} p_0^2, \tag{1/9a}$$

d. h. der Realteil z_1 des Wellenwiderstandes spielt für den Energietransport im Schallfeld die Rolle des Verlustwiderstandes. Man mißt den akustischen Widerstand in μb s/cm oder g/cm^2 s. In Tabelle XXII sind für einige Substanzen die Werte von c und $\mathfrak{z}$ zusammengestellt.

1,2 Schallgeschwindigkeit

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Verdichtungswelle in dem betreffenden Medium wird als Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Für eine ebene Welle leitet sich die Schallgeschwindigkeit für *Gase* aus der Wellengleichung ab und ergibt

$$c_{\text{gas}} = (\varkappa P_0/\varrho_0)^{\frac{1}{2}}. \tag{1/10}$$

worin $\varkappa = c_p/c_v$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen des Gases bedeutet. Da innerhalb weiter Grenzen der Gasdruck P_0 proportional der Dichte ϱ_0 ist, bleibt die Schallgeschwindigkeit in Gasen bei Druckänderungen konstant. Für verschiedene Gase ist zu erwarten, daß deren Schallgeschwindigkeit proportional der Wurzel aus dem reziproken Molekulargewicht wird, da Dichte und Molekulargewicht verhältnisgleich sind. Diese Voraussage wurde experimentell bestätigt. Die Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit läßt sich durch die Gasgleichung beschreiben und folgt daher der Beziehung

$$c_t = c_0 (1 + \alpha t)^{\frac{1}{2}}, \tag{1/11}$$

worin α der Wärmeausdehnungskoeffizient $= 1/273{,}2$ ist. Es sei bemerkt, daß die Größe $\varkappa$ sich gewöhnlich nicht als Konstante erweist, sondern von Druck und Temperatur abhängt.

Bei Flüssigkeiten wird bekanntlich der Zusammenhang zwischen dem Flüssigkeitsdruck und der Volumenänderung durch die Kompressibilität K entsprechend der Beziehung $\frac{\Delta V}{V} = -K \cdot P$ beschrieben, woraus sich die Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten zu

$$c_{\text{fl}} = (1/K \varrho_0)^{\frac{1}{2}} \tag{1/12}$$

ergibt. Bei den festen Körpern tritt an Stelle von $1/K$ der Elastizitätsmodul E, womit in diesem Fall

$$c_{\text{f}} = (E/\varrho_0)^{\frac{1}{2}} \tag{1/13}$$

wird. Da die Schallausbreitung ein adiabatischer Vorgang ist, sind in die Gleichungen (1/12) und (1/13) für K und E nicht die durch statische Versuche gewonnenen (isothermen) Werte, sondern die adiabatischen Stoffwerte aus dynamischen Messungen einzusetzen, die sich meist um einige Prozent von den statischen unterscheiden (vergl. 1. Teil, § 11,24).

Über die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Berandung des Schallfeldes wird in § 6,1 Näheres gesagt werden.

1,3 **Schallausbreitung** (*127*)

Die Beschaffenheit eines Schallfeldes hängt von zwei physikalischen Größen, nämlich vom Ausschlag und der Schwingungsform der Schallquelle und zum andern von der Gestalt und der Beschaffenheit des Ausbreitungsraumes ab. Ein Lautsprecher im freien Raum z. B. wird ungestörte Kugelwellen aussenden, während dieselbe Schallquelle in einem abgeschlossenen Rohr mit schallreflektierenden Wänden komplizierte Interferenzerscheinungen hervorrufen wird. Für die Messung akustischer Größen und Stoffwerte ist es von großer Bedeutung, daß diese in ungestörten und wohldefinierten Schallfeldern erfolgten, von denen die einfachsten und daher gebräuchlichsten Typen im folgenden näher beschrieben sind.

1,31 *Fortschreitende, ungedämpfte Wellen*

Im Gegensatz zu den stehenden Wellen (§ 1,32), die durch Interferenz zweier Wellenzüge mit entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung entstehen, spricht man von fortschreitenden Wellen, wenn sich die Schallwellen ungestört ausbreiten können. Entsprechend der Gestalt der Flächen gleicher Amplitude und Phase (Wellenflächen) spricht man von ebenen, Kugel- und Zylinderwellen, wenn die Schallquelle gleichphasige Schwingungen in einer Ebene, Kugelfläche oder Zylinderfläche aussendet und die Begrenzung des Schallfeldes die entsprechende Wellenform ungestört ausbilden läßt.

Ebene Wellen werden in Rohren erzeugt, wenn der Rohrdurchmesser klein gegen die Schallwellenlänge ist und diese durch eine schwingende Kolbenmembran erregt wird. Das von der Erregerstelle abgewandte Rohrende muß zur Vermeidung störender Reflexionen offen oder vollkommen schallschluckend sein. Bei der Schallausbreitung im freiem Raum kann man in größerer Entfernung von der Schallquelle in guter Näherung ebenfalls von einer ebenen Welle sprechen.

Schalldruck und Schallschnelle werden in komplexer Schreibweise entsprechend den Gleichungen (1/2) und (1/4) durch folgende Beziehungen beschrieben:

$$p = i\,\omega\,\varrho\,a_0\,c\,e^{i\omega t}\,e^{-i\omega x/c}, \tag{1/14}$$

$$v = i\,\omega\,a_0\,e^{i\omega t}\,e^{-i\omega x/c}, \tag{1/15}$$

woraus sich der bereits in Gleichung (1/8) abgeleitete Ausdruck für den Schallwellenwiderstand

$$\mathfrak{Z} = c\,\varrho \tag{1/8a}$$

ergibt. p und v sind im ebenen Schallfeld also in Phase und durch eine rein reelle akustische Impedanz verknüpft.

Neben den ebenen Wellen spielen für die akustischen Meßverfahren die *Kugelfelder* eine bedeutende Rolle, von denen wieder die Kugelfelder nullter und erster Ordnung besonders wichtig sind. Bei der *Kugelwelle nullter Ordnung* (siehe Abb. 220a) sind die Schallgrößen nur vom Abstand r vom Kugelmittelpunkt abhängig, da die Schallquelle nur radiale Bewegungen vollführt (atmende Kugel). Bezeich-

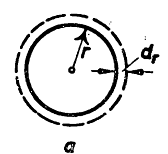


Abb. 220a. Erzeugung von Kugelfeldern nullter Ordnung.

net man mit a_r die Amplitude des durch die schwingende Oberfläche der Kugel vom Radius r in der Zeiteinheit bewegten Volumens, so erhält man

$$p = \frac{i\,\omega\,\varrho\,a_r\,c}{4\,\pi\,r}\,e^{-i\,r\,\omega/c}\,e^{i\,\omega\,t}\,, \tag{1/16}$$

$$v = \frac{i\,\omega\,a_r}{4\,\pi\,r}\cdot\frac{1+i\,\frac{\omega}{c}\,r}{i\,\frac{\omega}{c}\,r}\,e^{-i\,r\,\omega/c}\,e^{i\,\omega\,t}\,. \tag{1/17}$$

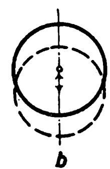


Abb. 220 b. Erzeugung von Kugelfeldern erster Ordnung.

Wird $r \ll \lambda$, $\left(\lambda = \frac{2\,\pi\,c}{\omega}\right)$ so folgt aus Gleichung (1/17) die einfache Beziehung

$$v = \frac{a_r}{4\,\pi\,r^2}\,e^{i\,\omega\,t} \tag{1/17a}$$

für die Schallschnelle in unmittelbarer Kugelnähe. Den Schallwellenwiderstand erhält man durch Division von (1/16) und (1/17) zu

$$\mathfrak{Z} = p/v = c\,\varrho\,\frac{i\,\omega\,r/c}{1+i\,\omega\,r/c}\,, \tag{1/18}$$

woraus folgt, daß für große Abstände wie beim ebenen Schallfeld $\mathfrak{Z} = c\,\varrho$, also reell wird. Im allgemeinen besteht jedoch zwischen p und v eine Phasenverschiebung, deren Phasenwinkel $\varphi = \operatorname{arc\,tg}(c/\omega\,r)$ beträgt. Der für die Schallstärke I nach Gleichung (1/9a) maßgebende Realteil des Schallwiderstandes hat für die Kugelwelle nullter Ordnung den Wert $z_1 = c\,\varrho\,\frac{\omega^2\,r^2/c^2}{1+\omega^2\,r^2/c^2}$ und ist dementsprechend in unmittelbarer Nähe der Schallquelle sehr klein.

Bei der Kugelwelle erster Ordnung (siehe Abb. 220b) bewegt sich die Kugel als Ganzes längs ihres Durchmessers, wodurch in der Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung (Äquatorialebene) die Amplituden der Radialschwingung Null werden.

Von großer Bedeutung für die akustischen Meßverfahren ist der Fall einer in einer starren ebenen Wand großer Ausdehnung schwingenden *Kolbenmembran*. Für einen Kolbenradius $R \ll \lambda$ wird man eine gewöhnliche Kugelwelle nullter Ordnung zu erwarten haben. Wird R im Verhältnis zur Wellenlänge größer, so nimmt die relative Abstrahlung in der zur schwingenden Oberfläche senkrechten Richtung immer mehr zu. Die Einzelheiten dieser Richtwirkung sind von STENZEL (*135*), BACKHAUS (*3*) und MEIXNER u. FRITZE (*98*) eingehend berechnet und diskutiert worden; einige Richtcharakteristiken sind für verschiedene Verhältnisse R/λ in Abb. 221 wiedergegeben. Eine allgemeine Theorie der *Richtcharakteristiken* ebener Strahlerflächen mit ungleichmäßiger Amplitudenverteilung wird von MENGES (*99*) gegeben.

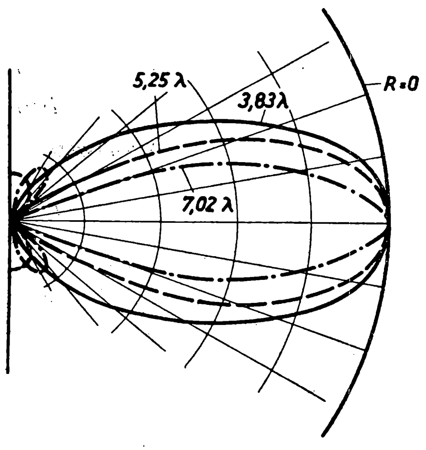


Abb. 221. Richtcharakteristiken einer Kolbenmembran.

1,32 *Stehende Wellen*

Die folgenden Betrachtungen sollen auf den verbreitetsten Fall *ebener* stehender Wellen beschränkt bleiben, wie sie z. B. in geschlossenen Rohren bei akustischen Interferometern auftreten und zur Messung der Wellenlänge verwendet werden. Diese besondere Wellenform kommt zustande, wenn eine ebene Welle senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung auf eine vollkommen reflektierende Ebene auffällt, wobei entweder der Abschlußkolben völlig starr sein soll oder dämpfungsfreie, erzwungene Schwingungen ausführen kann. Die Superposition von ankommender und reflektierter Welle bewirkt, daß die Schallschnelle bzw. der Schalldruck im ganzen Resonanzraum gleichphasig schwingen, wobei die Druckknoten mit den Stellen maximaler Geschwindigkeit und die Geschwindigkeitsknoten mit den Druckbäuchen zusammenfallen, wie das in Abb. 222 dargestellt ist.

Schalldruck und Schallschnelle sind periodische Funktionen des Abstandes x von der Reflexionsstelle. Diese lauten:

$$p = 2\, e^{i\delta/2}\, i\, \omega\, \varrho\, a_0\, c \cos\left(\omega\, x/c + \frac{\delta}{2}\right) e^{i\omega t}, \qquad (1/19)$$

$$v = 2\, e^{i\delta/2}\, \omega\, a_0 \sin\left(\omega\, x/c + \delta/2\right) e^{i\omega t}. \qquad (1/20)$$

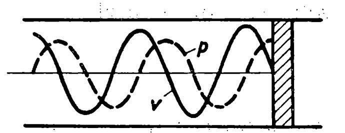


Abb. 222. Stehende akustische Wellen.

δ bedeutet den Phasensprung, den p und v an der Reflexionsstelle erleiden. Für den starren Rohrabschluß wird $\delta = 0$, was einem Druckbauch bzw. Geschwindigkeitsknoten für $x = 0$ entspricht. Für ein offenes Rohrende oder den Rohrabschluß durch eine nachgiebige Membran wird $\delta = \pm\, \pi$; am Rohrende wird ein Geschwindigkeitsbauch bzw. ein Druckknoten gefunden.

Ist die Reflexion der Schallwellen am Rohrende nicht vollkommen, wie das für die Ableitung der Beziehungen (1/19) und (1/20) vorausgesetzt wurde, so wird ein Teil der auftreffenden Energie am Rohrabschluß absorbiert. Man findet für p und v keine Knoten (Nullstellen), sondern nur Minima, da die zurücklaufende Welle eine geringere Amplitude als die ankommende besitzt. Bezeichnet man mit r das Verhältnis der Intensitäten der reflektierten und ankommenden Welle, so ergibt sich für den Schalldruck die Beziehung

$$p = i\omega\varrho\, a_0\, c\, [1 + r + 2\sqrt{r} \cos(2\,\omega\, x/c + \delta)]^{\frac{1}{2}} \exp i \left\{\frac{\delta}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{1-\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega x}{e} + \frac{\delta}{2}\right)\right]\right\} \qquad (1/21)$$

und für die Schallschnelle der entsprechende Ausdruck. An Stelle des Reflexionskoeffizienten r und des Phasensprunges δ läßt sich der Abschluß des Rohres auch durch die dort herrschende akustische Impedanz $\mathfrak{z} = z_1 + i\, z_2$ beschreiben, wobei zwischen r und δ einerseits und z_1 und z_2 andrerseits folgender Zusammenhang besteht:

$$r = \frac{\left(1 - \frac{z_1}{c\,\varrho}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{c\,\varrho}\right)^2}{\left(1 + \frac{z_1}{c\,\varrho}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{c\,\varrho}\right)^2}, \qquad (1/22)$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\frac{z_2}{c\,\varrho}}{\left(\frac{z_1}{c\,\varrho}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{c\,\varrho}\right)^2 - 1}. \tag{1/23}$$

1,33 *Brechung von Schallwellen*

Das Schallfeld an der Grenzfläche zwischen zwei sich akustisch verschiedenartig verhaltenden Stoffen läßt sich nach den aus der Wellenoptik bekannten Gesetzmäßigkeiten behandeln. Fällt etwa eine Schallwelle aus dem Luftraum unter dem Winkel α zum Einfallslot auf die Grenzfläche auf, so wird diese zum Teil reflektiert, zum andern Teil unter dem Winkel β gebrochen. Sind c_1 und c_2 die entsprechenden Schallgeschwindigkeiten, so erhält man den akustischen Brechungskoeffizienten aus der Beziehung

$$|\mathfrak{n}| = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}, \tag{1/24}$$

wobei sich der komplexe akustische Brechungskoeffizient wie folgt schreiben läßt:

$$\mathfrak{n} = \sqrt{1 - i\frac{s}{\omega\,\varrho_1}}, \tag{1/25}$$

s bezeichnet den spezifischen Strömungswiderstand des dichteren Stoffes und ϱ_1 die Luftdichte. Die komplexe Größe $\mathfrak{n}$ enthält auch den Phasensprung an der Grenzfläche zwischen reflektiertem und gebrochenem Strahl. Da nach Gleichung (1/25) für kleine Frequenzen $|\mathfrak{n}|$ einen sehr großen Wert besitzt, ist der Grenzwinkel der Totalreflexion $\sin\beta_t = 1/|\mathfrak{n}|$ sehr klein, d. h. alle in beliebiger Richtung vom Luftraum auf die Grenzfläche fallenden Schallstrahlen werden in einem schlanken Kegel mit dem Öffnungswinkel $2\,\beta_t$ im dichteren Medium weitergeleitet.

Die wichtige Frage nach dem Verhältnis der Intensitäten von gebrochenem und reflektiertem Schallstrahl läßt sich in übersichtlicher Weise beantworten, wenn man das Verhältnis der Schallwellenwiderstände $q = \frac{c_1\,\varrho_1}{c_2\,\varrho_2}$ einführt. Sind α und β wieder Einfalls- und Brechungswinkel, so wird die reflektierte Intensität:

$$I_r = I_0 \frac{\left(q\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - 1\right)^2}{\left(q\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} + 1\right)^2} \tag{1/26}$$

und die Intensität des gebrochenen Strahles

$$I_d = I_0 \frac{4\,q}{\left(q\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} + 1\right)^2}. \tag{1/27}$$

Die beiden Beziehungen (1/26) und (1/27) lassen erkennen, daß z. B. beim Übergang des Schalles von Luft in Wasser bzw. in umgekehrter Richtung wegen des großen Unterschiedes der Wellenwiderstände (1 : 3300) selbst bei senkrechtem Einfall nur 0,12% der Schallstärke in das zweite Medium eindringen.

§ 2 ALLGEMEINES ÜBER ELEKTROAKUSTISCHE WANDLER (*21, 32, 57, 72*)

2,1 **Begriffsbestimmung**

Die jüngste Entwicklung der Akustik ist, wie bereits im § 1 kurz angedeutet, durch weitgehende Anwendung elektrischer Erzeugungs- und Meßmittel gekennzeichnet. Nur in Ausnahmefällen bedient man sich heute noch rein akustischer Schallgeber (siehe § 3,2). Wegen ihres meist geringen Wirkungsgrades und der damit verbundenen kleinen abstrahlbaren Leistung und einer oft umständlichen Handhabung werden elektroakustische Geräte vorgezogen.

Unter einem elektroakustischen Wandler versteht man allgemein einen Apparat, mit dem man elektrische in mechanische Schwingungen und umgekehrt meist mit gutem Wirkungsgrad umwandeln kann. Die bekanntesten Vertreter dieser Geräte sind Telephon und Lautsprecher, in denen durch die in einem elektromagnetischen Feld erzeugbaren Kräfte eine Umsetzung von akustischer Energie in elektrische bzw. umgekehrt erfolgt; man spricht dann in diesem Fall von elektromagnetischen Wandlern. Neben diesen lassen sich für denselben Zweck noch eine Reihe anderer elektrischer Vorgänge anwenden, wie im folgenden gezeigt wird. In fast allen Fällen ist der Wirkungssinn der elektroakustischen Wandler umkehrbar, d. h. mit demselben Gerät sind Schallwellen erzeugbar und nachzuweisen. Im Gegensatz hierzu ist die Bezeichnung Wandler z. B. für das Kohlemikrophon streng genommen unrichtig, da dieses nicht die Schallenergie in elektrische verwandelt, sondern lediglich steuert, wofür die Bezeichnung Relaisempfänger angebracht ist.

Im folgenden soll ein kurzer einführender Abriß der Theorie der elektroakustischen Wandler gebracht werden; eine eingehende Darstellung ist durch HECHT (*56*) gegeben worden.

2,2 **Differentialgleichung der elektroakustischen Wandler** (*33*)

Um das dynamische Verhalten eines Wandlers und dessen Wechselstromwiderstand kennenzulernen, und ferner verschiedene Bauarten miteinander vergleichen zu können, werden für den einzelnen Wandler für seine Verwendung als Sender oder Schallempfänger mechanische und elektrische Differentialgleichungen abgeleitet, die die mechanischen und elektrischen Konstanten des schwingungsfähigen Systems enthalten. Der grundsätzliche Aufbau des elektroakustischen Wandlers ist in der Abb. 223 wiedergegeben. Sender wie Empfänger bestehen aus dem Gestell A (Gehäuse) mit der Masse m_1, an dem die für die akustische Abstrahlung wirksame Fläche B, die die Masse m_2 besitzen soll, federnd befestigt ist. Durch ein elektrisches System wird zwischen dem Gestell A und der Membran B eine periodische Kraft $\mathfrak{K} = K\, e^{i\omega t}$ ausgeübt, die zu einer periodischen Relativbewegung der Größe x führt. Da nur der zwischen A und B bestehende Relativausschlag x von Interesse ist, läßt sich eine reduzierte Masse $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ einführen, mit welcher schließlich die *mechanische Differentialgleichung* des Schallsenders lautet:

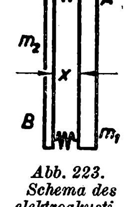


Abb. 223. Schema des elektroakustischen Wandlers.

$$m\,\ddot{x} + r\,\dot{x} + s\,x = \mathfrak{K}, \qquad (2/1)$$

wenn r den Reibungskoeffizient und s die Federkraft bedeuten. Unter den möglichen Verhältnissen m_1/m_2 sind vor allem zwei besondere Fälle von Interesse. Sehr häufig ist die Anordnung mit $m_2 \ll m_1$, bei der also $m = m_2$ wird und die gesamte Schwingungsenergie sich fast ausschließlich auf die Membranmasse verteilt. Zugleich wird die Amplitude x der Absolutwert des Ausschlages. Der zweite Spezialfall für $m_1 = m_2$ führt zu symmetrischen Schwingungen gegen eine Symmetrieebene (Doppelsender).

Die *elektrische Differentialgleichung des elektroakustischen Senders* läßt sich am übersichtlichsten aus dem Energieprinzip ableiten, d. h. die im Zeitelement $d\,t$ an den Sender abgegebene elektrische Leistung $u \cdot i$ (Spannung u, Strom i) muß gleich der im Sender während der Zeit $d\,t$ verbrauchten Energiebeträge sein. Bezeichnet man mit N_e und N_m die Augenblickswerte der elektrischen und mechanischen Wirkleistung und mit E_e und E_m die Momentanwerte der leistungslos im Sender schwingenden elektrischen und mechanischen Energiebeträge, so gilt

$$u\,i\,dt = N_e\,dt + N_m\,dt + d E_e + d E_m ,$$

woraus folgt:

$$u\,i = N_e + N_m + \frac{d\,E_e}{d\,t} + \frac{d\,E_m}{d\,t}. \qquad (2/2)$$

Mit $N_m + d\,E_m/d\,t = \mathfrak{K}\,\dot{x}$ wird

$$u\,i = N_e + d\,E_e/d\,t + \mathfrak{K}\,\dot{x}. \qquad (2/3)$$

Die Größe E_e läßt sich entweder aus der Energie des elektrischen bzw. magnetischen Feldes im Antriebssystem oder aus der zwischen beweglichem und festem Teil des Gebers wirkenden Kraft und der Länge der Kraftlinien berechnen. Bezeichnet man mit x_0 den Abstand der beiden Polflächen in der Ruhelage, so kann man auch schreiben

$$E_e = \mathfrak{K}\,(x_0 - x),$$

woraus für

$$d\,E_e/d\,t = (x_0 - x)\,\dot{\mathfrak{K}} - \mathfrak{K}\,\dot{x}$$

folgt. Mit dieser Beziehung geht Gleichung (2/3) über in:

$$u\,i = N_e + (x_0 - x)\,\dot{\mathfrak{K}}. \qquad (2/4)$$

Da man das Kraftgesetz und damit auch seine Ableitung $\dot{\mathfrak{K}}$ aus dem Aufbau des Antriebssystems des Senders kennt, läßt sich aus der Beziehung (2/4) die erforderliche elektrische Leistung ermitteln.

Soll die *mechanische Differentialgleichung des Empfängers* aufgestellt werden, so ist zu beachten, daß durch die ankommende Schallwelle an der Membran die periodische Kraft $\mathfrak{P}$ bzw. die Amplitude x auftritt, infolge der Rückwirkung des Antriebssystems eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft $\mathfrak{K}$ jedoch hinzutritt. Daraus ergibt sich die Empfängergleichung

$$m\,\ddot{x} + r\,\dot{x} + s\,x + \mathfrak{K} = \mathfrak{P}. \qquad (2/5)$$

Für die *elektrische Differentialgleichung des Empfängers* wird analog wie beim Sender vom Energieprinzip ausgegangen. Wie nicht im einzelnen abgeleitet werden soll, erhält man hierfür die Beziehung:

$$N_e + (x_0 + x)\,\dot{\mathfrak{K}} = 0, \qquad (2/6)$$

worin x_0 wieder der Abstand der Polflächen im Ruhezustand ist. Aus dieser Beziehung läßt sich die Kraft $\mathfrak{K}$ und ihre zeitliche Ableitung als Funktion des Ausschlages x gewinnen und in Gleichung (2/5) einsetzen. Daraus erhält man eine rein mechanische Differentialgleichung, in der die elektrischen Schaltelemente in mechanische Größen übersetzt erscheinen.

Bevor die physikalischen Einzelheiten der Erzeugung der periodischen Kraft $\mathfrak{K}$ näher besprochen werden, sei noch auf einen wichtigen Punkt hingewiesen. Wie sich im folgenden zeigen wird, tritt das Kraftgesetz bei fast allen Wandlern in der Form $\mathfrak{K} \sim (F_0 + \mathfrak{F})^2$ auf, d. h. die Kraft ist proportional dem Quadrat aus der Summe einer konstanten Feldgröße F_0 (magnetische Induktion, elektrische Verschiebung) und einem sich periodisch ändernden Feldanteil $\mathfrak{F}$. Die Kraft setzt sich daher aus den Anteilen $F_0^2 + 2\,F_0\,\mathfrak{F} + \mathfrak{F}^2$ zusammen, von denen die konstante Kraft F_0^2 für das dynamische Verhalten des Wandlers von geringem Interesse ist, da im Schallfeld nur periodisch sich ändernde Größen auftreten.

Ist der Wechselanteil $\mathfrak{F} \ll F_0$, so wird $\mathfrak{K} \sim F_0\,\mathfrak{F}$ also gleichphasig und sich proportional mit $\mathfrak{F}$ ändern. Dieses Verhalten trifft man z. B. bei den elektrodynamischen Sendern oder beim Kondensatormikrophon; man spricht dann von *polarisierten Wandlern.* Überwiegt im zweiten Sonderfall $\mathfrak{F}$ die konstante Feldgröße F_0, so wird $\mathfrak{K} \sim \mathfrak{F}^2$ oder mit $\mathfrak{F} = F \cos \omega t$

$$\mathfrak{K} \sim F^2 + F^2 \cos 2\,\omega t.$$

Daraus läßt sich ersehen, daß auch bei einem *unpolarisierten Wandler* ein konstanter Kraftanteil erscheint. Die periodische Kraft tritt im Gegensatz zum polarisierten Wandler mit der doppelten Erregerfrequenz auf. Aus diesem Grunde ist der unpolarisierte Wandler für die frequenzgetreue Wiedergabe von Sprache und Musik nicht brauchbar, sondern eignet sich nur für die Erzeugung fester Schallfrequenzen.

2,3 Elektrostatischer Wandler

Da sich das Verhalten eines elektroakustischen Wandlers vollkommen beschreiben läßt, wenn neben den auf der linken Seite von Gleichung (2/1) auftretenden Konstanten das Kraftgesetz des Antriebssystems bekannt ist, teilt man diese zweckmäßig nach ihrer physikalischen Wirkungsweise ein. Eine grobe Unterscheidung ergibt sich, wenn man die Wandler in solche mit elektrischen Feldern und jene mit magnetischen Feldern in ihren Antriebssystemen einteilt.

Beim elektrostatischen Wandler, der schematisch in Abb. 224 dargestellt ist, werden zur Schallerzeugung die im elektrischen Feld zwischen den Belegungen P_1 und P_2 auftretenden mechanischen Kräfte herangezogen. Die elektrische Energie zwischen den Kondensatorplatten im Abstand a beträgt bekanntlich

$$E_e = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}\,a\,F\,, \qquad (2/7)$$

Abb. 224. Elektrostatischer Wandler.

wenn $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke, $\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}$ (ε = Dielektrizitätskonstante) die dielektrische Verschiebung und F die Fläche der beiden Platten bedeuten. Da $\mathfrak{E} \cdot a$ gleich der an den Platten liegenden Spannung U_g ist, folgt

$$E_e = \tfrac{1}{2} U_g^2 \frac{\varepsilon F}{a}\,. \qquad (2/7\,a)$$

Der Ausdruck $\varepsilon \cdot F/a$ ist als gegenseitige Kapazität C des Plattenpaares bekannt, so daß man für E_e den bekannten Ausdruck $E_e = \frac{1}{2} U_g^2 C$ erhält. Die zwischen den beiden Platten wirksame Kraft ergibt sich aus $K = \partial E_e/\partial a$, woraus folgt:

$$K = \frac{U_g^2 \, \varepsilon F}{2 a^2} = U_g^2 \, C/2 \, a \,. \tag{2/8}$$

Setzt sich die Spannung an den Platten aus einem Gleichspannungsanteil U_0 und der meist kleineren Wechselspannung U zusammen, so erhält man für die Kraft K_g den Ausdruck

$$K_g = \frac{C}{2 \, a_0} (U_0 + U)^2 , \tag{2/9}$$

bzw. für den Wechselanteil K beim Gleichgewichtsabstand a_0

$$K = U_0 \, U \frac{C}{a_0} . \tag{2/9a}$$

Ist i der vom Wandler im Sendefall aufgenommene Strom, so lassen sich die elektrischen Verluste N_e durch den Verlustwiderstand R_v ausdrücken, der die Ohmschen und dielektrischen Verluste enthalten soll. Außerdem ist für die Ableitung der elektrischen Differentialgleichung des elektrostatischen Wandlers nach Gleichung (2/4) die zeitliche Ableitung der Wechselkraft erforderlich, also

$$\dot{K} = \frac{C}{a_0} (U_0 + U) \, \dot{U} \, .$$

Führt man an Stelle von x den Plattenabstand a bzw. für den Gleichgewichtsabstand den Wert a_0 ein, so folgt

$$u \, i = i^2 R_v + \frac{C}{a_0} (U_0 + U) \, a_0 \, \dot{U} - a \, \dot{K} \, . \tag{2/10}$$

Daraus erhält man durch Division mit i die elektrische Differentialgleichung des elektrostatischen Senders zu:

$$u = i \, R_v + U_0 + \frac{\int i \, d t}{C_0} - \frac{a}{i} \dot{K} \, , \tag{2/11}$$

worin U_0 die polarisierende Gleichvorspannung und C_0 die Kapazität des Plattenpaares im Gleichgewichtszustand ist.

Für den elektrostatischen Wandler als *Schallempfänger*, also für das Kondensatormikrophon, lautet nach Gleichung (2/5) die mechanische Differentialgleichung:

$$m \, \ddot{a} + r \, \dot{a} + s \, a + \frac{C}{a_0} U_0 U = \mathfrak{P} , \tag{2/12}$$

wenn man für $\mathfrak{K}$ den Ausdruck (2/9a) gebraucht, also $U < U_0$ setzt. Die elektrische Differentialgleichung des Empfängers (2/6) ist angebbar, wenn die Schaltelemente des den Kondensator schließenden Stromkreises bekannt sind. Besteht dieser aus dem Nutzwiderstand R_n und zur Verringerung des Gesamtblindwiderstandes aus der Induktivität L, so erhält man schließlich

$$\frac{U_0}{a_0} a + \left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right) \int i \, d t + (R_v + R_n) \, i = 0 , \tag{2/13}$$

woraus die gesuchte Wechselladung $\int i\,d\,t$ und damit auch wegen $\int i\,d\,t = C\,U$ bestimmt und in die Beziehung (2/12) eingesetzt werden kann. Damit ist die Lösung der mechanischen Differentialgleichung des Empfängers gefunden.

2,4 Piezoelektrischer Wandler

Die piezoelektrischen Erscheinungen des Quarzes, von Seignettesalz und Turmalin, werden besonders bei sehr hohen akustischen Frequenzen häufig zur Konstruktion von Schallgebern und -empfängern verwendet. In ähnlicher Weise wie in Abb. 32 werden dabei je nach Schnittrichtung zwei leitende Belegungen angebracht, an die im Falle des Schallgebers die erregende Wechselspannung angelegt oder an denen beim Schallempfänger die erzeugte Spannung abgenommen wird. Bezeichnet man mit U die angelegte Spannung, mit C die Kapazität des Piezokristalles, so berechnet sich nach Gleichung (9/3) des § 9,3 (1. Teil) die in Feldrichtung oder senkrecht dazu auftretende Kraft K zu

$$K = Q/d_p = C\,U/d_p\,, \tag{2/14}$$

wenn d_p die piezoelektrische Konstante ist. Damit läßt sich die mechanische Differentialgleichung des Senders, dessen Aufbau eingehend im § 3,6 beschrieben wird, analog zur Gleichung (2/1) angeben. Sie lautet

$$m\,\ddot{x} + r\,\dot{x} + s\,x = Q/d_p\,, \tag{2/15}$$

entspricht also der Differentialgleichung des polarisierten elektrostatischen Senders, wenn die Piezokraft Q/d_p der elektrostatischen Kraft $C\,U_0\,U/a_0$ aus Gleichung (2/9a) gleichgesetzt wird. Der quantitative Vergleich der beiden Wandlerausführungen zeigt jedoch, daß die beim piezoelektrischen Sender auftretenden, auf dieselbe Spannung bezogenen Kräfte um den Faktor 10^4 bis 10^6 größer sind als beim elektrostatischen Sender. Diese Angabe bezieht sich auf Quarz mit dem piezoelektrischen Modul $d_p = 2{,}1 \cdot 10^{-18}$ (C/dyn). Da außerdem bis zu sehr hohen Frequenzen die dielektrischen Verluste im Dielektrikum außerordentlich gering sind ($\mathrm{tg}\,\delta = 10^{-5}$), werden in diesem Frequenzbereich als Schallgeber und -empfänger fast ausschließlich piezoelektrische Wandler verwendet. Wegen seiner sehr scharfen Resonanzeinstellung, deren Eigenfrequenz sich aus den geometrischen Ausmaßen (siehe § 3,51, 1. Teil) ergibt, kann ein gegebener Piezoquarz nur eine bestimmte Frequenz oder deren Oberschwingungen aussenden oder empfangen.

2,5 Elektromagnetischer Wandler

Ein elektromagnetischer Wandler besteht im Prinzip (Abb. 225) aus einem permanenten Magneten M, der z. B. U-förmig gebogen sein kann und vor dessen Polflächen sich im Abstand x ein Eisenanker A befindet, der den Schalltrichter T in Schwingungen versetzen kann. Im Falle des Telephons sind Anker und Trichter zu einer dünnen Stahlmembran vereinigt. Der Gesamtmagnetfluß des Magneten M durchsetzt zweimal den Luftspalt und wird durch den Anker A geschlossen. Bezeichnet man mit μ_0 die absolute Permeabilität des Vakuums, mit μ_e die relative des Eisens und ist Φ der magnetische Gesamtfluß, so wirkt bekanntlich zwischen A und M die Kraft

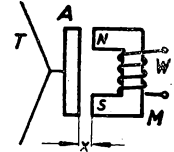


Abb. 225. Elektromagnetischer Wandler.

$$K = \frac{1}{2\,\mu_0}\left(\frac{1}{\mu_l} - \frac{1}{\mu_e}\right)\frac{\Phi^2}{F}\,, \tag{2/16}$$

wenn F der Querschnitt der Polfläche von M ist. Da praktisch $\mu_e \gg \mu_l$ und die Permeabilität von Luft $\mu_l = 1$ ist, folgt aus (2/16)

$$K = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\Phi^2}{F}. \tag{2/16a}$$

Der magnetische Fluß Φ setzt sich nun aus dem konstanten, vom Dauermagneten M herrührenden Anteil Φ_0 und dem durch die stromdurchflossene Wicklung W erzeugten Fluß Φ zusammen, so daß nach Gleichung (2/1) die mechanische Differentialgleichung des Schallgebers

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + s\,x = \frac{(\Phi_0 + \Phi)^2}{2\mu_0 F} \tag{2/17}$$

lautet. Da der konstante Fluß nur die Ruhelage x_0 des schwingenden Systems bestimmt und Φ^2 gegen Φ_0^2 vernachlässigbar ist, erhält man für den allein interessierenden Wechselanteil der Kraft den Ausdruck

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + s\,x = \frac{\Phi_0 \Phi}{\mu_0 F}. \tag{2/17a}$$

Um nach Gleichung (2/4) die elektrische Differentialgleichung für den elektromagnetischen Schallgeber angeben zu können, ist das Induktionsgesetz in der Form

$$u = n\frac{d\Phi}{dt} \tag{2/18}$$

einzuführen, worin n die Windungszahl der Wicklung und u die erzeugte Spannung ist, und ein Ausdruck für die elektrischen Verluste N_e zu suchen. Da nach (2/18) die magnetische Induktion $B = \frac{1}{Fn}\int u\,dt$ ist und die Verluste im Wandler vor allem von der Hysterese und von Wirbelströmen im Eisen herrühren und quadratisch mit der magnetischen Induktion anwachsen, lassen sich die elektrischen Verluste durch

$$N_e = \frac{u^2}{R_v} \tag{2/19}$$

darstellen, wenn R_v der entsprechende, außerdem von der Frequenz abhängige Verlustwiderstand ist. Damit wird aus Gleichung (2/4)

$$u\,i = u^2/R_v + \frac{\Phi_0 + \Phi}{\mu_0 F} x_0 \dot{\Phi} - x\dot{K}. \tag{2/20}$$

Führt man mit

$$L_0 = \frac{n^2 \mu_0 F}{x_0} \tag{2/21}$$

die auf den Abstand x_0 bezogene Selbstinduktion ein, so wird mit Beachtung von (2/18)

$$u\,i = \frac{u}{R_v} + \frac{\Phi_0 n}{L_0} u + \frac{\int u\,dt}{L_0} u - x\dot{K} \tag{2/22}$$

oder

$$i = \frac{u}{R_v} + \frac{\int u\,dt}{L_0} - \frac{x}{u}\dot{K}, \tag{2/22a}$$

wenn man den konstanten Fluß Φ_0 außer acht läßt. Für den festgebremsten Schallgeber ($x = 0$) ergibt sich daraus die Beziehung

$$i_0 = \frac{u}{R_v} + \frac{1}{L_0}\int u\,d\,t\,, \tag{2/22b}$$

woraus das elektrische Verhalten bestimmt werden kann.

Die mechanische Differentialgleichung des elektromagnetischen *Schallempfängers* läßt sich nach Gleichung (2/5) angeben zu

$$m\,\ddot{x} + r\,\dot{x} + s\,x + \frac{\Phi_0\,\Phi}{\mu_0\,F} = P\,, \tag{2/23}$$

wenn wieder $\Phi \ll \Phi_0$ ist.

Die elektrische Differentialgleichung des Empfängers soll für den in Abb. 226 dargestellten speziellen Fall abgeleitet werden. Um eine möglichst große Leistung dem Arbeitswiderstand zuführen zu können, wird als Außenwiderstand ein Ohmscher Widerstand R_a und ein parallelgeschalteter Kondensator C gewählt. Ohne Kondensator ist die abnehmbare Energie bedeutend geringer. Die Verluste im magnetischen Kreis werden durch den zu L_0 parallelgeschalteten Verlustwiderstand R_v berücksichtigt. Faßt man R_v und R_a zu $R = R_v\,R_a/(R_v + R_a)$ zusammen, so wird damit nach (2/6)

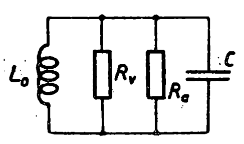


Abb. 226. Schaltschema des elektromagnetischen Wandlers.

$$N_e = \frac{u^2}{R} + C\,u\,\frac{d\,u}{d\,t}. \tag{2/24}$$

Da die in der Wicklung durch den Wechselfluß Φ induzierte Spannung $u = -n\,\dot{\Phi}$ ist, wird für eine periodische Flußänderung mit der Kreisfrequenz ω aus (2/24)

$$N_e = \frac{n^2\,\dot{\Phi}^2}{R} - C\,\omega^2\,n^2\,\Phi\,\dot{\Phi}\,. \tag{2/25}$$

Aus $K = \dfrac{(\Phi_0 + \Phi)^2}{2\,\mu_0\,F}$ folgt für

$$\dot{K} = \frac{\Phi_0\,\dot{\Phi}}{\mu_0\,F} + \frac{\Phi\,\dot{\Phi}}{\mu_0\,F}, \tag{2/26}$$

womit die elektrische Differentialgleichung (2/6) die Form erhält:

$$\frac{n^2\,\dot{\Phi}^2}{R} - C\,\omega^2\,n^2\,\Phi\,\dot{\Phi} + \frac{\Phi_0\,\dot{\Phi}}{\mu_0\,F}\,x_0 + \frac{\Phi\,\dot{\Phi}}{\mu_0\,F}\,x_0 + 2\,\frac{\Phi_0 + \Phi}{\mu_0\,F}\,\dot{\Phi}\,x = 0\,. \tag{2/27}$$

Mit Gleichung (2/21) ergibt sich daraus

$$2\,\frac{\Phi_0 + \Phi}{n^2\,\mu_0\,F}\,x + \frac{\Phi_0}{L_0} + \left(\frac{1}{L_0} - \omega^2\,C\right)\Phi + \frac{\dot{\Phi}}{R} = 0. \tag{2/28}$$

Mit $\Phi \ll \Phi_0$ und Wegfall des zweiten Gliedes ergibt sich schließlich

$$\frac{2\,\Phi_0}{n^2\,\mu_0\,F}\,x + \left(\frac{1}{L_0} - \omega^2\,C\right)\Phi + \frac{\dot{\Phi}}{R} = 0 \tag{2/29}$$

als elektrische Differentialgleichung des elektromagnetischen Empfängers, die den Zusammenhang zwischen der Amplitude x und den dadurch erzeugten Wechselfluß Φ

liefert. Die daraus erhaltenen Werte von Φ und $\dot{\Phi}$ lassen sich zur Lösung der mechanischen Differentialgleichung in (2/23) einsetzen. Für den Spezialfall eines Empfängers ohne Verluste erhält man im Leerlauf

$$\Phi = -2 \frac{x}{x_0} \Phi_0 . \tag{2/30}$$

Die weitere mathematische Behandlung richtet sich nun nach dem speziellen Anwendungsbereich und vor allem nach der Breite des zu empfangenden Frequenzbandes.

2,6 Elektrodynamischer Wandler

Der elektrodynamische Wandler ist schematisch in der Abb. 227 dargestellt und besteht aus einem permanenten Topfmagneten M, in dessen zylindrischem Ringspalt die räumlich konstante magnetische Induktion B_0 herrsche. In diesen Ringspalt taucht eine kurze Spule Sp ein, die am Schalltrichter T befestigt ist und sich in axialer Richtung bewegen kann. Ist l die Gesamtlänge des auf die Spule gewickelten Drahtes und i der durch diesen fließende Strom, so wird nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz bekanntlich die Kraft

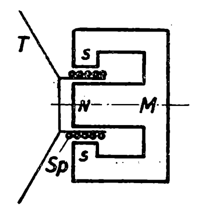


Abb. 227. Elektrodynamischer Wandler.

$$K = B_0 \cdot l \cdot i \tag{2/31}$$

ausgeübt, wenn B_0 und i aufeinander senkrecht stehen. Damit lautet die mechanische Differentialgleichung des elektrodynamischen Schallgebers:

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + s x = B_0 l i . \tag{2/32}$$

Um die elektrische Differentialgleichung aufstellen zu können, geht man nach Gleichung (2/3) vom Energieprinzip aus. Ist R_{sp} der OHMsche Widerstand der Tauchspule, so wird $N_v = i^2 R_{sp}$. Die elektrische Energie E_e berechnet sich zu $L_0 i^2/2$ (L_0 = Selbstinduktion der Spule), woraus

$$\frac{d E_e}{d t} = L_0 i \frac{d i}{d t} \tag{2/33}$$

folgt. Damit wird die gesuchte Beziehung des elektrodynamischen Schallgebers:

$$u = i R_{sp} + L_0 \frac{d i}{d t} + \frac{K}{i} \cdot \dot{x} \tag{2/34}$$

bzw. für den festgehaltenen Sender ($x = 0$)

$$u_0 = i R_{sp} + L_0 \frac{d i}{d t} . \tag{2/34a}$$

Der Lösungsansatz: $u = U_0 \sin(\omega t - \varphi_0)$ liefert die Größe des Phasenwinkels zwischen Strom und Spannung zu

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \omega \frac{L_0}{R_{sp}} . \tag{2/35}$$

Die mechanische Differentialgleichung (2/32) läßt sich mit dem Ansatz

$$x = A \sin(\omega t - \varphi_m) \tag{2/36}$$

lösen, wenn φ_m der Phasenwinkel zwischen erregender Kraft und Geschwindigkeit ist. Für die Geschwindigkeitsamplitude folgt daraus

$$\omega \cdot A = \frac{B_0\, l\, i}{r} \cos \varphi_m \tag{2/37}$$

und für die mechanische Leistung

$$N_m = \tfrac{1}{2}\,(B_0\, l)^2\, i^2 \frac{\cos \varphi_m^2}{r}. \tag{2/38}$$

Die mechanische Differentialgleichung für den elektrodynamischen Schallempfänger wird mit Gleichung (2/31)

$$m\,\ddot{x} + r\,\dot{x} + s\,x + B_0\, l\, i = P. \tag{2/39}$$

Zur Ableitung der elektrischen Differentialgleichung des Empfängers geht man von der Energiebeziehung $K\,\dot{x} = N_e + d\,E_e/d\,t$ aus, in die für K der Ausdruck (2/31) und für $N_e = i^2\,(R_{sp} + R_a)$ eingesetzt wird, wenn man den Ohmschen Außenwiderstand mit R_a bezeichnet. Ähnlich wie beim elektromagnetischen Schallempfänger wird zur teilweisen Kompensation der Blindkomponente des Stromes in den äußeren Stromkreis ein Kondensator mit der Kapazität C gelegt, so daß an Stelle von (2/33) für

$$\frac{d\,E_e}{d\,t} = L_0\, i \frac{d\,i}{d\,t} + \frac{i}{C} \int i\, d\,t \tag{2/40}$$

zu setzen ist. Damit lautet die Energie-Beziehung:

$$B_0\, l\, i\, \dot{x} = (R_{sp} + R_a)\, i^2 + L_0\, i \frac{d\,i}{d\,t} + \frac{i}{C} \int i\, d\,t\,. \tag{2/41}$$

Berücksichtigt man, daß $d\,i/d\,t = -\,\omega^2 \int i\,d\,t$ ist, so ergibt sich

$$B_0\, l\, \dot{x} = (R_{sp} + R_a)\, i + (L_0 - 1/\omega^2\, C) \frac{d\,i}{d\,t}\,. \tag{2/42}$$

Man erhält durch Integration die gesuchte Differentialgleichung des elektrodynamischen Empfängers in der Form

$$B_0\, l\, x = -\frac{R_{sp} + R_a}{\omega^2} \frac{d\,i}{d\,t} + \left(L_0 - \frac{1}{\omega^2\, C}\right) i \tag{2/43}$$

woraus Frequenzgang und erzeugte Spannung berechnet werden können.

§ 3 SCHALLGEBER

3,1 **Allgemeines**

Als Schallgeber wird eine Anordnung bezeichnet, die Schallenergie in das angrenzende Medium abstrahlen kann. Gewöhnlich stellt er ein schwingungsfähiges Gebilde dar, dessen schwingende Masse in den meisten Fällen durch die „strahlende Fläche", die Membran, gebildet wird. Ausnahmen bilden die piezoelektrischen und magnetostriktiven Sender (§ 3,5 und 3,6). Bei der rechnerischen Behandlung der Schallgeber

kann im allgemeinen vorausgesetzt werden, daß das Schwingungssystem nur einen Freiheitsgrad besitzt und die Schwingungsamplitude für die gesamte strahlende Fläche konstant ist, d. h. keine Bewegungsknoten vorhanden sind.

Je nach Art der Bewegung der strahlenden Fläche lassen sich entsprechend der im § 1,3 aufgeführten Einteilung der Strahlungsfelder folgende Typen unterscheiden: der Strahler „nullter Ordnung" wird von einer in radialer Richtung pulsierenden Kugel dargestellt und sendet Kugelwellen aus. Eine gegen die Wellenlänge kleine Membran beliebiger Gestalt, aber gleicher Schwingungsphase läßt sich mit guter Näherung in großer Entfernung ebenfalls als Strahler nullter Ordnung betrachten. Der einer oszillierenden Kugel entsprechende Strahler *erster Ordnung* wird durch eine im unbegrenzten Raum schwingende Membran, deren Durchmesser ebenfalls klein gegen die ausgestrahlte Wellenlänge ist, dargestellt, wenn beide Oberflächen an die Umgebung abstrahlen. Die kreisförmige Kolbenmembran, die in der Öffnung einer ausgedehnten Schallwand schwingt, liefert ein vom Verhältnis D/λ abhängiges, in § 1,3 bereits besprochenes interferierendes Schallfeld mit ausgesprochener Richtwirkung bei großem D/λ.

Die schallabstrahlende Fläche wird bei den meisten Schallgebern von elektrischen, speziell elektromagnetischen Kraftsystemen angetrieben, deren Wirkungsweise bereits im § 2 dargelegt wurde. Es bleibt jedoch noch die Rückwirkung der Schallabstrahlung auf das dynamische Verhalten der Membran zu besprechen. Die mit der über die ganze strahlende Fläche konstanten Geschwindigkeitsamplitude v schwingende Membran ruft die rückwirkende Kraft $p\,F$ hervor, wenn p der Schalldruck an der Fläche und F deren Flächeninhalt (auf die Bewegungsrichtung bezogen) ist. Bezeichnet man mit

$$\mathfrak{Z}_m = \frac{p}{v} F = j\,\omega\,m + r + 1/j\,\omega \qquad (3/1)$$

den mechanischen Widerstand des einfachen Schwingers und setzt man die erregende Kraft des Antriebssystems in der Form

$$\mathfrak{P} = P\,e^{j\omega t}$$

an, so ergibt sich die Beziehung

$$\mathfrak{Z}_m \cdot v = P\,e^{j\omega t} - p\,F, \qquad (3/2)$$

d. h. die Schallrückwirkung wirkt sich wie eine zusätzliche Reibungskraft aus. Benutzt man die im § 1,1 definierte akustische Impedanz pro Flächeneinheit $\mathfrak{z} = p/v$, so erhält man aus (3/2)

$$(\mathfrak{Z} + F\,\mathfrak{z})\,v = P\,e^{j\omega t}. \qquad (3/3)$$

In dieser Gleichung tritt also die Summe der Impedanzen von Schallgebersystem und Abstrahlung nach außen auf.

Die von einem Schallgeber abgestrahlte Leistung ist die von der strahlenden Fläche in der Zeiteinheit an das Schallfeld abgegebene Schallenergie und berechnet sich nach Gleichung (1/9) zu $N_s = \frac{1}{2}\,p_0\,v_0 \cos\varphi \cdot F = \frac{1}{2}\,z_1\,F\,v_0^2$, wenn man für $\mathfrak{z} = z_1 + j\,z_2$ schreibt. Das Produkt $z_1\,F$ wird „Schallstrahlungswiderstand" r_s genannt, woraus folgt:

$$N_s = \tfrac{1}{2}\,r_s\,v_0^2, \qquad (3/4)$$

und da nach (1/8) $p/v = \varrho\,c$ ist, ergibt sich

$$N_s = \tfrac{1}{2}\,F\,c\,\varrho\,v_0^2 \cos\varphi\,. \qquad (3/4\,a)$$

Diese wichtige Beziehung besagt, daß die abgestrahlte Schalleistung bei gleicher Schallschnelle dem Schallwellenwiderstand des angrenzenden Mediums proportional ist.

Je nach dem Verwendungszweck lassen sich die Schallgeber in abgestimmte Sender und solche, die über ein breites Frequenzband arbeiten, unterteilen. Beim abgestimmten Sender wird die Signalfrequenz mit der mechanischen Eigenfrequenz des schwingenden Systems in Übereinstimmung gebracht. Da die Geschwindigkeitsamplitude $v_0 = a_0/(r + r_s)$ ist, wird die abgegebene akustische Leistung

$$N_s = \tfrac{1}{2}\, a_0^2 \frac{r_s}{(r + r_s)^2} \qquad (3/5)$$

oder für den Fall optimaler Anpassung ($r = r_s$)

$$N_s = a_0^2/8\, r. \qquad (3/6)$$

Die abstrahlbare Schalleistung ist also der Reibungskonstanten r umgekehrt proportional und erreicht mit einem möglichst ungedämpften Antriebssystem große Werte.

Sender, die in einem möglichst breiten Frequenzband mit etwa konstanter Leistung abstrahlen sollen, sind bedeutend schwieriger zu bauen. Man legt zu diesem Zweck die Eigenfrequenz des Schwingsystems entweder über oder unter den abzustrahlenden Frequenzbereich, muß aber mit relativ kleinen Wirkungsgraden vorliebnehmen.

3,2 Mechanische Schallerzeugung (*74*)

In einigen Fällen werden bei Schallmeßverfahren mechanische Schallerzeuger, wie Luftpfeifen, transversal und longitudinal schwingende Stäbe, Saiten und Membranen verwendet. Im allgemeinen ist die erzeugbare Frequenz konstant oder um ganzzahlige Vielfache veränderlich und die abgegebene Schalleistung gering. Der große Vorteil dieser Schallgeber liegt vor allem darin, daß die Frequenz mit großer Genauigkeit aus den geometrischen Abmessungen und den genau bekannten Stoffwerten berechnet werden kann. Einige dieser Schallsender haben sich vor allem als Frequenznormal im Hörbereich von Bestand erwiesen.

3,21 *Pfeifen*

Erregt man durch eine geeignete Anordnung eine in einem Zylinder befindliche Gasmasse zu periodischen Schwingungen, so ist die dabei entstehende Frequenz für eine beiderseits offene Pfeife

$$\nu_k = \frac{c\,(k+1)}{2\,l} \quad (k = 0, 1, 2, 3\,\ldots) \qquad (3/7)$$

und für eine einseitig geschlossene („gedackte") Pfeife

$$\nu_k' = \frac{c\,(2\,k+1)}{4\,l} \quad (k = 0, 1, 2, 3\,\ldots). \qquad (3/8)$$

In diesen Gleichungen bedeuten l die Pfeifenlänge, c die Schallgeschwindigkeit in dem betreffenden Gas und k eine ganzzahlige Laufzahl, die die betreffende Oberschwingung bestimmt und gleich der Anzahl der Schwingungsbäuche im Rohr ist. Daraus folgt für die Wellenlängen der erzeugten Schwingungen

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 2\,l/(k+1) \\ \text{bzw.}\quad &= 4\,l/(k+1). \end{aligned} \qquad (3/9)$$

Die Schwingungsanregung geschieht bei der *Lippenpfeife* (*86*) durch eine vom Luftstrom angeblasene scharfe Schneide, welche die Frequenz $\nu_s = u/d$ erzeugt, wenn u die Anströmgeschwindigkeit und d der Abstand Schneide-Anströmspalt ist. Wird eine resonanzfähige Luftsäule angeschlossen, so ist deren Frequenz zwar durch (3/7) bzw. (3/8) gegeben, man wird jedoch ν_s an diese anpassen. Bei größerer Anblasgeschwindigkeit u bzw. kleinerer „Maulweite" d lassen sich die durch k bestimmten Oberschwingungen anregen. Die mit Pfeifen erzeugten Schwingungen sind im allgemeinen sehr oberwellenarm.

Bei der *Zungenpfeife* (*92*) ist der Zutritt der Luft zur eigentlichen Pfeife durch eine einseitig eingespannte Stahlzunge, die in einer genau passenden Öffnung schwingen kann, versperrt. Beim Anblasen wird der Zustrom der Luft periodisch verändert und somit die Schwingung der Luftsäule angeregt. Durch passende Bemessung der Stahlzunge wird deren Eigenschwingung in Resonanz mit der der Luftsäule gebracht.

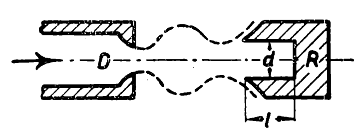


Abb. 228. HARTMANN-Generator.

Für akustische Meßverfahren sind spezielle Lippenpfeifen von Bedeutung, bei denen durch besonders kleine Luftsäulen sich sehr hohe bis in den Ultraschallbereich reichende Schwingungszahlen erzeugen lassen.

Bei der als *Galtonpfeife* bekannten Anordnung wird der Luftstrahl gegen einen geschlossenen Luftraum kleiner Abmessungen geblasen und dieser in seiner Eigenfrequenz erregt. Durch einen mit einer Mikrometerschraube verstellbaren Kolben lassen sich die Pfeifenlängen und damit verschiedene Frequenzen einstellen.

Relativ große Schalleistungen bis zu 50 W und hohe Frequenzen liefert der von Hartmann (*55*) angegebene Schallgenerator. Ähnlich wie das Galtonpfeifchen besteht dieser, wie aus der schematischen Darstellung in Abb. 228 ersichtlich ist, aus einer zylindrischen, an der Ausflußöffnung eingeschnürten Düse D, die in geringem Abstand dem geschlossenen Resonator R gegenübersteht. Die Frequenz der zwischen D und R entstehenden Luftschwingung ist aus der Länge l und dem Durchmesser d des auswechselbaren Resonators durch die Beziehung $\nu = \frac{c}{4\,(l + 0{,}3\,d)}$ gegeben. Mit Luft lassen sich 120 kHz, mit Wasserstoff wegen der größeren Schallgeschwindigkeit bis 500 kHz bei einem Wirkungsgrad von etwa 5% erreichen.

3,22 *Stabschwingungen*

Longitudinal schwingende zylindrische Stäbe lassen sich für hohe Frequenzen im Hörbereich als Frequenznormale, bei magnetostriktiver Anregung in hohen Oberschwingungen als Schallgeber im Ultraschallgebiet verwenden. Wie bereits im 1. Teil, § 11,24 behandelt, berechnet sich die Grundschwingung eines in der Mitte eingespannten Stabes von der Länge l zu

$$\nu_0 = \frac{1}{2\,l}\sqrt{\frac{E}{\varrho}}, \tag{3/10}$$

wenn E der Elastizitätsmodul und ϱ die Dichte des Stabmaterials ist. Beim praktischen Gebrauch als Frequenznormal regt man gewöhnlich die erste Oberwelle an und hängt den Stab, der meistens an den Bewegungsknoten etwas eingedreht ist, an zwei

Fadenschlingen horizontal auf. Durch geeignete Anregung bzw. Auflage an den Knotenlinien der gewünschten Oberschwingung lassen sich die Frequenzen

$$\nu_k = \frac{k+1}{2\,l}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots) \tag{3/11}$$

anregen. Zum Frequenzvergleich im Hörbereich werden diese Stäbe mit einem weichen Hammer kurz angeschlagen, für genauere Messungen solche aus magnetostriktivem Material verwendet und elektromagnetisch angetrieben (§ 3,5). HOLTZMANN (*63*) hat ein Verfahren angegeben, mit dem ein in der Mitte eingespannter Stab mechanisch zu gleichbleibenden Schwingungen angeregt werden kann. Durch zwei endlose Bänder (Leder mit Seide bezogen), die durch mehrere Rollen an die eine Stabhälfte gedrückt werden und in Richtung der Stabachse umlaufen, gerät der Stab in Schwingungen und strahlt am anderen zweckmäßig kugelförmig ausgebildeten Stabende eine relativ große Schallintensität ab.

Biegeschwingungen zylindrischer Stäbe werden zu Meßzwecken wegen der im Vergleich zu longitudinal schwingenden Stäben viel größeren Dämpfung durch Abstrahlung nur in Form der *Stimmgabel* verwendet. Wie im I. Teil, § 3,4 näher angegeben wurde, lassen sich mit der elektrisch angetriebenen Stimmgabel bei konstant gehaltener Temperatur und gleichbleibenden Luftdruck außerordentlich genaue Frequenz- und Zeitbestimmungen mit einer Fehlergrenze von $\pm\, 10^{-7}$ durchführen.

3,23 *Saiten- und Membranschwingungen* (*4, 87*)

Bei transversal schwingenden Drähten spricht man dann von einer Saitenschwingung, wenn das Biegungsmoment gegenüber der Saitenspannung vollkommen zurücktritt. Die Frequenz der durch Zupfen oder Streichen angeregten Saite berechnet sich aus der bereits 1715 von TAYLOR abgeleiteten Beziehung zu

$$\nu_k = \frac{k+1}{2\,l}\sqrt{\frac{P}{q\,\varrho}} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots), \tag{3/12}$$

worin P die in kg gemessene Saitenspannung, l die Saitenlänge, q den Querschnitt, ϱ deren Dichte und k die Ordnungszahl der Schwingung bedeuten. Der Gehalt an Oberwellen hängt stark von den Anregungsbedingungen und der Art der Anfachung (Streichen, Zupfen, Schlagen) ab und bedingt die Klangfarbe von Saiteninstrumenten.

Erwähnenswert ist die Möglichkeit der Temperaturmessung durch Messung der Schwingungsfrequenz einer fest eingespannten, durch die Wärmedehnung in ihrer Spannung veränderlichen Saite.

Unter einer *Membran* versteht man eine schwingende Fläche, die im Gegensatz zur Platte keine Biegeschwingungen ausführen, sondern nur transversal schwingen kann, wenn sie durch eine an der Berandung angreifende Kraft gespannt ist. Als Material für Membranen lassen sich Gummihäutchen, Papier, Glimmer oder Metallfolien verwenden. Für die Eigenfrequenz einer quadratischen Membran der Kantenlänge a liefert die Theorie die Beziehung:

$$\nu_{k,\,l} = \frac{1}{2\,a}\sqrt{(1+k)^2 + (1+l)^2}\sqrt{\frac{P}{\varrho}}, \tag{3/13}$$

worin P die spannende Kraft je Zentimeter Umrandung, ϱ die Dichte und k bzw. l die Ordnungszahl der Oberschwingungen in den zwei zueinander senkrechten Richtungen bedeuten. In derselben Weise lassen sich für die kreisförmige Membran ähnliche Formeln aufstellen. In Abb. 229 sind die Knotenlinien einer kreisförmigen Membran für verschiedene Eigenschwingungszahlen dargestellt, wobei die beigefügten Zahlen die auf die Grundschwingungszahl ν_0 bezogenen Eigenfrequenzen bedeuten.

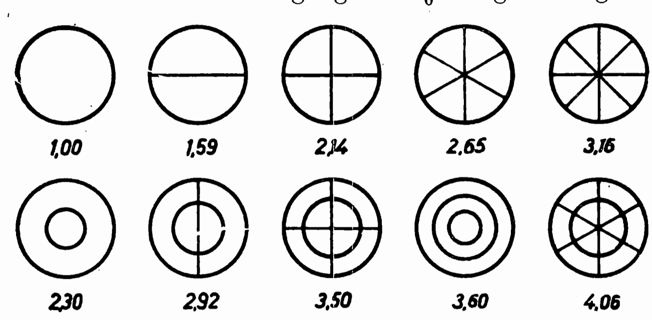


Abb. 229. Eigenschwingungen kreisförmiger Membranen.

Im Gegensatz hierzu besitzen *Platten* Biegungselastizität und können auch bei freier Berandung Eigenschwingungen ausführen. Angaben darüber und über die Schwingungsformen sind aus § 11, 32 (I. Teil) zu entnehmen.

In den weitaus meisten Fällen treten Membranen und Platten nicht als Schallgeber im eigentlichen Sinne, sondern gewöhnlich als strahlende Fläche elektroakustischer Wandler auf, doch ist die Frage der auftretenden Eigenfrequenzen für die Größe des akustischen Strahlungswiderstandes von Interesse.

3,3 *Lautsprecher* (*136*)

Als Lautsprecher werden elektroakustische Wandler bezeichnet, die die Aufgabe haben, Sprache und Musik, die diesen als elektrische Wechselströme zugeführt werden, in akustische Schwingungen umzusetzen. Der zu bestreichende Frequenzbereich umfaßt 20 bis 16000 Hz bei einer zugeführten elektrischen Leistung von 10^{-4} bis 10^2 Watt. Bei akustischen Meßverfahren dient der Lautsprecher als Schallquelle zur Ermittlung der Schalldämmung und -absorption, der Klanganalyse, wozu die abgestrahlte Schalleistung in Abhängigkeit von der Frequenz und Abstrahlrichtung bekannt sein muß.

3,31 *Allgemeine Eigenschaften*

Von wesentlicher Bedeutung ist die Frage nach dem *Wirkungsgrad* eines Lautsprechers, der bekanntlich vom mechanischen und elektrischen Aufbau, ferner von den akustischen Verhältnissen abhängt.

Ausgehend von der allgemeinen Gleichung (2/34) lautet für den speziellen Fall des elektrodynamischen Lautsprechers die elektrische Differentialgleichung

$$L_0 \frac{d\,i}{d\,t} + R_{sp}\, i + B_0\, l\, \dot{x} = u_0\, e^{j\omega t}. \tag{3/14}$$

Die Geschwindigkeit $\dot{x}$ des Systems wird aus der mechanischen Gleichung (2/32) zu

$$\dot{x} = \frac{B_0\, l\, i}{r + j\left(m\,\omega - \frac{s}{\omega}\right)} \tag{3/15}$$

berechnet und kann in (3/14) eingesetzt werden. Damit ergibt sich der elektrische Widerstand des elektrodynamischen Lautsprechersystems zu:

$$\mathfrak{R} = R_{sp} + j\,\omega\,L_0 + \frac{B_0^2\,l^2\,i}{r + j\left(m\,\omega - \frac{s}{\omega}\right)}. \tag{3/16}$$

Der Widerstand $\mathfrak{R}$ setzt sich also aus der Impedanz der festgehaltenen Membran $R_{sp} + j\,\omega\,L_0$ und der Bewegungsimpedanz

$$\mathfrak{Z} = \frac{B_0^2\,l^2}{r + j\left(m\,\omega - \frac{s}{\omega}\right)} \tag{3/16a}$$

zusammen. Unter Berücksichtigung des in Gleichung (3/4) eingeführten Strahlungswiderstandes r_s und der in m enthaltenen mitschwingenden Mediummasse erhält man an Stelle von (2/32)

$$m\,\ddot{x} + (r + r_s)\,\dot{x} + s\,x = B_0\,l\,i. \tag{3/17}$$

Damit tritt für die Bewegungsimpedanz an Stelle von Gleichung (3/16a) mit der Abkürzung $\mathfrak{S} = r + r_s + j\left(m\,\omega - \frac{s}{\omega}\right)$ die Beziehung

$$\mathfrak{Z} = \frac{B_0^2\,l^2}{\mathfrak{S}} = \frac{B_0^2\,l^2}{|\mathfrak{S}|^2}(r + r_s) - j\,\frac{B_0^2\,l^2}{|\mathfrak{S}|^2}\left(m\,\omega - \frac{s}{\omega}\right) = r_m - j\,t_m. \tag{3/18}$$

Daraus ergibt sich für die elektrische Wirkleistung der Ausdruck $\frac{1}{2}\,i^2\,(R_{sp} + r_m)$, für die mechanische Leistung $\frac{1}{2}\,i^2\,r_m$ und somit für den mechanisch-elektrischen Wirkungsgrad

$$\eta_1 = \frac{r_m}{R_{sp} + r_m}. \tag{3/19}$$

Da der akustisch-mechanische Wirkungsgrad entsprechend (3/5)

$$\eta_2 = \frac{r_s}{r + r_s} \tag{3/20}$$

ist, wird der Gesamtwirkungsgrad der elektrisch-akustischen Übersetzung im Lautsprecher

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 = \frac{r_s}{r + r_s + \frac{R_{sp}}{B_0^2\,l^2}\,|\mathfrak{S}|^2}, \tag{3/21}$$

woraus sich die Forderung nach kleinen mechanischen und elektrischen Widerständen ablesen läßt. Im Fall des abgestimmten Signalsenders ist dieser Bedingung weitgehend zu entsprechen, für einen großen Frequenzbereich ist das sehr schwierig.

Die zweite für die Beurteilung eines Lautsprechers wichtige Eigenschaft ist sein *Frequenzverhalten*, d. h. die Abhängigkeit der abgestrahlten Schalleistung von der Frequenz. Die mechanische Gleichung erlaubt in einigen Fällen eine qualitative Voraussage, im allgemeinen wird jedoch die Frequenzkurve experimentell aufgenommen. Nach Meyer und Just (*107*) läßt sich die recht mühselige punktförmige Aufnahme der Schalleistung umgehen, wenn man in Analogie zur Ulbrichtschen Kugel den

Schallsender in einem Raum geringer Absorption untersucht. Unter gewissen Voraussetzungen stellt sich nach JAEGER in einem solchen Raum eine konstante Energiedichte $E = p^2/c^2 \cdot \varrho$ ein, die sich aus der zugeführten Schalleistung $N = I \cdot F$ durch die Beziehung

$$E = \frac{4\,N}{A \cdot c} \tag{3/22}$$

ergibt, wenn c die Schallgeschwindigkeit ist. A stellt die gesamte Schallabsorption des Raumes dar, die sich aus dem Nachhall bestimmen läßt. Beobachtet man die Abnahme der Schalldruckamplitude während des Nachhallvorganges auf 10^{-3} des Anfangswertes, so besteht zwischen der Nachhallzeit t und dem gesamten Raumvolumen die Gleichung

$$A = 0{,}16\ \mathrm{V/t}. \tag{3/23}$$

Die Schalleistung wird nach Gleichung (1/9) aus dem Schalldruck bestimmt, wobei nicht die Messung der von der Frequenz abhängigen Relativwerte genügt, sondern der Schallempfänger absolut zu eichen ist.

Schließlich ist besonders für die Bedürfnisse der Praxis die Abhängigkeit der abgestrahlten Schalleistung von der Richtung, die *Richtcharakteristik* von Bedeutung. Am bequemsten mißt man zu diesem Zweck in einem nachhallfreien Raum punktweise durch einen Schallempfänger mit Registriervorrichtung den Schalldruck aus, wobei mit einem Überlagerungssummer die Frequenz stetig zwischen 20 und 16000 Hz verändert wird. Gleichzeitig wird neben den Ausschlägen des Schallempfängers die am Lautsprecher liegende Spannung u registriert, um den Schalldruck auf die elektrische Leistung beziehen zu können. Bei kreissymmetrischen Membranen genügt es, ausgehend von der Mittelachse in einer horizontalen Ebene, einen Quadranten auszumessen.

3,32 *Elektromagnetischer Lautsprecher* (*89*)

Der grundsätzliche Aufbau des elektromagnetischen Lautsprechers ist aus der schematischen Abb. 225 zu ersehen. Der Anker A aus weichem Eisen ist mit der Membran M verbunden, die entweder die Form eines flachen Kegels oder auch wie beim Faltlautsprecher nach GERLACH V-förmig gefaltet und im Gegensatz zum Konuslautsprecher nur an den beiden parallelverlaufenden Rändern fest eingespannt sein kann. Wie aus der Gleichung (2/17 a) hervorgeht, ist die an der Membran angreifende Kraft dem magnetischen Fluß zwischen Anker und Feldmagnet proportional. Um andererseits besonders die für die natürliche Wiedergabe niedriger Frequenzen erforderlichen großen Bewegungsamplituden zu erreichen, ohne den Gesamtfluß wesentlich zu ändern, ist eine sehr große magnetische Durchflutung notwendig. Bei zu kleinem Abstand zwischen Anker und Magnet ändert sich der magnetische Fluß Φ_0, wodurch die dem Produkt $\Phi_0\,\Phi$ proportionale Kraft nicht mehr dem Spulenstrom verhältnisgleich wird.

Dieser Nachteil des ursprünglichen elektromagnetischen Systems, das nur noch beim Fernhörer anzutreffen ist und in diesem Fall wegen der geringen Bewegungsamplituden nicht wesentlich in Erscheinung tritt, wird beim sog. *Freischwinger* vermieden. Bei dieser Bauart wirkt im stromlosen Zustand im Gegensatz zur Abb. 225 keine Kraft auf den Eisenanker. Wie aus dem in Abb. 230 dargestellten Ausführungsbeispiel zu ersehen ist, besteht dieses Antriebssystem aus zwei permanenten Magneten

M_1 und M_2, zwischen denen sich ein schmaler Eisenanker A befindet, der bei D federnd eingespannt ist und am anderen Ende an der Lautsprechermembran T angreift. Es ist leicht zu übersehen, daß der permanente Fluß Φ_0 unabhängig von der Lage des Ankers ist. Eine den Anker umfassende Spule Sp erzeugt in diesem den Wechselfluß Φ, der sich zu Φ_0 in einer Richtung addiert und eine entsprechende Parallelbewegung des Ankers zur Folge hat. Dadurch wird der wesentlichste Nachteil des ursprünglichen Systems, das Auftreten nichtlinearer Verzerrungen, vermieden. Allerdings ist dieser Antrieb im allgemeinen für eine vollendete musikalische Wiedergabe zu hoch abgestimmt. Ein weiterer Nachteil des elektromagnetischen Lautsprechers, die schlechte Wiedergabe der hohen Frequenzen, die mit den quadratisch mit der Frequenz anwachsenden Magnetisierungsverlusten im Eisen zusammenhängt, haftet jedoch allen derartigen Systemen an.

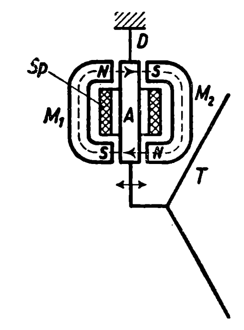


Abb. 230. Freischwinger-Lautsprecher.

3,33 *Elektrodynamischer Lautsprecher*

Der in Abb. 227 dargestellte schematische Aufbau des elektrodynamischen Lautsprechers wird in den meisten Fällen auch in der Praxis beibehalten. Da die an der Membran angreifenden Kräfte der magnetischen Induktion B_0 proportional sind, ist die Erzeugung eines starken magnetischen Flusses Φ_0 von besonderer Bedeutung. Die Verwendung leistungsstarker Magnetstähle von großer Remanenz sichert starke Felder von 5 bis 10 kGs im Luftspalt. Eine andere vielfach ausgenutzte Möglichkeit, das magnetische Feld mit Hilfe eines mit Gleichstrom beschickten Elektromagneten zu erzeugen, liefert eine noch größere magnetische Induktion und wird bei besonders leistungsfähigen Lautsprechersystemen angewandt. Ein Ausführungsbeispiel eines solchen „vollelektrodynamischen" Lautsprechers ist in Abb. 231 dargestellt. Der Elektromagnet M ist in Form eines Topfmagneten mit zylindrischem, sehr engem Spalt von etwa 1 mm ausgeführt und wird durch die dünndrähtige Wicklung W erregt. Die Tauchspule Sp, die aus einer Lage dünnen Drahtes besteht, die auf einen isolierenden dünnwandigen Spulenkörper gewickelt ist, ist zentrisch an der Konusmembran T befestigt und kann in Richtung der Symmetrieachse des Magneten schwingen. Die Membran aus dickem Papier oder Preßspan ist an ihrem Umfang im Gehäuse G, dem „Lautsprecherkorb", sehr weich und nachgiebig (dünnes Leder!) gelagert. Andrerseits wird die Spule Sp in der Schwingungsrichtung durch eine weiche, gewellte Membranfeder F oder durch eine biegungsweiche, durchbrochene Plattenfeder geführt und in der Ruhestellung gehalten. Durch diesen Aufbau lassen sich wegen der geringen Rückstellkräfte und kleinen bewegten Massen tiefe Eigenfrequenzen erreichen. Da außerdem große Bewegungsamplituden möglich sind, ist die akustische Wiedergabe auch bei tiefen Frequenzen leistungsstark und verzerrungsarm.

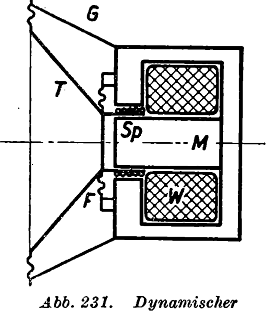


Abb. 231. Dynamischer Lautsprecher.

Ein weiterer Vorteil des elektrodynamischen Systems, durch eine kurze Verbindung der schallstrahlenden Fläche mit der Tauchspule die Stromkräfte unmittelbar auf

die Membran übertragen zu können und damit das Ideal der Kolbenmembran zu verwirklichen, wird beim *Blatthaller* nach RIEGGER ausgenutzt. Dieser besteht, wie in der Abb. 232 gezeigt ist, aus langgestreckten parallel verlaufenden Magnetpolen wechselnder Polarität, die durch die Wicklungen W_1 und W_2 erregt werden. Die unmittelbar an der quadratischen Membran M befestigte Stromspule Sp ist mäanderförmig gewunden und besteht nur aus einem hochkantstehenden Metallband. Durch diese Bauweise wird erreicht, daß an der dünnen, aus Duraluminium bestehenden Membran überall dieselbe Kraft angreift, wodurch die Membran in der Grundschwingung erregt und die Abstrahlung hoher Frequenzen begünstigt wird.

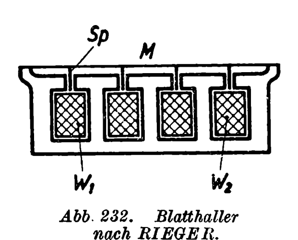


Abb. 232. Blatthaller nach RIEGER.

Für den Vergleich verschiedener Lautsprechertypen untereinander bildet man den Ausdruck

$$g = H^2 \frac{b\,h\,l}{\varrho},$$

der *Gütefaktor* genannt wird, und magnetische Feldstärke H, Breite b und Höhe h des Luftspaltes, die Leiterlänge l der Spule und den spezifischen Widerstand ϱ des Leitermaterials enthält. Wegen des kleinen OHMschen Widerstandes und Impedanz der Tauchspule wird diese nicht direkt, sondern über einen Transformator (Ausgangsübertrager) an die Endstufe der tonfrequenten Spannungsquelle gelegt.

3,34 *Elektrostatischer Lautsprecher*

Bildet man eine der beiden Elektroden eines Luftkondensators als Membran aus, so lassen sich nach § 2,3 Wechselkräfte im Rhythmus der angelegten Spannung auf diese übertragen, wenn eine konstante Vorspannung zwischen den Platten liegt. Eine von VOGT (*144*) angegebene Ausführungsform ist schematisch in Abb. 233 dargestellt. Die elastische, leitende Membran M ist in einem Rahmen R eingespannt und bildet mit den beiden als Gitter ausgebildeten Elektroden G_1 und G_2 einen Doppelkondensator. Zwischen den beiden Außenelektroden und der Membran liegt über die hochohmigen Widerstände r eine hohe Gleichvorspannung U_0. Die Wechselspannung mit der Amplitude U wird über die beiden Widerstände an die Außenelektroden gelegt, so daß nach Gleichung (2/8) eine Gesamtkraft

$$K = \frac{2\left(U_0 + \frac{U}{2}\sin\omega t\right)^2}{2\,a_0^2}\,\varepsilon_0\,F \qquad (3/24)$$

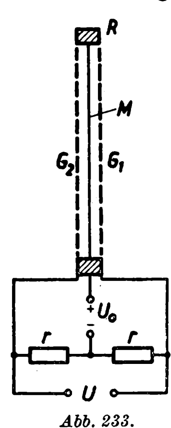


Abb. 233. Elektrostatischer Lautsprecher.

auf die Membran ausgeübt wird. F ist darin die Membranfläche, ε_0 die absolute Dielektrizitätskonstante und a_0 der Ruheabstand der Membran von den Gittern. Die doppelseitige Anordnung hat dabei den Vorzug, daß die von der Vorspannung herrührenden konstanten Kräfte sich gegenseitig aufheben und den Abstand a_0 nicht beeinflussen. Die hier allein interessierende Wechselkraft K' wird dann, da sich die quadratischen Glieder von U ebenfalls wegheben,

$$K' = \frac{U\,U_0 \sin\omega t}{a_0^2}\,\varepsilon_0\,F \qquad (3/25)$$

und wächst mit abnehmendem Abstand quadratisch an. Allerdings ist dem eine Grenze gesetzt, wenn man auch bei tiefen Frequenzen noch eine ausreichende akustische Leistung hervorbringen will. Wählt man z. B. für $a_0 = 0{,}1$ cm, $U_0 = 1500$ V, $U = 100$ V, so erhält man pro cm² Membranfläche einen Schalldruck von

$$1{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Ws/cm^3} \approx 10\,\mathrm{dyn/cm^2},$$

der etwa dem Schalldruck in einigen Zentimeter Abstand vom Mund bei Unterhaltungssprache entspricht. Bei größeren Amplituden kann man jedoch a_0 nicht mehr als konstant ansehen und hat nichtlineare Verzerrungen zu erwarten.

3,35 *Piezoelektrischer Lautsprecher* (*6*)

Bereits bei der Besprechung des piezoelektrischen Wandlers (§ 2,4) wurde darauf hingewiesen, daß dieser im Vergleich zum elektrostatischen Wandler wesentlich größere Kräfte hervorzubringen gestattet. Um allerdings beim Lautsprecher die besonders für die Wiedergabe tiefer Frequenzen erforderliche Bewegungsamplitude der Membran zu erreichen, werden im Hörbereich für einen Lautsprecherantrieb nicht Dickenschwingungen von Quarz, sondern Biegeschwingungen eines Seignettesalz-Kristalles herangezogen. Bei geeigneter Schnittrichtung biegt sich eine Platte aus Seignettesalz ($C_4H_4O_6K_2$), deren versilberte Flächen an eine Gleichspannung gelegt werden, in Form einer Sattelfläche durch. Diese Durchbiegung ist so groß, daß man unmittelbar eine Membran an einem solchen Kristall befestigen kann, wie aus der Abb. 234 hervorgeht.

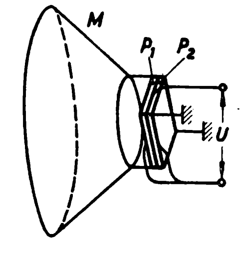


Abb. 234. Piezoelektrischer Lautsprecher.

Zwei dünne quadratische, beiderseitig versilberte Seignettesalzplatten P_1 und P_2 werden so aufeinandergekittet, daß beim Anlegen einer Wechselspannung zwischen der Mittelelektrode und den leitend verbundenen Außenbelegungen eine gleichsinnige Durchbiegung entsteht. An zwei gegenüberliegenden Eckpunkten ist der Kristall am Gehäuse befestigt, während die beiden anderen Eckpunkte mit der Membran M verbunden sind. Da das System eine relativ hohe Eigenfrequenz besitzt, eignet sich diese Bauweise besonders für die Wiedergabe hoher Frequenzen. Ein besonderer Vorteil des piezoelektrischen Lautsprechers ist dessen hoher Innenwiderstand, der sich gut der Ausgangsstufe des Verstärkers anpassen läßt.

3,4 **Telephon** (*40*)

3,41 *Allgemeines*

Im Vergleich zum Lautsprecher ist beim Telephon das Verhältnis von Schallquelle zum empfangenden Ohr ein grundsätzlich anderes. Während der Lautsprecher die akustische Leistung in den ganzen Raum abgibt und davon nur ein geringer, der auffangenden Fläche etwa entsprechender Bruchteil in das Ohr gelangt, wird beim Telephon das Luftvolumen des äußeren Gehörganges von etwa 2 cm³ nach außen abgeschlossen und der darin erzeugte Schalldruck wahrgenommen. Gewöhnlich erstreckt sich der Frequenzbereich des Telephons von 100 bis 5000 Hz; für Meßzwecke werden auch sogenannte Resonanztelephone verwendet, deren Membran schwach gedämpft ist und in ihrer Eigenschwingungszahl erregt wird. Für spezielle Zwecke, wie

z. B. Messungen der Reizschwelle des menschlichen Ohres, werden Telephone benötigt, die in den Gehörgang eingeführt werden können und einen definierten Schalldruck erzeugen (§ 3,46). Das Telephon ist weit verbreitet bei akustischen und elektrischen Messungen, besonders bei Kompensationsverfahren, wo seine Empfindlichkeit durchaus mit den empfindlichsten objektiven Methoden vergleichbar ist.

3,42 *Elektromagnetisches Telephon*

Die Bauweise des elektromagnetischen Telephons stimmt in den Grundzügen mit dem in der Abb. 225 dargestellten Aufbau überein. Der Eisenanker A wird gewöhnlich von einer dünnen, verkupferten Eisenmembran gebildet, die am Rande eingespannt ist. Bezeichnet man mit F den Polquerschnitt, so ist nach Gleichung (2/17) die auf die Membran wirkende Kraft beim zweipoligen Telephon

$$K = \frac{F}{2\,\mu_0}\,(B_0 + B)^2, \tag{3/25}$$

wenn B_0 die konstante vom Permanentmagneten hervorgerufene magnetische Induktion und B die Amplitude der Wechselinduktion bedeuten. Die Membran wird daher mit der konstanten Kraft $F\,B_0^2/2\,\mu_0$ elastisch durchgebogen; die Wechselkraft $F\,B_0\,B/\mu_0$ überlagert sich der durch B_0 hervorgerufenen Dauerkraft. Nach Gleichung (3/1) erhält man für die Geschwindigkeitsamplitude der Membranmitte

$$v_0 = \frac{K}{r}\cos\varphi = \frac{F}{2\,r\,\mu_0}\,B_0\,B\cos\varphi, \tag{3/26}$$

wobei r der mechanische Verlustwiderstand und φ der Phasenwinkel zwischen K und v_0 sind. Damit folgt für die mechanische Leistung der Membran:

$$N_m = \tfrac{1}{2}\,r\,v_0^2 = \frac{1}{2\,r}\left(\frac{F}{2\,\mu_0}\right)^2 B_0^2\,B^2\cos^2\varphi. \tag{3/27}$$

Man ersieht daraus, daß die mechanische Leistung der Membran bei konstanter magnetischer Induktion B_0 nur vom Phasenwinkel φ abhängt und ein Maximum im Fall der Resonanz ($\varphi = 0$) wird. Um eine möglichst große akustische Leistung umsetzen zu können, muß vor allem B_0 groß sein. Diese hängt jedoch von der Größe des Luftspaltes und auch vom magnetischen Widerstand der Eisenmembran ab und kann nicht beliebig hochgetrieben werden, da für eine verzerrungsarme Wiedergabe die Bewegungsamplitude der Membran gegen deren Abstand von den Polflächen klein sein muß. Diese und noch eine Reihe wichtiger Erkenntnisse sind in einem modernen Telephon, wie es in Abb. 235 vereinfacht dargestellt ist, verwertet.

In einem unmagnetischen Gehäuse G sind zwei halbringförmige Permanentmagnete M auf die beiden Polschuhe P_1 und P_2 geschraubt. Zur Verringerung der magnetischen Hysteresisverluste bestehen diese aus hochlegiertem weichen Eisen und sind parallel zur Zeichenebene mehrfach geschlitzt, um die Wirbelstromverluste gering zu halten. Die dünne Membran E ist am Rande der flachen Dose G durch den aufschraubbaren Schalltrichter T befestigt und kann durch einen Stellring in genau einstellbaren Abstand von den Polflächen gebracht

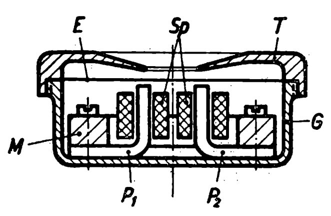


Abb. 235. Elektromagnetisches Telephon.

werden. Der Wechselfluß wird durch die beiden auf die Polschuhe geschobenen Spulen Sp erzeugt, deren OHMscher Widerstand je nach den Anpassungsverhältnissen meist zwischen 10 und 2000 Ohm liegt. Durch geeignete Kombination mit einem gedämpften Luftraum über der Membran läßt sich ein fast geradliniger Frequenzverlauf des erzeugten Schalldruckes erzwingen.

3,43 *Elektrodynamisches Telephon* (*51*)

Das elektrodynamische Prinzip läßt sich auch für das Telephon verwenden und ist besonders für die Wiedergabe tiefer Frequenzen bei geringer Verzerrung geeignet. Da im stromlosen Zustand auf das Schwingungssystem keine Kraft ausgeübt wird, kann die Membran beliebig weich gelagert sein.

Der Aufbau des elektrodynamischen Telephons (Abb. 236) unterscheidet sich grundsätzlich nicht von dem des elektrodynamischen Lautsprechers und ist nur in kleineren Abmessungen ausgeführt. Der topfartige Permanentmagnet P ist durch die Eisenplatte E so abgedeckt, daß ein Ringspalt geringer Spaltweite entsteht, in dem eine hohe magnetische Induktion herrscht. In diesen Spalt taucht die an der Membran M befestigte Spule Sp, die aus einigen Drahtwindungen besteht. Ein durchbrochener Isolierstoffdeckel D schützt das System vor Berührung. Diese von WENTE und THORAS angegebene Bauweise zeigt in einem Frequenzbereich von 20 bis 6000 Hz etwa konstante Empfindlichkeit und erfordert wie der Lautsprecher zur günstigen Anpassung einen Übertrager.

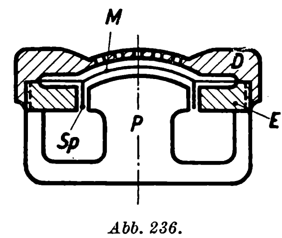


Abb. 236.
Elektrodynamisches Telephon.

Eine andere Bauart, die als Induktionstelephon bezeichnet wird, besteht aus eisenlosen Spulen, zwischen denen eine sehr dünne Aluminiumfolie eingespannt ist. Die in der Membran induzierten Wechselströme rufen in dieser im Magnetfeld der Spulen Wechselkräfte hervor, die mit wachsender Frequenz zunehmen. Ähnliche Anordnungen sind auch für die direkte Wiedergabe amplitudenmodulierter Hochfrequenzströme geeignet.

3,44 *Elektrostatisches Telephon*

Der Aufbau entspricht vollkommen dem des elektrostatischen Lautsprechers. Für eine einwandfreie Wiedergabe ist eine Wechselspannung von 10 bis 20 V bei einer Gleichvorspannung von 200–300 V erforderlich. Nach WALTZ werden zwei dünne Metallbänder, zwischen denen sich eine dünne Isolationszwischenlage befindet, zickzackförmig geknickt und zusammengelegt. Dieser Mehrschichtenkondensator mit etwa 20 Lagen führt dann im Rhythmus der angelegten Spannung (mit Vorspannung) Dickenschwingungen aus, die direkt oder durch eine an dem Kondensator befestigte Membran wahrgenommen werden.

Das *Kondensator-Hochfrequenz-Telephon* nach MEISSNER (*97*) dient zum direkten Nachweis tonmodulierter Hochfrequenzspannung. Es besteht aus einer 0,05 mm starken Neusilbermembran, die im Abstand von 0,1 mm der festen Elektrode gegenübersteht. Infolge des quadratischen Kraftgesetzes wird bei unmodulierter Spannung eine anziehende Kraft auf die Membran ausgeübt. Bei Modulation ändert sich die elektrostatische Kraft im Rhythmus der Modulation und gibt zu tonfrequenten

Schwingungen der Membran Anlaß, die jedoch wegen des quadratischen Zusammenhanges zwischen Spannung und Kraft nicht verzerrungsfrei sind.

3,45 *Piezoelektrisches Telephon* (*50*)

Die Bauweise des piezoelektrischen Lautsprechers ist mit Erfolg auf ein entsprechendes Telephon übertragen worden, wobei sich wegen des Fortfalls einer besonderen Membran ein sehr einfacher Aufbau ergibt. Der *Kristallhörer* besteht aus einer Seignettesalz-Doppelplatte der Abmessung 15 · 15 · 0,3 mm, die an drei Eckpunkten fest gelagert ist und Biegeschwingungen ausführen kann. Durch akustische Kopplung mit einem Helmholtz-Resonator geeigneter Dämpfung läßt sich die Eigenfrequenz bei etwa 3 kHz fast vollkommen unterdrücken und eine fast geradlinige Frequenzkurve erreichen. Bei einem Volumen des äußeren Gehörganges von etwa 2 cm^3 läßt sich mit einer im Hörer verbrauchten Scheinleistung von 25 mVA ein Schalldruck von etwa 300 μb = 300 dyn/cm^2 bei einem Frequenzumfang von 200–4000 Hz erzeugen.

3,46 *Thermophon*

Als Thermophon bezeichnet man eine Anordnung, durch welche die von einem Wechselstrom in einem dünnen Leiter erzeugte Joulesche Wärme in akustische Energie umgeformt wird.

Um die Wärmekapazität des Drahtes möglichst klein zu halten und auch hohe Tonfrequenzen hörbar zu machen, werden äußerst dünne Drähte (5–10 μ) oder Folien verwendet. Diese Leiter mit sehr kleiner thermischer Trägheit werden zwischen zwei dickere Zuleitungen gespannt und von dem Gleichstrom I_0 und dem Wechselstrom $I \sin \omega t$ durchflossen. Die augenblicklich im Draht verbrauchte Leistung beträgt dann

$$N_e = R\,(I_0 + I \sin \omega t)^2 = R\,(I_0^2 + \tfrac{1}{2} I^2) + 2\,R\,I_0 \sin \omega t - \tfrac{1}{2}\,R\,I^2 \cos 2\,\omega t. \quad (3/28)$$

Diese Energie setzt sich also aus der zeitlich konstanten Leistung $R\,(I_0^2 + \frac{1}{2} I^2)$, dem Wechselstromanteil und einem periodischen Betrag der doppelten Frequenz zusammen. Da $I_0 \gg I$ ist, kann man das letzte Glied der Gleichung (3/28) vernachlässigen. Der Wechselstromanteil bewirkt eine periodische Erwärmung des Drahtes und der diesen umgebenden Gasschicht und ruft Druckschwankungen der Frequenz $\omega/2\,\pi$ hervor. Das Thermophon bringt man wegen der geringen erzeugten Schallenergie zusammen mit einem Schallempfänger in einen geschlossenen Raum kleinen Volumens, wodurch in diesem ein Schalldruck definierter Amplitude erzeugt wird. Aus diesem Grunde eignet sich das Thermophon vor allem für akustische Messungen, die eine geringe Energie erfordern, z. B. für die Eichung akustischer Schallempfänger, Messung der Ohrempfindlichkeit. Nach der Theorie von Geffcken und Keibs (*41*) wird in einem Gasvolumen V_0 durch einen Draht vom Radius a die Schalldruckamplitude

$$p_0 = \frac{11{,}4}{a^2\,V_0\,\varphi\,(\omega)}\,J_0\,J\,R\,[\mu\text{b}] \quad (3/29)$$

erzeugt, wenn man mit $\varphi\,(\omega)$ eine von der Drahtlänge, der Wärmeleitfähigkeit des Gases und der Wärmekapazität des Drahtes abhängige Funktion der Frequenz be-

zeichnet. Um große Schalldrucke zu erhalten, ist das Gasvolumen sehr klein zu halten: für Schwellenwertmessungen am menschlichen Ohr wird das Thermophon in einer besonders kleinen Form (Olive) in den äußeren Gehörgang eingeführt (I. Teil, § 1,23).

3,5 *Magnetostriktions-Sender* (*13, 139*)

Die bereits besprochenen Methoden für die elektrische Schallerzeugung versagen, wenn man den Bereich der tonfrequenten Schwingungen überschreitet. Für die speziellen Meßverfahren im Ultraschallgebiet kommen nur noch zwei Verfahren der Schallerzeugung in Betracht: der magnetostriktive und der piezoelektrische Sender, mit denen es gelingt, außerordentlich hohe Frequenzen bei großer Schalleistung zu erzeugen.

3,51 *Der magnetostriktive Effekt*

Wie bereits im I. Teil, § 9,4 erwähnt, sind die magnetischen Eigenschaften ferromagnetischer Stoffe von der elastischen Spannung, somit auch von der elastischen Dehnung in gewissem Maße abhängig. Der reziproke Effekt, magnetostriktiver Effekt genannt, tritt auf, wenn ein ferromagnetischer, zylindrischer Stab in Längsrichtung magnetisiert wird, wobei sich die Stablänge unabhängig von der Richtung des Magnetfeldes um einen kleinen Betrag Δl ändert. Diese Längenänderungen sind von der relativen Größe 10^{-6}, können positiv oder negativ sein und hängen außer vom Material auch von der magnetischen Induktion ab. In der Abb. 237 ist die relative Längenänderung $\Delta l/l = \varepsilon$ für verschiedene Ferromagnetika über der magnetischen Feldstärke aufgetragen. Daraus ist zu ersehen, daß sich bei Eisen und gegossenem Kobalt das Vorzeichen der Dehnung für verschieden große Feldstärken umkehrt und nur bei Nickel und geglühtem Kobalt ein einsinniger Zusammenhang zwischen ε und H besteht. Ferner geht daraus hervor, daß bei Nickelstäben die Dehnung und damit die Schalleistung nur bis zu einer bestimmten magnetischen Feldstärke anwächst und darüber sich ε einem Endwert nähert. Mit steigender Temperatur nimmt der Magnetostriktionseffekt ab, um am CURIE-Punkt ganz zu verschwinden.

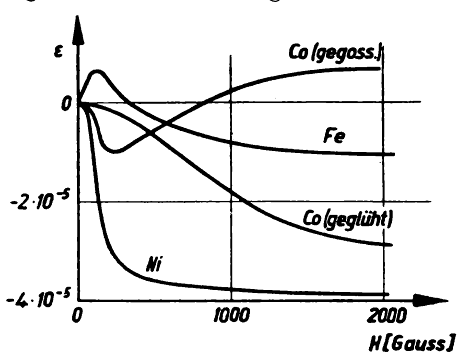


Abb. 237. Magnetostriktiver Effekt verschiedener Werkstoffe.

3,52 *Magnetostriktiver Schwinger*

Um magnetostriktive Schwingungen eines Stabes hervorzurufen, wird dieser in eine von Wechselstrom durchflossene zylindrische Spule gebracht. Da ε von der Richtung des Magnetfeldes unabhängig ist, wird der Stab mit der doppelten Wechselfrequenz schwingen. In den meisten Fällen hat man den Stab durch eine zweite von Gleichstrom durchflossene Spule vormagnetisiert. Die Eigenschwingungszahlen des Magnetostriktionsstabes errechnen sich aus Gleichung (3/11) und müssen natürlich in Resonanz

mit der angelegten Frequenz sein. Die höchsten Frequenzen, die sich mit merklicher Intensität noch erzeugen lassen, liegen bei einfachen, in der Grundschwingung erregten Nickelstäben bei etwa 60 kHz, was einer Stablänge von 4 cm entspricht. Die maximale relative Dehnung wird vor allem durch die innere Dämpfung des Stabes bedingt und übersteigt den Wert 10^{-4} kaum. Nach PIERCE lassen sich mit der in Abb. 238 dargestellten Stabform wesentlich höhere Frequenzen herstellen. Der 9 cm lange Stahlstab ist in der gezeichneten Weise eingedreht und in kurze zylindrische Schwinger von 1 cm Länge unterteilt. Diese durch die wesentlich dünneren Zwischenstücke gekoppelten Kurzstäbe schwingen nur angenähert wegen ihrer großen Dicke mit der nach Gleichung (3/11) zu berechnenden Eigenschwingungszahl. Mit der angegebenen Anordnung wurden 293 kHz erreicht.

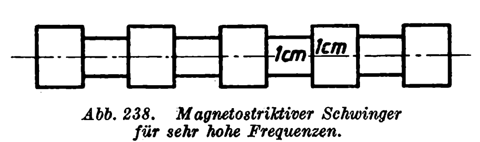


Abb. 238. Magnetostriktiver Schwinger für sehr hohe Frequenzen.

Eine weitere wegen der geringen magnetischen Streuung günstige Anordnung (Abb. 239) verwendet ein Paket aus Nickelblechen, auf dessen Schenkel die Erregerspulen gewickelt sind. Bei 2,5 cm Schenkellänge lassen sich in der Grundschwingung etwa 100 kHz erzeugen (*22*).

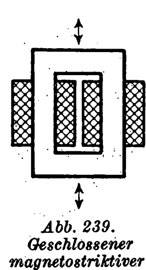


Abb. 239. Geschlossener magnetostriktiver Schwinger.

Als Material eignen sich reines Nickel, Stahl und verschiedene Eisen-Nickel-Legierungen. PIERCE empfiehlt Invar (36% Ni, 64% Fe) und Monelmetall (68%Ni, 28% Cu und Zusätze von Fe, Si, Mn und C). Nach PIERCE (*121*) lassen sich durch Verwendung zweier Metalle als Mantel und Kern, deren Temperaturkoeffizient der Frequenz verschiedenes Vorzeichen hat, magnetostriktive Schwinger mit sehr kleiner Temperaturabhängigkeit der Frequenz herstellen.

3,53 *Elektrische Schaltung*

Zur Anregung der magnetischen Schwinger benutzt man meist Röhrengeneratoren einstellbarer Frequenz. Eine für Meßzwecke besonders geeignete Schaltung ist in der Abb. 240 wiedergegeben. Der Magnetostriktionsstab M ist zwischen den Schneidenpaaren S_1 und S_2 so eingespannt, daß er in der 2. Oberschwingung als tiefster Frequenz schwingen kann. Die über das eine Stabende geschobene Spule L_1 bildet zusammen mit dem veränderlichen Kondensator C einen Schwingungskreis, der durch die Elektronenröhre E zu ungedämpften Schwingungen erregt wird. Durch die in der Stabmitte angebrachte Spule L_2, die von einem regelbaren Gleichstrom durchflossen ist, wird der Stab vormagnetisiert. Zum Nachweis der Longitudinalschwingungen ist am anderen Stabende eine Spule L_3 angebracht, deren Wechselspannung über den Gleichrichter G an das Anzeigeinstrument I gelegt wird. Ist der Schwingungskreis L_1C auf die Eigenschwingungszahl des Stabes abgestimmt, erhält man am Instrument den maximalen Ausschlag. Um eine vergrößerte Schallabstrahlung der Stabenden vor allem in Gasen zu erhalten, setzt man auf diese schwingungssteife Aluminiumplatten auf. Bei Magnetostriktionssendern großer Leistung schlitzt man zur Vermeidung von Wirbelstromverlusten das

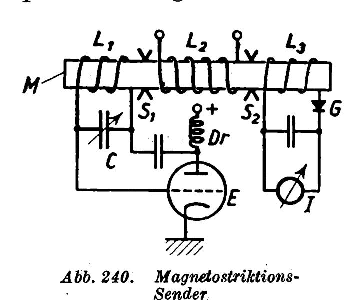


Abb. 240. Magnetostriktions-Sender

als Schwinger verwendete Nickelrohr in der Längsrichtung. Die erreichbare maximale Schwingungsamplitude wird durch die elektrischen Verluste und die innere Reibung des Stabmaterials begrenzt.

3,6 **Piezoelektrischer Sender** (*2*)

Das bei weitem am häufigsten für die Erzeugung von Ultraschallwellen angewandte Verfahren ist das piezoelektrische, dessen Grundzüge bereits in den §§ 2,4 und 3,35 besprochen wurden.

3,61 *Piezokristall*

Für die meisten Piezoschallgeber werden kreisförmige Platten verwendet, die in der in Abb. 241 gezeigten Weise aus dem Quarzkristall geschnitten werden. Die Drehachse der Quarzplatte ist dabei so orientiert, daß sie senkrecht zur dreizähligen optischen Z-Achse und parallel zur elektrischen X-Achse des Kristalles verläuft. Werden nun auf die beiden Oberflächen F_x und F'_x entgegengesetzte elektrische Ladungen aufgebracht, so ändert sich die Plattendicke in der X-Richtung (longitudinaler reziproker Piezoeffekt). Vertauscht man das Vorzeichen der Ladungen, so ändert sich auch das Vorzeichen der Dickenänderung. Bezeichnet man mit d_x den piezoelektrischen Modul in der X-Richtung, so gilt für die Dickenänderung

$$\Delta l_x = d_x U, \tag{3/30}$$

wenn die Spannung U an die beiden Flächen gelegt wird. Bemerkenswert ist, daß Δl unabhängig von der Plattendicke ist. Für Quarz wird $d_x = -2{,}12 \cdot 10^{-10}$ cm/V. Eine rechteckige Platte oder ein Würfel aus Quarz lassen sich außerdem noch durch den transversalen reziproken Piezoeffekt anregen, wenn die Spannung U an den zur Z-Achse senkrecht stehenden Flächen angelegt wird. Die Längenänderung erfolgt dann in der Y-Richtung entsprechend der Beziehung $\Delta l_y = d_y \, U \, l/d$, wenn l und d Länge und Dicke der Quarzplatte sind. Für den Fall der Dickenschwingung berechnet sich die elastische Eigenfrequenz für relativ dünne Platten aus

Abb. 241. Schnittrichtung des Piezoquarzes.

$$\nu_k = \frac{k+1}{2\,d}\sqrt{\frac{c_x}{\varrho}} \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots), \tag{3/31}$$

wenn c_x einen für Schwingungsart und -richtung charakteristischen Elastizitätsmodul (für Quarz = 8711 kg/mm²) und ϱ die Dichte (für Quarz $\varrho = 2{,}65$) bedeuten. Aus den geometrischen Abmessungen lassen sich damit die Resonanzfrequenzen berechnen. Gewöhnlich verwendet man Längsschwinger für den unteren Frequenzbereich, während mit Dickenschwingern 50 MHz und darüber erreicht werden können. Bei sehr hohen Frequenzen erregt man die höheren Oberwellen, um nicht mit sehr dünnen und daher leicht zerbrechlichen Quarzplättchen arbeiten zu müssen, wobei allerdings die Schalleistung zurückgeht. Ein besonderer Vorteil des Quarzsenders ist der sehr kleine Temperaturkoeffizient der Frequenz von etwa $5 \cdot 10^{-5}/°$ C, der durch geeignete Schnittrichtung noch verkleinert werden kann.

Schleift man den Quarzkristall hohlspiegelartig aus (*148*), so läßt sich die Schallenergie im Brennpunkt außerordentlich steigern.

3,62 *Elektrischer Aufbau* (*36, 37, 45*)

Ähnlich wie beim magnetostriktiven Sender werden die Piezokristalle mit Hilfe von Röhrengeneratoren zu ungedämpften Schwingungen angeregt. Eine der Abb. 240 entsprechende Schaltung ist in Abb. 242 dargestellt. Der als gewöhnlicher Dreipunktsender erregte Röhrengenerator enthält parallel zu seinem abstimmbaren Schwingungskreis LC den Schwingungsquarz Q. Man stellt den Drehkondensator C so ein, daß die elektrische Eigenfrequenz mit der mechanischen Eigenschwingung des Quarzes in Resonanz kommt, was sich als scharfes Stromminimum am Milliamperemeter I in der Anodenspannungszuleitung bemerkbar macht. Diese als Resonatorschaltung bezeichnete Anordnung eignet sich vor allem für die Erzeugung großer Schalleistungen.

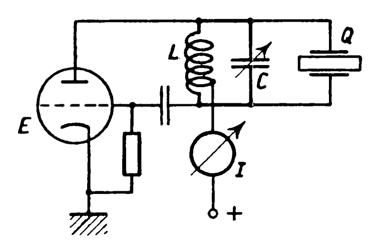


Abb. 242. Schaltung eines Quarzsenders.

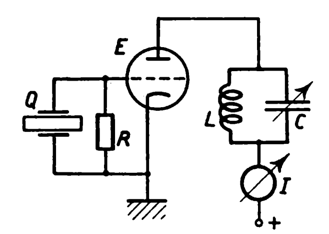


Abb. 243. Quarzgenerator nach PIERCE.

Eine zweite von PIERCE angegebene Schaltung arbeitet mit dem Piezoquarz als Oszillator, dessen Frequenz durch die Eigenschwingungszahl des Quarzes bestimmt wird. Der Röhrengenerator enthält, wie aus Abb. 243 zu ersehen ist, im Gitterkreis den Schwingquarz Q mit parallelgeschaltetem hochohmigen Gitterableitwiderstand R. Der Außenwiderstand der Röhre E wird von einem veränderlichen Schwingungskreis LC gebildet, dessen Eigenfrequenz etwas von der des Quarzes verschieden sein muß, um eine Beeinflussung des Piezoquarzes zu verhindern. Bei dieser Einstellung bestimmt dann die Eigenresonanz des Quarzes dessen ausgestrahlte Frequenz. Zur Rückkopplung der Anodenwechselspannung genügt wegen der großen Resonanzschärfe die Gitter-Anodenkapazität der Röhre. Durch den Einschaltvorgang wird der Quarz Q zu seiner Eigenschwingung angestoßen, wodurch auf seinen beiden Elektroden infolge des piezoelektrischen Effektes Wechselladungen entstehen. Diese sind um eine Halbperiode gegen den Anodenstrom phasenverschoben und steuern ihn über das Röhrengitter im richtigen Takt, wodurch ungedämpfte Schwingungen entstehen. Diese Schaltung eignet sich vor allem zur Erzeugung von Ultraschallwellen in Gasen mit geringer Strahlungsdämpfung. In Flüssigkeiten wird die Selbsterregung schwach und die Anwendung der Schaltung Abb. 242 empfehlenswerter.

Die Schwingquarze werden gewöhnlich an den Belegungsflächen im Vakuum versilbert oder verkupfert und mittels federnder Blechstreifen mit den Hochfrequenzzuleitungen verbunden. Die Spannung kann auch durch Elektroden in sehr kleinem Abstand von den Belegungen kapazitiv zugeführt werden, wenn eine Beeinflussung der Schwingungsform befürchtet werden muß. Zur Befestigung wird die Quarzplatte entweder mit einer Fläche gegen eine geschliffene, mehrere Zentimeter dicke Bleiplatte federnd gedrückt oder durch spitze Stellschrauben in einer Knotenebene festgeklemmt. In den meisten Fällen wird der Schwingquarz unter Öl

erregt, wodurch wegen des großen Schallwellenwiderstandes von Flüssigkeiten überhaupt eine gute Energieübertragung bei vorzüglicher Isolation möglich ist. Um eine Abstrahlung in nur einer Richtung zu bekommen, bringt man nach GRUETZMACHER (*48*) auf einer Quarzfläche eine dünnwandige, flache, luftgefüllte Metalldose L (Abb. 244) an. An der Grenzfläche Luft-Öl wird die nach unten abgestrahlte Schallwelle wegen des sehr viel größeren Schallwellenwiderstandes von Öl fast vollkommen nach oben reflektiert und gleichphasig zu der nach oben abgestrahlten Welle addiert.

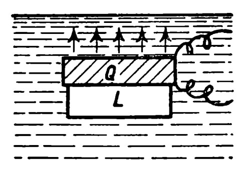


Abb. 244. Reflektor nach GRÜTZMACHER.

Eine Quarzplatte von etwa 1 cm Dicke kann maximal eine spezifische Schalleistung von etwa 10 W/cm² abgeben, wobei die Bewegungsamplitude nur einige 10^{-5} cm beträgt. Schwingt der Quarz als Dickenschwinger mit etwa 300 kHz, so entsteht im Öl eine Schalldruckamplitude von $5,4 \cdot 10^6$ dyn/cm², was einem Wechseldruck von $\pm$ 5,4 at entspricht.

Die Konstanz der ausgestrahlten Schallenergie, die bei den meisten akustischen Meßverfahren besonders wichtig ist, läßt sich durch die am Schwingquarz liegende Wechselspannung mit einem Elektrometer oder Röhrenvoltmeter überwachen.

3,63 *Elektrostriktionseffekt*

Untersuchungen, die von KOREN (*83*) an keramischen Massen aus polykristallinem *Barium-* und *Strontium-Titanat* angestellt wurden, zeigten bei diesen Stoffen eine dem piezoelektrischen Effekt verwandte Erscheinung, die als *Dielektrostriktionseffekt* bezeichnet wird. Bildet man nämlich aus Bariumtitanat einen dünnen Scheibenkondensator, der beiderseitig versilbert ist, und belastet diesen durch Druck, so erhält man eine Kapazitätsvergrößerung um etwa 10% pro kg/cm² und an den beiden Elektroden eine Polarisationsspannung, sofern man eine Vorspannung von einigen kV/cm anlegt. Beide Effekte sind dem Druck proportional. Wird nun die Vorspannung abgeschaltet, so bleibt der Kondensator permanent elektrisiert und verhält sich wie ein piezoelektrischer Kristall, dessen Polarisationsspannung das Vorzeichen wechselt, wenn man von einer Zug- in eine Druckspannung übergeht. In Abb. 245 sind für Ba-Titanat die Kapazitätsänderung ΔC, die Polarisationsspannung u_1 für eine Vorspannung von 4 kV/cm und die Spannung u_2 nach Abschalten der Polarisationsspannung abhängig von der Temperatur dargestellt. Unterhalb einer Temperatur von etwa 50° C sind die drei Größen fast von der Temperatur unabhängig und linear vom Druck abhängig. Beim Erreichen des CURIE-Punktes bei 120° C erreicht ΔC ein Maximum, während u_2 verschwindet. Die Dielektrostriktionsspannung u_2 beträgt bei Zimmertemperatur etwa 70% der Polari-

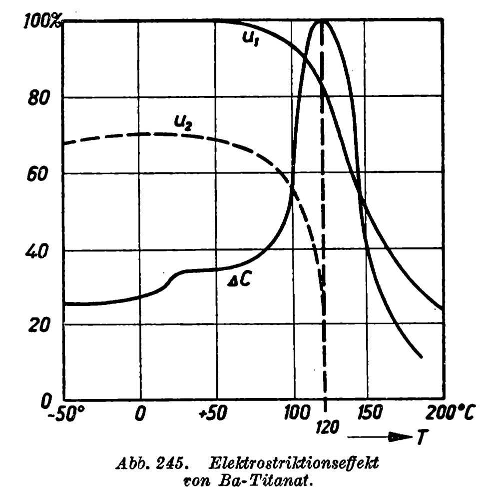


Abb. 245. Elektrostriktionseffekt von Ba-Titanat.

sationsspannung u_1, ist jedoch zeitlich konstant. Zur Polarisation der Ba-Titanatplatten ist eine elektrische Feldstärke von 5 bis 30 kV/cm erforderlich, die um so länger einwirken muß, je geringer ihre Größe und um so reiner die Probe ist. Im allgemeinen reicht eine Stunde aus. Im Vergleich zum Piezoeffekt des Turmalins liegt beim Ba-Titanat der piezoelektrische Modul um eine Größenordnung höher. Eine feste Lösung von 70% Ba- und 30% Sr-Titanat zeigt etwa dasselbe Verhalten mit dem Unterschied, daß deren CURIE-Temperatur bei 40° C liegt.

Eine beiderseitig verspiegelte, parallelgeschliffene Platte aus diesen keramischen Massen läßt sich in ähnlicher Weise wie eine Quarzplatte als Ultraschallquelle verwenden und ist im Vergleich zu dieser wesentlich billiger. Infolge einer größeren inneren Reibung ergibt sich eine breitere Resonanzkurve, die die Einstellung maximaler Energie bei Verwendung als akustisches Interferometer erschwert. Auch Biegungsschwingungen lassen sich erzeugen, wenn man eine dünne Ba-Titanatlamelle auf einen Metallstreifen auflötet.

Näheres über physikalische Eigenschaften dieser interessanten Stoffe ist der Arbeit von JONKER und VAN SANTEN (*73*) zu entnehmen.

FALKENHAGEN (*30*) weist auf die Möglichkeit hin, in Dipolflüssigkeiten durch Elektrostriktion Frequenzen bis 5000 MHz zu erzeugen.

§ 4 SCHALLEMPFÄNGER (*94, 100*)

4,1 **Das menschliche Ohr**

Für eine Reihe von akustischen Messungen dient als subjektiver Schallempfänger das menschliche Ohr; auch bei objektiven Schallmeßverfahren wird dieses vielfach zum Nullabgleich verwendet. Es interessiert daher vor allem die kleinste noch wahrnehmbare Schallintensität, die als Hörschwelle bezeichnet wird. Ihr reziproker Wert, die Ohrempfindlichkeit, hängt merklich von der Schallfrequenz ab. In Abb. 246 sind für das zweiohrige Hören die Kurven gleicher Lautstärke in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen, deren unterste als die sog. Hörschwellenkurve bezeichnet wird. Es werden also Schallenergien, die unterhalb dieser Kurve liegen, nicht mehr wahrgenommen. Wie man entnehmen kann, liegt bei 1000 Hz die noch wahrnehmbare Schallenergie bei 10^{-16} W/cm², was einem Schalldruck von $2 \cdot 10^{-4}$ μbar entspricht. Die dargestellten Kurven verbinden diejenigen Schallstärken verschiedener Frequenz, die vom Ohr als gleichlaut empfunden werden. Sie unterscheiden sich um jeweils 10 db (Dezibel, § 1,1), was der zehnfachen Schallstärke der vorhergehenden Kurve beim Normalton 1000 Hz entspricht. Als Maß für die Lautstärke wird das *Phon* benutzt. Eine Schallwelle besitzt die Lautstärke von *n* Phon,

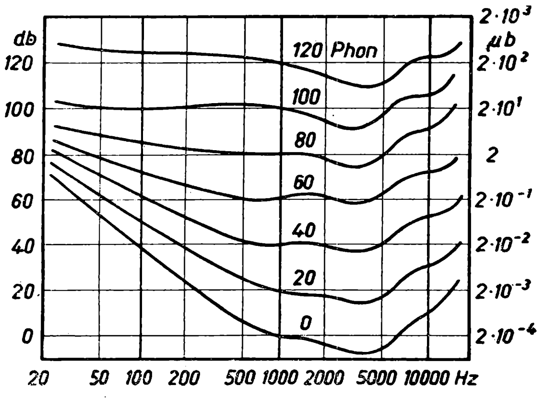


Abb. 246. Kurven gleicher Lautstärke beim zweiohrigen Hören.

wenn diese beim beidohrigen Hören ebenso laut empfunden wird wie der Ton von 1000 Hz, der als ebene Welle den Beobachter von vorn trifft und einen Schalldruck von n db über der Reizschwelle $2 \cdot 10^{-4} \mu$b hervorbringt. Die subjektive Lautstärke

$$L = 20 \log \frac{p_1}{p_0} \quad \text{(Phon)}$$

stimmt also numerisch mit der Maßeinheit Dezibel überein, wobei als Bezugsschalldruck p_0 der Hörschwellenschalldruck gilt.

Beim Hörvergleich müssen der Schalldruck des Normalschalles im ungestörten Schallfeld gemessen und beide zu vergleichende Schallstärken einige Sekunden lang abgehört werden. BARKHAUSEN (7) verwendet zur Lautstärkemessung eine Normaltonquelle, die elektrisch erregt wird, und ein in „Phon" geeichtes Potentiometer, mit dem die Lautstärke des Lautsprechers auf die zu messende Lautstärke eingestellt wird. Über eine absolute Messung der Gehörempfindlichkeit mit Hilfe des Thermophons wurde bereits im § 3,46 berichtet. Hinsichtlich der Schallstärke besitzt das Ohr ein Unterscheidungsvermögen von etwa 1 db, bezüglich der Frequenz lassen sich bei 1000 Hz Frequenzunterschiede von 30 Hz gerade noch feststellen.

4,2 Allgemeine Eigenschaften der Mikrophone

Bei den meisten Arten von Schallempfängern wird die Schallenergie in elektrische Energie umgewandelt. Die im § 2,2 abgeleiteten Beziehungen für die elektroakustischen Wandler stellen daher die physikalischen Grundlagen der Mikrophone dar. Wie der Schallsender stellt jeder Schallempfänger ein schwingungsfähiges Gebilde dar, das durch die auftretenden Schallwellen zu gedämpften erzwungenen Schwingungen angeregt wird. Für diesen Vorgang ist neben der Masse m und der Rückstellkraft s der sich aus Nutz-, Verlust- und Strahlungswiderstand zusammensetzende Dämpfungswiderstand r maßgebend. In den meisten Fällen wird der Durchmesser der Empfängerfläche F gegen die Wellenlänge klein und somit als Strahler nullter Ordnung (§ 1,31) zu betrachten sein. Die auf die Empfängermembran wirkende Wechselkraft wird dann $K = p \cdot F$, wenn p die Schalldruckamplitude ist. Damit wird die mechanische Differentialgleichung des Empfängers

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + s x = p F, \tag{4/1}$$

worin sich die Dämpfungskonstante r additiv aus dem Strahlungswiderstand r_s, dem Nutzwiderstand r_n und dem Verlustwiderstand r_v zusammensetzt. Unter Vernachlässigung der Verlustleistung sind folgende Leistungsgrößen des Schallempfängers zu unterscheiden:

$$\text{eingestrahlte Leistung} \quad N_e = \tfrac{1}{2} K \dot{x}_0, \tag{4/2a}$$

$$\text{absorbierte Leistung} \quad N_n = \tfrac{1}{2} r_n \dot{x}_0^2, \tag{4/2b}$$

$$\text{reflektierte Leistung} \quad N_r = \tfrac{1}{2} r_s \dot{x}_0^2. \tag{4/2c}$$

Mit der bekannten Lösung x_0 der Differentialgleichung (4/1) erhält man daraus die Frage beantwortet, unter welchen Bedingungen ein Empfänger die maximale Leistung absorbiert. Es ergibt sich die erforderliche maximale Empfängerfläche zu

$$F_{\max} = \frac{c \varrho K^2}{4 p^2 r_s}, \tag{4/3}$$

wenn c die Schallgeschwindigkeit und ϱ die Dichte des schalleitenden Mediums ist. Daraus folgt für die maximale Nutzleistung

$$N_{\max} = \frac{F^2\, p^2}{8\, r_s}, \tag{4/4}$$

eine Beziehung, die der Gleichung (3/6) entspricht. Ein Empfänger nimmt also dann die maximale Energie aus dem Schallfeld auf, wenn die von ihm absorbierte Leistung gleich der durch Reflexion an das Schallfeld zurückgegebenen ist.

Je nach der Größe der Rückstellkonstanten s lassen sich zwei Grenzfälle von Schallempfängern unterscheiden. Beim Druckempfänger ist die Schallhärte, d. h. das Verhältnis p_0/x_0 sehr groß. Beim Bewegungsempfänger folgt die Membran vollkommen der Bewegung des Mediums, läßt dieses also völlig ungestört. Beide Extremfälle sind für die Praxis unbrauchbar, da sie, wie man sich leicht überzeugen kann, aus dem Schallfeld keine Energie aufnehmen.

Da beim Strahler nullter Ordnung die auf die Membran wirkende Kraft dem Schalldruck im Schallfeld proportional ist, läßt sich als *Empfindlichkeit* oder *Übertragungsmaß* des Mikrophons das Verhältnis der erzeugten EMK (in mV) zum Schalldruck p (in μbar) festlegen

Bezüglich ihres Frequenzverhaltens unterscheiden sich Druck- und Bewegungsempfänger grundsätzlich: beim Druckempfänger wird die Membranamplitude x_0 für konstante Energie frequenzunabhängig, während beim Bewegungsempfänger nach Gleichung (1/6) diese mit $1/\omega^2$ abnimmt. Die Entscheidung, ob ein Mikrophon als Druck- oder Bewegungsempfänger wirkt, hängt nicht nur vom inneren Aufbau des Gerätes, sondern auch von der Schallhärte des äußeren Mediums ab. Aus (1/6) und (1/7) berechnet sich diese zu

$$p_0/a_0 = \omega\, \varrho\, c. \tag{4/5}$$

Das Verhalten des Empfängers wird also vom Schallwellenwiderstand $\varrho\, c$ und von der Frequenz ω bestimmt. Analog zu dem in § 3,31 besprochenen Wirkungsgrad eines Lautsprechers findet man diesen für das Mikrophon zu

$$\eta = \frac{4\, r_s\, r_n}{(r_s + r_n + r_v)^2}, \tag{4/6}$$

worin die elektrischen Verluste durch die entsprechenden mechanischen Dämpfungskonstanten ersetzt werden.

Die Schallfrequenz bestimmt nicht nur die Energieabgabe an den Empfänger, sondern auch die Amplitude der Membran. In ähnlicher Weise wie beim Schallsender lassen sich Signalempfänger und Empfänger für ein breites Frequenzband unterscheiden. Im ersten Fall wird man den Empfänger auf die aufzunehmende Frequenz abstimmen, um möglichst große Empfindlichkeit zu erzielen. Beim Breitbandempfänger strebt man durch passende Wahl der Dämpfung eine von der Frequenz unabhängige Empfindlichkeit an.

Außer diesen Eigenschaften ist bei der Auswahl eines Mikrophons die Richtcharakteristik und die Nichtlinearität, die durch den Klirrfaktor ausgedrückt wird, von Bedeutung.

4,3 Kontaktmikrophon

Die Kontaktmikrophone sind im eigentlichen Sinn keine elektroakustischen Wandler, sondern Relais-Empfänger, bei denen die Schallschwingungen irreversibel in

Widerstandsänderungen umgesetzt werden. Das Kontaktmikrophon besteht aus einer kleinen Kapsel, die durch eine dünne Metall- oder Kohlemembran abgeschlossen und mit feinkörniger Kohle gefüllt wird. Der gesamte Widerstand zwischen der Membran und der in der Kapsel angebrachten Elektrode setzt sich aus dem Leistungswiderstand der hintereinander- und parallelgeschalteten Kohlekörner und den Übergangswiderständen, die an den punktförmigen Berührungsstellen auftreten, zusammen. Der Vorteil der Kohlefüllung besteht darin, daß die örtlich an den Berührungsstellen entstehenden hohen Temperaturen (700–1000° C) den Gesamtwiderstand nicht ändern. Von den sehr verwickelten physikalischen Vorgängen an den Kontakten weiß man nur so viel, daß der Gashaut an der Kohleoberfläche eine große Bedeutung zufällt. Durch die Membran wird der Schalldruck auf die Füllung übertragen und damit der Übergangswiderstand periodisch geändert. Der mittlere Mikrophonwiderstand wächst allerdings bei Besprechung, d. h. die Widerstandsschwankungen sind nicht symmetrisch. Dieser Umstand bedingt eine nichtlineare Beziehung zwischen Mikrophonwiderstand und Schalldruck und hat zwei störende Eigenschaften zur Folge: 1. Das Kontaktmikrophon besitzt eine Reizschwelle, unterhalb derer keine Stromschwankungen auftreten; diese liegt bei etwa 0,01 bis 0,1 μbar. 2. Die erwähnte nichtlineare Beziehung führt zu einer nicht sinusförmigen Stromkurve, deren Klirrfaktor im allgemeinen mit zunehmendem Schalldruck stark anwächst (*102*). Durch die Anordnung zweier Kohledosen zu beiden Seiten der Membran lassen sich wenigstens für kleine Schalldrucke sehr kleine Klirrfaktoren erzielen.

Der schematische Aufbau eines niederohmigen Kohlekugelmikrophons ist in der Abb. 247 dargestellt. Es besteht aus einer mit Rillen oder Näpfchen versehenen Kohleelektrode E, die von einem isolierenden Gehäuse G umgeben ist. Vor dieser Elektrode ist in geringem Abstand die zweite Elektrode in Form einer dünnen Kohlemembran angebracht. Die zwischen dieser und E vorhandenen Hohlräume sind zum Teil mit kleinen Kohlekügelchen K gefüllt. Da nur wenige Kontakte hintereinander liegen, ist der Innenwiderstand relativ gering und beträgt weniger als 50 Ω. Derartige Mikrophone sind sehr empfindlich, eignen sich jedoch wegen des kleinen erfaßten Frequenzbandes nur zur Sprachverständigung und scheiden für physikalische Meßverfahren vollkommen aus. Wird die Sprechkapsel mit feinem Kohlegrieß gefüllt, so steigt der Widerstand auf 100–500 Ω an, bei einer Empfindlichkeit von etwa 50 mV/μb. Allerdings hängt diese in dem übertragbaren Frequenzbereich von 200–3000 Hz sehr stark von der Frequenz ab und zeigt ein ausgeprägtes Maximum im Bereich der Membraneigenfrequenz.

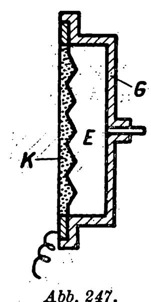


Abb. 247. Kohlemikrophon.

Beim Querstrommikrophon der Abb. 248 (*Reisz-Mikrophon*) wird die Bewegung der Kohleteilchen senkrecht zur elektrischen Stromrichtung ausgenutzt. In einer flachen Aussparung des Marmorklotzes A ist die Füllung F aus Kohlegrieß besonderer Zusammensetzung durch die dünne Glimmermembran M abgeschlossen. Der Mikrophonstrom wird durch zwei stabförmige Kohleelektroden E_1 und E_2 zugeführt. Der Ruhestromwiderstand beträgt etwa 250 Ohm bei einer Empfindlichkeit von einigen mV/μb. Bei einer zweiten Bauart wird der Widerstand durch Anordnung einzelner Kammern auf 25 Ohm erniedrigt, wodurch

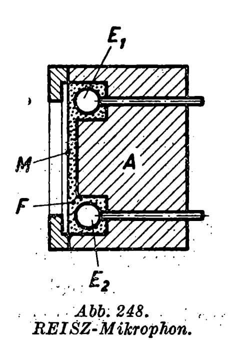


Abb. 248. REISZ-Mikrophon.

gleichzeitig die Empfindlichkeit auf 24–42 mV/μb in einem Frequenzbereich von 50–10000 Hz steigt. Beide Ausführungen zeigen im gesamten Frequenzbereich eine fast frequenzunabhängige Empfindlichkeit.

4,4 Elektrostatisches Mikrophon (*75*)

Das elektrostatische Mikrophon oder, wie es meist bezeichnet wird, das *Kondensatormikrophon* stellt die Umkehrung des im § 3,34 besprochenen elektrostatischen Lautsprechers dar. Es ist daher im Gegensatz zum Kohlemikrophon als wirklicher Energieempfänger anzusehen.

In seiner einfachsten Form (nach WENTE) besteht das Kondensatormikrophon aus einer 20—30 μ dicken gespannten Duraluminiummembran, die im Abstand von etwa 30 μ einer ebenen, durchbrochenen Elektrode gegenübersteht. Die Kapazität in der Ruhelage beträgt etwa 100 pF. Wie in der Prinzipschaltung der Abb. 249 gezeigt ist, wird an die beiden Elektroden des Mikrophons eine Gleichspannung U von einigen hundert Volt über den Hochohmwiderstand R gelegt. Beim Besprechen des Empfängers ändert sich periodisch dessen Kapazität und ruft einen Wechselstrom i hervor, der an R den Spannungsabfall $i\,R$ zur Folge hat. Bezeichnet man mit C_0 die Ruhekapazität und mit C die Amplitude der periodischen Kapazitätsänderung beim Auftreffen der Schallwelle, so wird

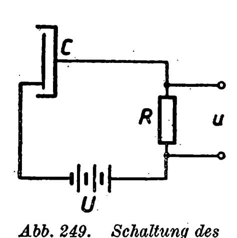


Abb. 249. Schaltung des Kondensatormikrophons.

$$u = i\,R = \frac{U\,C\,R}{C_0\sqrt{\left(\frac{1}{\omega\,C_0}\right)^2 + R^2}}, \qquad (4/7)$$

wenn $C < C_0$ und $1/\omega\,C_0 < R$ ist. Das Kondensatormikrophon stellt also einen Wechselstromgenerator mit der Spannung $U\,C/C_0$, dem Innenwiderstand $1/\omega\,C_0$ und dem Arbeitswiderstand R dar. Bei kleinen Kapazitätsänderungen ist bis zu hohen

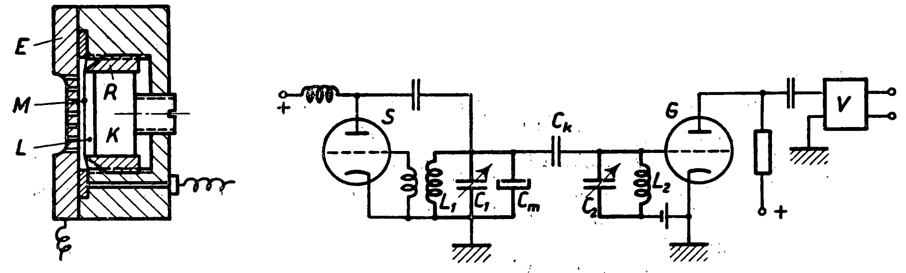


Abb. 250. Kondensatormikrophon. *Abb. 251. Hochfrequenzschaltung des Kondensatormikrophons.*

Schalldrucken der Zusammenhang mit der erzeugten Wechselspannung u linear, d.h. der Klirrfaktor unmerklich. Das Übertragungsmaß liegt zwischen 1 und 10 mV/μb.

In der beschriebenen Form ist das Frequenzverhalten des Mikrophons durch die Eigenfrequenz der Membran und deren Luftdämpfung gegeben.

RIEGGER (*123*) ersetzt in der von ihm angegebenen Ausführung die Membranelastizität durch ein elastisches Luftpolster, das zwischen einer sehr weichen Membran und der Rückwand eingeschlossen ist. Der Aufbau ist in Abb. 250 vereinfacht dar-

gestellt. Als Membran wird eine nur 0,5 μ dicke Aluminiumfolie M benutzt, die mit Hilfe des Ringes R straff gespannt und in etwa 0,1 mm Abstand von der eben geschliffenen, durchbrochenen Vorderelektrode E gehalten wird. Durch einen flachen Ring aus Hartgummi werden die beiden Kondensatorflächen gegeneinander isoliert. Ein im Spannring gut passender, verstellbarer Kolben K schließt mit der Membran einen flachen Luftraum L ab, dessen Eigenfrequenz bei 2 mm Höhe bei etwa 6 kHz liegt.

Neben der in der Abb. 249 angedeuteten Möglichkeit, die Kapazitätsschwankungen durch einen an R angeschlossenen Röhrenverstärker zu messen, wird vielfach die in Abb. 251 dargestellte „Hochfrequenzschaltung" verwendet. Das Kondensatormikrophon C_m ist parallel zum Kondensator C_1 des Schwingungskreises $L_1 C_1$ eines Röhrengenerators S geschaltet und moduliert im Rhythmus der Membranschwingungen dessen Frequenz. Die erzeugte Hochfrequenzspannung wird durch den Kopplungskondensator C_k (nur wenige pF) auf den Schwingungskreis $L_2 C_2$ der Gleichrichterstufe G übertragen. Dieser zweite Schwingungskreis ist nicht in völliger Resonanz mit der Senderschwingung, sondern um eine halbe Resonanzkurvenbreite gegen diese verstimmt. Auf diese Weise läßt sich die Frequenzmodulation des Senders S in eine amplitudenmodulierte Hochfrequenzspannung und nach Gleichrichtung in eine tonfrequente Wechselspannung umwandeln. Die dabei erreichbare Empfindlichkeit beträgt nach der Gleichrichterstufe etwa 15 mV/μb.

Bei hochwertigen Mikrophonen für Eichzwecke verkleinert man den Membrandurchmesser bis auf 2 cm, um auch bei hohen Frequenzen keine ausgesprochene Richtwirkung zu bekommen. Um Randstörungen zu vermeiden, bringt man das Mikrophon auf der Vorderseite eines stromlinigen Gehäuses an, das zugleich die Vorverstärkerröhre enthält, dessen Gitterzuleitung besonders spannungsempfindlich ist.

Die absolute Eichung von Kondensatormikrophonen als lineare Mikrophone ohne Reizschwelle ist besonders genau durch eine besondere Hilfselektrode vor der Membran auf elektrischem Wege durchzuführen (§ 4,7).

4,5 Elektrodynamisches Mikrophon

Beim elektrodynamischen Schallempfänger wird die akustische Energie in elektrische dadurch umgewandelt, daß in einem Stromleiter Wechselspannungen induziert werden, wenn dieser in einem konstanten Magnetfeld akustische Schwingungen vollführt. Diese Induktionsspannung ist bekanntlich $u = B_0 \, l \, \dot{x}$, wenn B_0 die magnetische Induktion am Ort des Stromleiters, l dessen Länge und $\dot{x}$ seine Geschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld und seiner Längsrichtung ist. Wie bereits im § 2,6 näher ausgeführt wurde, läßt sich der Spule nur dann nennenswerte Energie entziehen, wenn zum Außenwiderstand R_a eine Kapazität C in Reihe liegt. Die elektrische Differentialgleichung des elektrodynamischen Schallempfängers lautet dann nach § 2,6

$$B_0 \, l \, \dot{x} = (R_{sp} + R_a)\, i + \left(L_0 - \frac{1}{\omega^2 C}\right) \frac{d\,i}{d\,t}, \tag{2/42}$$

woraus durch Integration wegen $\frac{d\,i}{d\,t} = -\omega^2 \int i \, d\,t$ folgt:

$$B_0 \, l \, x = -\frac{R_{sp} + R_a}{\omega^2} \frac{d\,i}{d\,t} + \left(L_0 - \frac{1}{\omega^2 C}\right) i. \tag{2/43}$$

Daraus lassen sich die Fragen nach der maximalen Nutzleistung und dem Frequenzverhalten ohne Schwierigkeit beantworten.

Nach ihrem Aufbau bzw. Anordnung des Stromleiters sind Band- und Spulenmikrophone zu unterscheiden.

Das *Bandmikrophon* nach OLSON (*113*) besteht aus einem nur wenige μ starken, zur Versteifung in der Querrichtung geriffelten Aluminiumbändchen B (Abb. 252), das locker zwischen den flachen Polschuhen P_1 und P_2 eines Elektromagneten N S gespannt ist. Es dient gleichzeitig als Empfangsmembran und reagiert auf die Schallschnelle. Dieses als Geschwindigkeitsempfänger arbeitende Mikrophon besitzt über einen sehr großen Frequenzbereich (50–15000 Hz) eine fast konstante Empfindlichkeit von etwa 1 mV/μb. Der Klirrfaktor ist praktisch unmerklich. Die Richtcharakteristik in der Horizontalebene stellt einen Kreis dar, der die Bändchenebene berührt, d. h. in der Bändchenebene ist die Empfindlichkeit Null.

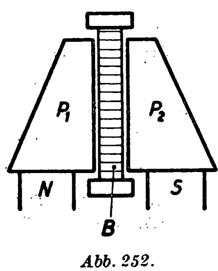


Abb. 252. Bändchenmikrophon.

Wird das Bändchen ganz eng von den Polschuhen umgeben und das hintere Luftvolumen abgeschlossen, so arbeitet das Mikrophon als Druckempfänger, dessen Empfindlichkeit nunmehr um Größenordnungen höher als im Falle des Geschwindigkeitsempfängers wird. Durch geeignete Abmessungen läßt sich auch in diesem Falle ein fast frequenzunabhängiges Druckübertragungsmaß erzielen.

Das *Spulenmikrophon* entspricht vollkommen dem elektrodynamischen Telephon der Abb. 236 (§ 3,43). Um eine möglichst frequenzunabhängige Empfindlichkeitskurve zu bekommen, bemißt man die durch die Membran abgeschlossenen Hohlräume passend und sorgt für optimale Dämpfung. Das Spulenmikrophon besitzt einen linearen Zusammenhang zwischen Schalldruck und erzeugter Wechselspannung und arbeitet praktisch verzerrungsfrei.

In einzelnen Fällen wird das als Umkehrung des elektromagnetischen Telephons entstandene elektromagnetische Mikrophon verwendet. Die Empfindlichkeit dieses Schallempfängers ist bekanntlich dem Produkt $B_0 \frac{dB}{dH}$ proportional und ist bei großer Induktion B_0 dem vorgenannten Mikrophon überlegen. Da der als Membran ausgebildete Anker eine verhältnismäßig große Masse darstellt, die nur wenig gedämpft schwingt und daher eine ausgeprägte Eigenfrequenz besitzt, eignet sich dieses Mikrophon vor allem als Signalempfänger. Auch für die Aufnahme von Körperschall läßt es sich mit Vorteil verwenden, weil die Membran direkt mit der schwingenden Oberfläche in Berührung gebracht werden kann und genügend schallhart ist.

4,6 Piezoelektrischer Schallempfänger

Wegen der großen Schallhärte des als Empfänger wirkenden Piezokristalls wird in Gasen nur ein geringer Bruchteil der auftreffenden Schallenergie absorbiert. Aus diesem Grunde beschränkt sich die Verwendung des Piezoempfängers auf den Ultraschallbereich und insbesondere auf den Signalempfang in Flüssigkeiten.

Treffen auf die piezoelektrische Kristallplatte oder eine Platte aus Bariumtitanat in Richtung der Flächennormalen Schallwellen mit der Eigenfrequenz der Platte auf, so wird diese zu Resonanzschwingungen angeregt. Durch die in der Platte auftreten-

den Zug- und Druckspannungen werden infolge des direkten piezoelektrischen Effektes an den Elektroden elektrische Wechselladungen hervorgebracht, die verstärkt und gleichgerichtet durch ein Meßinstrument nachgewiesen und als Maß für die Schallenergie verwendet werden.

In vielen Fällen ist eine akustische Wahrnehmung der Ultraschallschwingungen bequemer, wozu die von ABELLO angegebene Schaltung der Abb. 253 geeignet ist. Die vom Empfangsquarz Q gelieferte Wechselspannung wird zuerst durch die Elektronenröhre E_1 verstärkt und über die Spule L_1 mit dem aus der Induktivität L_2 und dem Kondensator C bestehenden Schwingungskreis der Röhre E_2 gekoppelt. Diese zweite Stufe ist als rückgekoppeltes Audion geschaltet und wird mit Hilfe des veränderlichen Kondensators C auf eine hörbare Schwebungsfrequenz eingestellt, die mit dem an Ü geschalteten Lautsprecher abgehört werden kann.

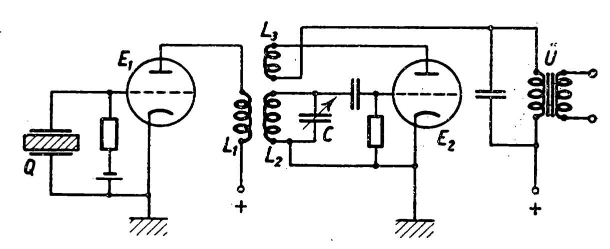


Abb. 253. Rückgekoppelter Quarzempfänger.

In abgeschlossenen Meßräumen kleiner Ausdehnung, in denen sich stehende Wellen erzeugen lassen, kann man als Empfänger den Senderquarz selbst verwenden. Fällt nämlich die reflektierte Schallwelle auf die schallabstrahlende Fläche des Quarzes mit entgegengesetzter Phase auf, so ist eine besonders große Rückwirkung auf den Sendequarz zu erwarten, die einer zusätzlichen äußeren Dämpfung gleichkommt. Bei einer Verschiebung des Quarzes im Schallfeld um eine halbe Wellenlänge wiederholt sich diese Erscheinung. Diese Rückwirkung, die vor allem bei den sog. akustischen Interferometern ausgenutzt wird, läßt sich durch Messen der Spannung am Sendequarz, des durchfließenden Hochfrequenzstromes oder des Anodengleichstromes des Röhrensenders sehr empfindlich nachweisen (*58*).

An Stelle der Quarzplatten lassen sich solche aus Seignettesalz mit ihrer besonders großen Empfindlichkeit oder aus Titanaten von Barium und Strontium verwenden (*50*).

4,7 Thermische Schallempfänger (*61*)

Als thermische Schallempfänger, die besonders im Ultraschallgebiet gut zu verwenden sind, werden sehr feine Drähte, sog. WOLLASTON-Drähte gebraucht, die schwach vorgeheizt werden und im stehenden Schallfeld ihren Widerstand ändern. Dabei sind folgende Erscheinungen zu unterscheiden: Im Knoten einer stehenden Welle befinden sich die Gas- und Flüssigkeitsmoleküle in Ruhe, ändern jedoch infolge der Druckschwankungen adiabatisch ihre Temperatur. Bei sehr feinen Drähten lassen sich bis etwa 5 kHz unmittelbar die Druckschwankungen nachweisen (*Knoteneffekt*). Im Schwingungsbauch einer stehenden Welle wird der elektrisch beheizte Draht mit der doppelten Schallfrequenz periodisch angeblasen und daher abgekühlt. Der elektrische Widerstand wird sich also an den Schwingungsbäuchen gegenüber dem Ruhewert verringern (*Schwingungseffekt*). Dazu kann noch eine gerichtete, ebenfalls eine Abkühlung des Drähtchens bewirkende Strömung kommen, deren Wirkung jedoch monoton mit dem Abstand vom Sender abfällt.

Nach v. HIPPEL beträgt die Temperaturschwankung beim Knoteneffekt unter Annahme eines sehr dünnen Drahtes

$$T = \frac{A\,p}{c_p\,\varrho + c_d\,\varrho_d}\,e^{i\omega t} = \frac{\Delta\,T}{1 + c_d\,\varrho_d/c_p\,\varrho}, \tag{4/8}$$

worin A das mechanische Wärmeäquivalent, p der Gasdruck, c_p und ϱ die spezifische Wärme und Dichte des Schallmediums, c_d und ϱ_d spezifische Wärme und Dichte des Drahtmaterials sind. $\Delta\,T$ ist die allein durch die Druckschwankung im Gas hervorgerufene periodische Temperaturänderung. Die wirklich auftretenden Temperaturschwankungen sind in dem Frequenzbereich, in dem sie gut nachgewiesen werden können, sehr gering und betragen auch bei großen Schalldrucken nicht mehr als 10^{-3} ° C. Die quantitative Behandlung des Schwingungseffektes ist wesentlich unübersichtlicher und liefert eine Modulation des Drahtwiderstandes, die mit zunehmender Schallfrequenz wegen der thermischen Trägheit des Drahtes abnimmt und von der doppelten Frequenz ist.

Gewöhnlich wird das feine, nur einige μ starke Platindrähtchen von 10–20 mm Länge (siehe Abb. 114) in eine WHEATSTONE-Brücke geschaltet und im Schallfeld verschoben, wobei aus dem Abstand der Extrempunkte die Wellenlänge mit der großen Genauigkeit von 10^{-3} bestimmt werden kann. Der große Vorteil der Anordnung besteht darin, daß das auszumessende Schallfeld durch den Schallempfänger fast gar nicht gestört wird.

4,8 **Absoluteichung von Mikrophonen** (*20*)

4,81 *Allgemeines*

Für eine Reihe von akustischen Messungen ist die absolute Eichung eines Mikrophons nicht erforderlich, wie bei der Bestimmung der Schalldurchlässigkeit schallschluckender Stoffe, die meistens nur bei einer festen Frequenz interessieren. In anderen Fällen, wie etwa bei der Bestimmung des akustischen Wirkungsgrades eines Wandlers, muß jedoch eine Absoluteichung durchgeführt werden.

Die Eichung des Schallempfängers hat den Zweck, dessen *Übertragungsmaß Ü* (siehe § 4,2) in Abhängigkeit von der Frequenz und eventuell von der Anstrahlrichtung und den Einbauverhältnissen festzustellen. *Ü* wird bekanntlich als die in mV gemessene, vom Mikrophon hervorgebrachte Wechsel-EMK, die der Anregung durch den Schalldruck 1 μb entspricht, definiert. Die Eichaufgabe läuft also darauf hinaus, entweder a) einen definierten Schalldruck zu erzeugen (§ 4,82), b) den Schalldruck aus einer absoluten Meßmethode für die Schallschnelle zu bestimmen (§ 4,83), c) beim Kondensatormikrophon die Kräfte elektrisch zu erzeugen (§ 4,84) oder d) nach dem Reziprozitätsprinzip vorzugehen. In vielen Fällen deckt sich diese Aufgabe mit den Methoden zur Bestimmung der Absolutgrößen des Schallfeldes (§ 5).

4,82 *Druckkammerverfahren* (*23, 149*)

Wie ERNSTHAUSEN (*27*) gezeigt hat, ist dieses Verfahren das genaueste und auch einfachste zur Absoluteichung von Mikrophonen für niedrige Frequenzen. Wie in der Abb. 254 dargestellt ist, verwendet es eine abgeschlossene Kammer D, in der sich das zu eichende Mikrophon M befindet und mit Hilfe eines Kolbens K periodische Druckschwankungen erzeugen lassen. Dieser Kolben kann durch ein Tauch-

spulsystem angetrieben werden, das aus dem Permanentmagneten P und einer von Wechselstrom bekannter Frequenz durchflossenen Tauchspule Sp besteht. Ist q der Querschnitt des Kolbens und a seine Amplitude, V_0 das Kammervolumen und p_0 der Atmosphärendruck ($\approx 10^6$b), so wird der Wechseldruck

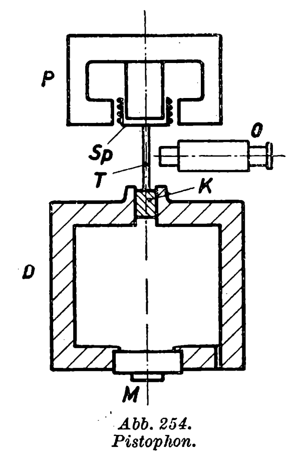


Abb. 254. Pistophon.

$$p = \varkappa \frac{p_0}{V_0} a\, q \tag{4/9}$$

mit $\varkappa = c_p/c_v$. Damit der Kompressionsvorgang adiabatisch verläuft, müssen die Wandungen der Kammer aus Material mit schlechtem Wärmeleitvermögen bestehen (Holz, Bakelit). Die Kolbenamplitude a wird mit dem Meßmikroskop O an einem beleuchteten Glasfaden T an der Kolbenstange abgelesen. Durch eine feine Bohrung in der Kammerwandung werden Druckunterschiede, die sich durch Temperaturänderungen ergeben, ausgeglichen. Dieses als *Pistophon* bezeichnete Gerät eignet sich für einen Frequenzbereich von etwa 30–200 Hz. Durch Veränderung der Antriebsspannung und folglich des Kolbenhubes bei festgehaltener Frequenz läßt sich die Konstanz des Übertragungsmaßes nachprüfen.

Auch das im § 3,46 besprochene Thermophon eignet sich zur Erzeugung eines Normalschalldruckes in einer Meßkammer. Nach Gleichung (3/29) läßt sich für ein gegebenes Kammervolumen V_0 bei bekannten elektrischen Daten des Drähtchens die Schalldruckamplitude errechnen, wobei man für $\varphi(\omega) = \omega^{3/2}$ einsetzen kann. Mit zunehmender Frequenz nimmt hiernach p ab; doch ist das Thermophon meist bis etwa 8000 Hz brauchbar.

4,83 *Eichung mit der* RAYLEIGH*schen Scheibe*

In der RAYLEIGHschen Scheibe besitzen wir bekanntlich ein absolutes und frequenzunabhängiges Instrument für die Schallschnelle (§ 5,21). Da die Schallschnelle v mit dem Schalldruck p nach der Gleichung (1/8) entsprechend $v = p/c\varrho$ zusammenhängt, kann die Druckeichung auf die Messung der Schallschnelle zurückgeführt werden. Zu diesem Zweck erzeugt man in einem *KUNDTschen Rohr* (Abb. 255), dessen Durchmesser kleiner als die halbe Wellenlänge sein muß, stehende Wellen mit Hilfe eines am linken Ende des Rohres angebrachten Lautsprechers L. Das an dem Kolben K befestigte zu eichende Mikrophon M wird so lange verschoben, bis eine stehende Welle mit einem Schalldruckmaximum an M entsteht. In das um eine Viertelwellenlänge hierzu verschobene Maximum der Schallschnelle wird die RAYLEIGHsche Scheibe R gebracht und v absolut gemessen. Wird die Meßfrequenz geändert, so müssen auch S und M auf die sich nunmehr einstellenden Maxima von v und p gerückt werden.

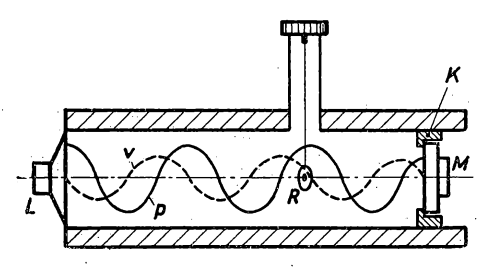


Abb. 255. Eichung im KUNDTschen Rohr.

4,84 *Elektrostatische Eichung*

Nach GRUETZMACHER (*49*) läßt sich die Eichung von Kondensatormikrophonen besonders einfach durchführen, wenn vor der Membran eine dritte Elektrode angebracht wird. Die bereits zum Schutz der Membran M vorhandene durchbrochene Elektrode H (Abb. 256) wird elektrisch gegen M isoliert. Legt man zwischen H und M eine sinusförmige Wechselspannung u und eine im Vergleich dazu sehr viel größere Vorspannung U_0 an, so läßt sich bei bekanntem Abstand d zwischen H und M die auf die Membran ausgeübte Kraft und damit der Schalldruck berechnen. Zum Schutz liegt ein Hochohmwiderstand R_1 in diesem Stromkreis. Es ergibt sich hierfür

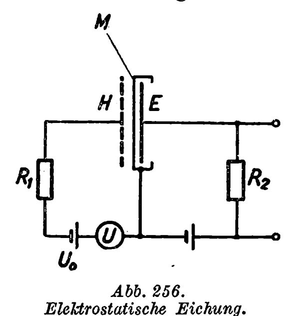


Abb. 256. Elektrostatische Eichung.

$$p = K_1 \, U_0 \frac{u}{d^2}\,, \tag{4/10}$$

wobei $K_1 = 2{,}64 \cdot 10^{-6}$ wird, wenn die Spannungen in Volt, d in cm und p in μb gemessen werden. Die Eichung des Mikrophons wird in der Weise durchgeführt, daß zunächst mit Hilfe eines Meßverstärkers, der an R_2 angelegt wird, die vom Mikrophon durch die auftreffenden Schallwellen erzeugte Wechselspannung gemessen wird. Dann wird bei abgeschalteter Schallquelle die Spannung u bei derselben Frequenz so lange variiert, bis am Verstärker derselbe Meßwert abzulesen ist und p aus Gleichung (4/10) berechnet. Dazu ist allerdings eine sehr genaue Bestimmung von d erforderlich. Nach MEYER (*101*) läßt sich diese umgehen, wenn man auf die Membran einen genau bekannten Unterdruck p_0 einwirken läßt, wodurch sie sich von der Hauptelektrode E entfernt. Mit Hilfe einer regelbaren Gleichspannung U_e läßt sich die Durchbiegung rückgängig machen. Daraus erhält man die Konstante $K_2 = p_0 / U_e^2$, die in Gleichung (4/10) an Stelle von K_1/d^2 eingesetzt den absoluten Zahlenwert für den Schalldruck p liefert. Man kann dieselbe Messung auch mit einem geringen auf die Membran wirkenden Überdruck ausführen und zur Kompensation der Durchbiegung die Gleichspannung U_e zwischen H und M anlegen. In beiden Fällen wird die Membranruhelage mit Hilfe einer empfindlichen HF-Meßbrücke aus der Kapazität zwischen M und E bzw. M und H eingestellt.

Schließlich kann man auf eine Bestimmung von K_1 ganz verzichten und die Eichung an Messungen bei niedriger Frequenz mit Hilfe des Pistophons anschließen.

4,85 *Eichung nach dem Reziprozitätsprinzip* (*24, 145*)

Nach dem im § 2,1 Gesagten ist bei jedem elektroakustischen Wandler der Wirkungssinn umkehrbar, d. h. er läßt sich wie als Sender so auch als Schallempfänger verwenden. Beim Kondensatormikrophon ist bekanntlich (Gleichung 2/9a) die Wechselladung

$$Q = C\,u = k_1\,p\,. \tag{4/11}$$

Andererseits wird durch eine Wechselspannung u bei einer Vorspannung U_0 die Membran eine Volumenänderung

$$\varDelta V = k_2\,u \tag{4/12}$$

hervorbringen. Bei passenden Dimensionen werden die beiden Proportionalitätsfaktoren $k_1 = k_2$. Nun werden in der Druckkammer zwei Mikrophone geeicht und das

Verhältnis ihrer erzeugten Wechselspannung u_1/u_2 bei gleicher Druckamplitude und Frequenz bestimmt. Hierauf wird das Mikrophon 1 als Schallquelle benutzt und am Mikrophon 2 die Spannung u_2' gemessen, die einer am Mikrophon 1 angelegten Spannung u_1' entspricht. Daraus erhält man für das Übertragungsmaß der beiden Schallempfänger die Beziehungen:

$$\ddot{U}_1 = \sqrt{\frac{V_0}{10\,\varkappa\, p_0\, C_1}\left(\frac{u_1}{u_2}\cdot\frac{u_2'}{u_1'}\right)}$$
$$\ddot{U}_2 = \sqrt{\frac{V_0}{10\,\varkappa\, p_0\, C_1}\left(\frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{u_2'}{u_1'}\right)}, \qquad (4/13)$$

wenn p_0, V_0 und $\varkappa$ den Werten der Gleichung (4/9) entsprechen. Bei Anwendung dieses Verfahrens ist es nicht nötig, zwei Kondensatormikrophone zu vergleichen; es genügt, wenn als Vergleichsempfänger ein linear arbeitendes Mikrophon dient.

Es empfiehlt sich, jedes Mikrophon nach mehreren der angegebenen Verfahren zu eichen, um vergleichen und Meßfehler eliminieren zu können.

4,86 *Der Einfluß der Schallbeugung*

Bei der Eichung mit den unter § 4,82 und § 4,83 genannten Verfahren werden die am Mikrophon im wirklichen Schallfeld auftretenden Beugungserscheinungen nicht berücksichtigt. Diese sind frequenzabhängig und nur bei einigen einfachen Körpern leicht zu übersehen. Für eine Kugel, in die das Mikrophon im Staupunkt bündig eingesetzt wird, läßt sich der Beugungseinfluß exakt rechnerisch erfassen (*126*). Trägt man als Ordinate das Verhältnis des Schalldruckes p am Staupunkt der Kugelfläche zum ungestörten Schalldruck p_0 am Ort der Kugel abhängig vom Produkt aus Kugeldurchmesser d und Frequenz ν auf, so erhält man die in Abb. 257 wiedergegebene Kurve. Aus ihr ist ersichtlich, daß der Einfluß der Beugung für kleine $\nu\, d$ zunächst unerheblich ist, bei großen Frequenzen jedoch sich asymptotisch dem Wert 2 nähert. Für absolute Messungen werden daher die Mikrophone stromlinienförmig verkleidet, um den Beugungseinfluß berücksichtigen zu können.

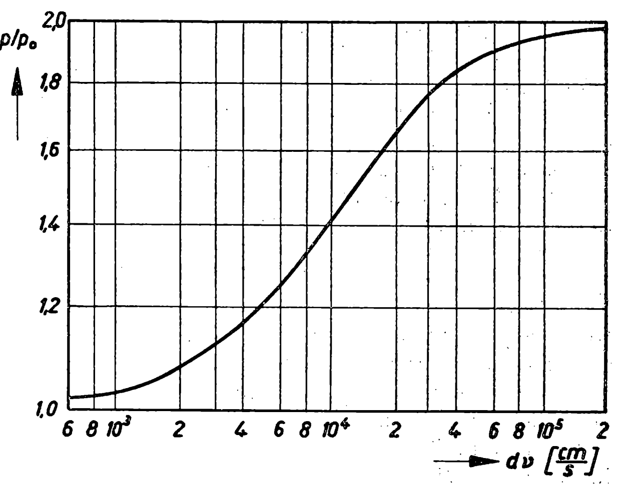


Abb. 257. Schallbeugung am Kugelmikrophon.

§ 5 MESSUNG DER SCHALLFELDGRÖSSEN (*105*)

Unter Schallfeldgrößen versteht man die bereits im § 1 besprochenen Meßgrößen Schalldruck, Schallschnelle und Schallamplitude, zu denen noch der Schallstrahlungs-

druck und die Frequenz kommen. Zur Messung von Schalldruck und Schallschnelle werden die im § 4 besprochenen Schallempfänger verwendet, von deren Schallhärte im Vergleich zum Wellenwiderstand des Schallmediums es abhängt, welche der beiden Größen aufgenommen und angezeigt wird.

5,1 Schalldruckmessung

Zur Schalldruckmessung dient in den meisten Fällen das Kondensatormikrophon (§ 4,4), dessen Membranbewegung elektrisch gemessen wird. Durch eine Eichung mit Hilfe des Thermophons, des Pistophons oder durch eine elektrische Methode (3. Elektrode) läßt sich der Schalldruck in Absolutwerten angeben. Bei guten Mikrophonen ist die Anzeige einschließlich des Verstärkers in einem Bereich von 30 bis 12000 Hz fast unabhängig von der Frequenz. Der sich bei der Druckeichung im Pistophon ergebende Unterschied gegenüber der Feldeichung läßt sich für einfache Mikrophonformen (Kugelmikrophon) rechnerisch genügend genau erfassen.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß ein vollkommener Druckempfänger eine unendlich schallharte Membran haben sollte. Beim hochabgestimmten Kondensatormikrophon und noch mehr bei piezoelektrischen Schallempfängern ist diese Forderung weitgehend erfüllt. Wie GERLACH (*43*) gezeigt hat, kann durch ein Kompensationsverfahren auch ein „schallweiches" Mikrophon als reiner Druckempfänger arbeiten.

Es wird von einem Bändchenmikrophon (§ 4,5) ausgegangen, in dessen Aluminiumbändchen bei der Bewegung im Schallfeld eine Wechselspannung erzeugt wird. Schickt man nun durch das Bändchen gleichzeitig einen regelbaren Strom, dessen Phase genau um 180° gegen den induzierten Strom verschoben ist, so wird bei einer bestimmten Größe des Hilfsstromes der Schalldruck vollkommen kompensiert, d. h. das Bändchen in Ruhe bleiben. Die Nulleinstellung wird dadurch vorgenommen, daß hinter dem Bändchen ein kleines, empfindliches Mikrophon aufgestellt ist, das bis zur völligen Ruhe abgeglichen wird. Der gesuchte Schalldruck berechnet sich dann aus der Beziehung:

$$p = \frac{B_0 J}{b}, \qquad (5/1)$$

wenn B_0 die magnetische Induktion, J der Kompensationsstrom und b die Bändchenbreite ist. Für diese Messung ist allerdings erforderlich, daß der Kompensationsstrom eine gute Sinusform besitzt, damit die Phase durch einen Phasenschieber genau abgeglichen werden kann.

Auch beim Kondensatormikrophon ist nach MEYER (*101*) das Kompensationsverfahren anwendbar. Zwischen Gegenelektrode und Membran wird in Serie zur Gleichvorspannung U_0 eine in Phase und Größe veränderliche Wechselspannung u gelegt. Ist die dadurch hervorgerufene Wechselkraft der durch den Schalldruck hervorgerufenen genau entgegengesetzt gerichtet, so wird die Membran in Ruhe bleiben. Die Ruhelage der Membran läßt sich mit Hilfe einer HF-Verstärkerschaltung nach Abb. 251 einstellen. Im Fall des Abgleichs folgt für den Schalldruck entsprechend (4/10)

$$p = K_1 U_0 \frac{u}{d^2}.$$

Ein ähnliches Verfahren ist von TISCHNER (*140*) für ein gewöhnliches Telephon angegeben worden, wobei der Schalldruck elektromagnetisch kompensiert wird.

Soll der Schalldruck in einer freien Welle bestimmt werden, wird man im allgemeinen das Kondensatormikrophon gebrauchen, da dessen Membrandurchmesser hinreichend klein gehalten werden kann. Wie bereits im § 4,86 dargelegt wurde, entsprechen sich der Schalldruck an der Membran eines Schallempfängers und der im ungestörten Feld dort herrschende Schalldruck nicht. Das Verhältnis der beiden Drucke hängt von der Größe des Mikrophons und der Frequenz ab und ist für ein kugelförmiges Mikrophon der Abb. 257 zu entnehmen. Ist die Fortpflanzungsrichtung des Schalles in bezug auf die Lage des Mikrophons nicht bekannt, so kommt zur Schallbeugung noch der Einfluß der Richtwirkung des Mikrophons. Diese hängt sowohl von der Form des Schallempfängers als auch stark von der Frequenz ab und ist beim Kugelmikrophon nur in einem Winkelbereich von etwa $\pm 10°$ zu vernachlässigen (*54*).

5,2 Messung der Schallschnelle

5,21 *RAYLEIGH-Scheibe*

Die Messung der Schallschnelle v mit Hilfe der RAYLEIGH-Scheibe gehört zu den einfachsten Schallmeßverfahren und wurde bereits 1882 angegeben. RAYLEIGH fand, daß sich eine dünne, an einem Torsionsfaden aufgehängte Kreisscheibe beim Auftreffen einer Schallwelle senkrecht zur Schallrichtung einzustellen sucht. Bezeichnet man mit R den Radius der Scheibe und ist ϑ der Winkel zwischen Schallrichtung und Scheibennormalen (Abb. 258), so wird nach KÖNIG in der Drehachse ein Drehmoment von der Größe

$$M = \frac{4}{3} v^2 \varrho R^3 \sin 2\vartheta \qquad (5/2)$$

ausgeübt. Zur Messung des Drehmomentes M wird das dünne Scheibchen aus Glimmer oder Glas an einem sehr feinen WOLLASTON-Draht oder Quarzfaden F aufgehängt und der Drehwinkel α mit Hilfe eines an dem auf die Scheibe geklebten Spiegelchens Sp reflektierten Lichtstrahls gemessen. Ist D die Direktionskraft des Fadens, errechnet sich die Schallschnelle aus (5/2) und $M = D\alpha$ zu

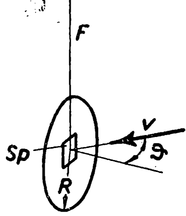


Abb. 258. RAYLEIGH-Scheibe.

$$v^2 = \frac{3M}{4\varrho R^3} = \frac{3D\alpha}{4\varrho R^3} = K\alpha. \qquad (5/3)$$

Nach dieser experimentell vollkommen bestätigten Beziehung ist demnach der Ausschlag dem Quadrat der Schallschnelle und damit der Schallintensität proportional. Der Drehwinkel α muß natürlich klein bleiben, damit $\sin 2\vartheta = 1$ bleibt. Die für Absolutmessungen noch zu bestimmende Direktionskraft D läßt sich aus der Eigenschwingungsdauer und dem genau genug zu berechnenden Trägheitsmoment der Scheibe feststellen. Eine andere Eichmöglichkeit besteht darin, Gleichung (5/3) auf einen Gleichluftstrom bekannter Geschwindigkeit anzuwenden und daraus die Apparatekonstante K zu bestimmen.

Die Anzeige von α ist unabhängig von der Schallfrequenz, solange der Scheibenradius gegen die Wellenlänge klein ist; für $R/\lambda \leqq 0{,}07$ gilt die Beziehung (5/3) streng. Das hat nun allerdings die unangenehme Folge, daß auch Gleichluftströme ($\lambda = \infty$) angezeigt werden und sich jede Luftbewegung im Raum störend bemerkbar macht. Aus diesem Grunde schützt man die Scheibe durch eine Umhüllung aus dünner Gaze.

Nach SIVIAN (*132*) läßt sich dieser Nachteil vermeiden, wenn der messende Schall mit der Eigenfrequenz der Torsionsschwingungen ausführenden Scheibe moduliert wird. Der sich ergebende dynamische Ausschlag ist dann der Schallschnelle proportional und hängt nur vom Dämpfungswiderstand der Scheibe ab. Da dieser mit der dritten Potenz des Scheibendurchmessers anwächst, wird der Schwingungsausschlag von der Scheibengröße unabhängig. Ein Nachteil dieser Methode besteht darin, daß eine Modulation der Schallquelle nur im Falle der elektrischen Erregung durchführbar ist.

5,22 *Thermische Messung der Schallschnelle*

Wie bereits im § 4,7 gezeigt wurde, läßt sich die Schallschnelle mit einem elektrisch beheizten Draht messen. Die im Geschwindigkeitsbauch einer stehenden Welle hervorgerufene Widerstandsänderung ΔR ist dem Quadrat der Schallschnelle v proportional. Es setzt sich diese aus

$$\Delta R = K_1 \frac{v_0^2}{2} + K_2 \frac{v_0^2}{2} \cos 2\,\omega t \qquad (5/4)$$

zusammen, wenn v_0 die Amplitude der Schallschnelle ist. Wie aus Abb. 259 hervorgeht, ist für kleine Werte von v der quadratische Zusammenhang mit ΔR sowohl für den konstanten Kühleffekt als auch für den periodischen „Obertoneffekt"

$$K_2 \frac{v_0^2}{2} \cos 2\,\omega t$$

experimentell bestätigt. Die Widerstandsänderungen werden mit zunehmender Frequenz geringer und sind über 2000 Hz nicht mehr nachweisbar.

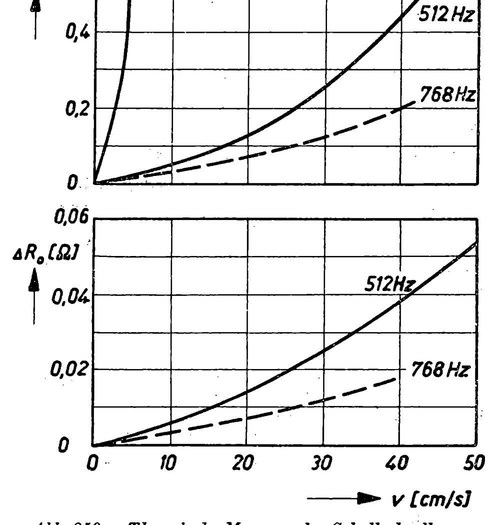


Abb. 259. Thermische Messung der Schallschnelle.

5,3 Schallausschlag

5,31 *Schallausschlag im Schallmedium*

Der Schallausschlag a ist im Schallmedium nach Gleichung (1/2) aus der Schallschnelle $v = \omega a_0 \cos \omega (t - x/c)$ bzw. aus dem Schalldruck zu berechnen. Eine direkte Methode zur Messung von a_0 läßt sich nach GEHLHOFF mit Hilfe fein zerstäubter Öltröpfchen ($r = 10^{-4}$ cm) durchführen, wenn deren Bewegung im Schallfeld ultramikroskopisch beobachtet wird. Bei hohen Frequenzen macht sich die Massenträgheit der Tröpfchen bemerkbar; die beobachtete Bewegung wird geringer als der Schallausschlag der Luftteilchen.

Eine elektrische Methode mit Hilfe des *Kathodophons* wurde von MEYER (*104*) eingehend untersucht. Dieses Gerät besteht aus einer Glühkathode, z. B. einem NERNST-Stift, dem in Luft in sehr kleinem Abstand (< 1 mm) eine durchbrochene Anode

gegenübersteht. Die aus der Kathode austretenden Elektronen lagern sich den neutralen Luftmolekülen an, bilden also negative Ionen, die zur auf einige hundert Volt geladenen Anode laufen. Diese Entladung wird so in das Schallfeld gebracht, daß Schallrichtung und Stromrichtung übereinstimmen. Der periodische Anteil des Entladungsstromes ist der Bewegungsamplitude der Luftteilchen proportional und wird mit Hilfe eines Verstärkers gemessen. Als Nachteil dieser Methode ist die Anfälligkeit gegen Luftströmungen und die hohe Rauschspannung der Entladungsstrecke zu vermerken.

Für mehr qualitative Messungen ist auch die sog. Schalldüse in Verbindung mit einem sehr empfindlichen Mikromanometer brauchbar. Fällt eine Schallwelle auf eine enge, sich konisch erweiternde Düse auf, so stellt man fest, daß sie leichter aus dem weiten in den engen Teil als umgekehrt läuft. Ist die Düse mit einem abgeschlossenen Luftvolumen verbunden, so stellt sich in diesem ein Unterdruck ein, wenn sich die Düsenöffnung nach außen hin verengt. Der sich einstellende Druck ist etwa dem Schallausschlag verhältnisgleich. Zur Messung der sehr kleinen Druckunterschiede eignet sich besonders die im § 8,583 (I. Teil) beschriebene Kleindruckwaage nach REICHARDT.

5,32 *Schallamplitude von Oberflächen*

Die Amplitude von Oberflächen schallabstrahlender Körper kann bei relativ großen Bewegungen mit dem Mikroskop ausgemessen werden. Sehr kleine Bewegungen werden kapazitiv bestimmt, indem man die Oberfläche des zu untersuchenden Körpers als die eine, eine in sehr geringem Abstand davor angebrachte feste Elektrode als die zweite Belegung eines Luftkondensators ausbildet. Die kleinen Kapazitätsänderungen lassen sich in einer Brückenanordnung oder mit Hilfe der HF-Schaltung in Abb. 251 bestimmen. Dabei ist darauf zu achten, daß durch die feste Elektrode nicht eine zusätzliche Luftdämpfung und damit eine Beeinflussung der Amplitude entsteht (durchbrochene Elektrode!). Die Bewegungsamplitude läßt sich auch durch unmittelbares Aufsetzen empfindlicher Mikrophone geringer Schallhärte messen.

5,4 Schallstrahlungsdruck

Außer den Wechseldrücken, deren Messung in den vorigen Abschnitten besprochen wurde, tritt beim Auftreffen einer Schallwelle auf ein Hindernis ein Gleichdruck, der sog. Schallstrahlungsdruck auf. Dieser ist theoretisch in der Nichtlinearität der Wellengleichung begründet, wenn die quadratischen Glieder berücksichtigt werden. Nach RAYLEIGH ist der Schallstrahlungsdruck S durch die Beziehung gegeben:

$$S = \tfrac{1}{2}(1 + \varkappa) E = \tfrac{1}{2}(1 + \varkappa) \frac{I}{c}, \qquad (5/5)$$

wenn E die nach Gleichung (1/5) bestimmte Schallenergie und $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p/c_v sind. Mit zunehmender Frequenz wird sich S leichter nachweisen lassen. Für das Beispiel eines in Wasser betriebenen Quarzsenders mit der spezifischen Flächenleistung von $1\ \text{W/cm}^2 = 10^7\ \text{erg/cm}^2\,\text{s}$ erhält man neben einer Schalldruckamplitude von $5{,}4 \cdot 10^5\ \mu\text{b}$ einen Schallstrahlungsdruck von $135\ \mu\text{b}$. Für dieselbe Schallintensität in Luft wird $p_0 = 930\ \mu\text{b}$ und $S = 360\ \mu\text{b}$. Der Schallstrahlungsdruck wird häufig mit dem Schallradiometer, das schematisch in der

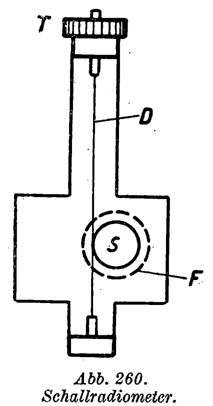


Abb. 260. Schallradiometer.

Abb. 260 dargestellt ist, gemessen. Ein runder, der Schallwelle ausgesetzter Flügel S aus Glimmer oder Glas hängt einseitig an einem dünnen Quarz- oder Metallfaden D hinter dem Fenster F des Gehäuses. Der sich ergebende Verdrehungswinkel ist dem Schallstrahlungsdruck proportional und kann bei kleinen Werten durch Fernrohr und Spiegel, bei größeren durch Kompensation mittels des mit einer Kreisteilung versehenen Torsionskopfes T abgelesen werden. Für Absolutmessungen ist der Reflexionskoeffizient des Schalles am Flügel S zu berücksichtigen, der sich nach Gleichung (1/22) für Luft-Glas zu 100%, für Wasser bzw. Öl-Glas zu etwa 70% berechnet. Der Einfluß der Schallbeugung an dünnen Radiometerscheibchen ist von King (*76*) genau untersucht worden.

Sehr große Schallstrahlungsdrucke in Flüssigkeiten lassen sich bei senkrechter Schallrichtung direkt mit Hilfe einer Waage messen (*134*).

5,5 Messung der Frequenz

Für die Bestimmung der sekundlichen Schwingungszahl einer Schallwelle oder Frequenz kommen mechanisch-akustische und elektrische Verfahren in Frage. Es soll dabei nur von Messungen an reinen Tönen gesprochen werden, liegen Frequenzgemische vor, so werden die Verfahren der Klanganalyse (§ 8) angewandt.

Die mechanisch-akustischen Verfahren verwenden eine Vergleichstonquelle, deren Frequenz festliegt oder kontinuierlich verändert werden kann. Durch Einstellen auf die zu messende Frequenz oder Abzählen der sekundlichen Schwebungen wird der Vergleich vorgenommen. Als Tonquelle dienen geeichte Stimmgabeln oder Längsschwinger, Tonfrequenzgeneratoren mit Lautsprecher, Licht- und Tonsirenen. Frequenznormalien in Form von Magnetostriktionsstäben und vor allem bei sehr hohen Frequenzen Schwingquarze zeichnen sich durch außerordentlich hohe Konstanz und sehr geringe Temperaturabhängigkeit aus. Für Eichzwecke werden auch von den Rundfunksendern täglich Normaltöne (meistens 1000 Hz) ausgestrahlt. Schallquellen fester Frequenz werden durch gleichzeitiges Aufzeichnen mit einer Normaltonquelle durch einen Oszillographen und Auszählen der Schwingungen geeicht. Bei bekannter Schallgeschwindigkeit c läßt sich die Frequenz ν auch aus der bei einer stehenden Welle beobachteten Wellenlänge $\lambda = c/\nu$ bestimmen.

Die elektrischen Verfahren eignen sich für alle Schallmeßmethoden, bei denen die Schallquelle elektrisch angeregt wird oder die am Empfänger auftretende Wechselspannung oszillographiert werden kann. Im einzelnen wird auf die im Band III besprochenen Verfahren der Frequenzmessung verwiesen.

5,6 Messung der Gesamtenergie von Schallquellen

Summiert man die experimentell gewonnenen Werte für die Schallintensität, d. h. den Schalldruck oder die Schallschnelle, über die Oberfläche einer die Schallquelle umschließende Kugel, so läßt sich daraus die gesamte Schallenergie des Senders angeben. Um störende Reflexionen an Oberflächen der Umgebung zu vermeiden, muß die Schallquelle hoch über dem Erdboden aufgehängt werden oder unmittelbar an der Erdoberfläche angebracht sein, wobei im letzten Fall nur über eine Halbkugel integriert wird. Diese sehr umständlichen Messungen lassen sich auch in geschlossene

Räume verlegen, wenn es gelingt, Schallreflexionen und damit die Ausbildung stehender Wellen zu vermeiden. Diesem Zweck dienen die sog. schalltoten Räume, deren Wände mit einer stark schallschluckenden Bekleidung versehen sind. Diese kann z. B. aus spitzen Gazebeuteln bestehen, die mit Schlackenwolle oder Watte ausgestopft und senkrecht auf den Wänden befestigt sind. Die hohe Absorption dieser Wandbekleidung vermeidet störende Interferenzen und ermöglicht Intensitätsmessungen an Schallquellen.

Diese sehr zeitraubende Methode läßt sich umgehen, wenn man nach MEYER und JUST (*107*) (vgl. § 3,31) die Gesamtintensität einer Schallquelle durch Messung der Schallenergie in einem Nachhallraum bestimmt. In einem geschlossenen Raum, dessen Gesamtschallschluckung $A = \sum_i a F_i$ beträgt, wobei a die Schluckzahl der einzelnen Flächen F ist, stellt sich bei einer ausgestrahlten Gesamtleistung N eine diffuse Schallenergie $E = 4\,N/Ac$ ein. Die gesuchte Gesamtleistung N läßt sich also aus einer einzigen Messung der Schallenergie bzw. von Schalldruck oder Schallschnelle ermitteln, sofern A bekannt ist. Diese Größe eines Hallraumes wird aus Nachhallversuchen in der Weise bestimmt, daß man die Zeit T mißt, in der der Schalldruck p eines Knalles auf den 10^{-3}ten Teil abfällt. Ist V das Volumen des Hallraumes, errechnet sich die Schallschluckung A aus:

$$A = \frac{0{,}16}{T} V. \qquad (5/6)$$

Es genügt dann, in diesem diffusen Schallfeld an einer einzigen Stelle den Schalldruck p zu messen, woraus sich die Gesamtleistung zu

$$N = 6{,}1\,A\,p^2\;(\mu\mathrm{W}) \qquad (5/7)$$

ergibt. Um störende Interferenzerscheinungen in einer solchen akustischen ULBRICHTschen Kugel zu vermeiden, kann man solche Messungen nicht mit reinen Tönen durchführen, sondern muß sog. Heultöne verwenden. Diese entstehen durch Frequenzmodulation eines Tones mit einer niedrigeren Frequenz $\Delta\,\nu$, wodurch an Stelle des reinen Tones ν_0 ein Frequenzband durchlaufen wird, das von $\nu_0 - \Delta\,\nu$ bis $\nu_0 + \Delta\,\nu$ reicht. Die relative Bandbreite $\Delta\,\nu/\nu_0$, die zum Verwischen möglichst vieler Interferenzen erforderlich ist, hängt von ν_0 und dem Raumvolumen ab. Man erzeugt diese Heultöne durch einen Lautsprecher, der von einem sog. Wobbelgenerator (*34*) gespeist wird. Dieser besteht aus einem Überlagerungssender, dessen feste Frequenz mit Hilfe eines rotierenden Kondensators moduliert wird und dessen Frequenzhub $\Delta\,\nu$ durch die maximale Kapazität des rotierenden Kondensators bestimmt ist.

5,7 **Lautstärke-Messung** (*82*)

Die bisher behandelten akustischen Meßverfahren beziehen sich ausschließlich auf die objektive Messung der Schallenergie. Die subjektiv empfundene Lautstärke unterscheidet sich hiervon grundsätzlich, wie die Betrachtung der in der Abb. 246 dargestellten Lautstärkekurven beweist. Der Verlauf der Hörschallkurven zeigt, daß z. B. zwei Töne von etwa 62 und 500 Hz als gleich laut empfunden werden, sich jedoch bezüglich des Schalldruckes um zwei Zehnerpotenzen unterscheiden. Die Lautstärkemessung muß daher auch bei Benutzung von objektiv anzeigenden Meßgeräten den Empfindlichkeitskurven des menschlichen Ohres angepaßt sein.

5,71 *Geräuschmesser nach* BARKHAUSEN (*7*)

Bei der subjektiven Lautstärke- bzw. Geräuschmessung vergleicht man die Lautstärke zweier Schalle unmittelbar mit dem Ohr. Der Vergleichsschall wird durch einen fest eingestellten Generator hergestellt und auf ein Telephon gegeben, das durch ein in Phon geeichtes Dämpfungsglied so stark geschwächt wird, bis in beiden Ohren derselbe Gehöreindruck entsteht.

Die Schaltung der von BARKHAUSEN angegebenen Einrichtung ist in der Abb. 261 wiedergegeben. Durch einen von der Stromquelle B betriebenen Summer S wird eine obertonreiche Wechselspannung von etwa 1000 Hz erzeugt, mit der ein Überträger Ü gespeist wird. Die Sekundärwicklung dieses Transformators wird an das Telephon T gelegt, zu dem eine Serienschaltung von Widerständen $R_1 - R_{10}$ parallel liegt. Diese durch einen Umschalter veränderlichen Nebenwiderstände sind so dimensioniert, daß das Telephon im Ohr des Beobachters die der Lautstärkekurve bei 1000 Hz entsprechenden Schalldrucke erzeugt. Am Umschalter ist eine Grobteilung von 10, 20, 30, ..., 100 Phon abzulesen; durch einen Feinregler lassen sich auch Zwischenwerte einstellen. Nun wird durch Umschalter und Feinregler der durch das Telephon fließende Strom so lange variiert, bis die Schalleindrücke in diesem und im freien Ohr als gleich stark empfunden werden.

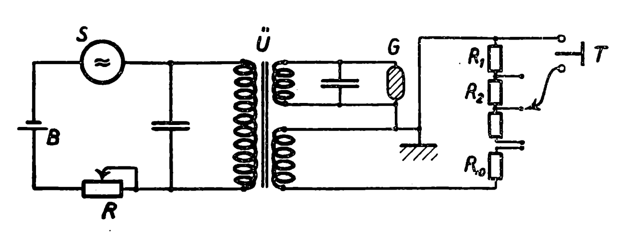


Abb. 261. Geräuschmesser nach BARKHAUSEN.

Um die Spannung am Überträger nachprüfen bzw. durch den Widerstand R nachstellen zu können, liegt an einer zweiten Sekundärwicklung eine kleine Glimmlampe G, deren Zündeinsatz beobachtet wird.

Diese Methode setzt gleiche Empfindlichkeit beider Ohren voraus; durch ein Vertauschungsverfahren läßt sich eine fehlerhafte Messung vermeiden.

5,72 *Verdeckungsmethode*

Ein weiteres subjektives Lautstärkemeßverfahren macht sich den von WEGEL und LANE (*146*) entdeckten Verdeckungseffekt zunutze, der darin besteht, daß ein leiser Ton durch einen lauteren vollkommen ausgelöscht werden kann. Die Lautstärkemessung nach diesem Verfahren benutzt einen Wobbelgenerator, dessen Spannung an ein Telephon gelegt wird. Dieses liegt nicht unmittelbar auf dem Ohr auf, sondern besitzt eine Vorkammer mit Löchern, durch die das zu messende Geräusch an das gleiche Ohr gelangen kann. Nachdem zuerst im ruhigen Raum der Schwellwert des Normaltones bestimmt wurde, mißt man in Gegenwart des Geräusches die erforderliche Schwellenwerterhöhung mit einem in Phon regelbaren Verstärker. Die Einstellung der Verdeckung ist sehr scharf und ergibt sehr genaue Ergebnisse.

5,73 *Objektive Lautstärkemessung* (*62*)

Der objektive Lautstärkemesser besteht aus einem Mikrophon, einem Verstärker und einem Anzeigeinstrument, dessen Lautstärkenangabe bezüglich der logarithmischen Empfindlichkeit und des gehörrichtigen Frequenzverlaufes dem Ohr weit-

gehend angepaßt ist. Die Absolutempfindlichkeit des Verstärkers wird in der Weise eingeregelt, daß bei einem ankommenden Schalldruck von 1 μb bei 1000 Hz entsprechend Abb. 246 das Instrument 70 Phon angibt. Der Frequenzgang des Verstärkers ist von der Lautstärke nicht unabhängig und wird meistens für eine mittlere Lautstärke von 30 oder 40 Phon mit Hilfe eines mehrstufigen Widerstandsverstärkers (*142*) mit kapazitiver Kopplung nachgebildet. Die absolute Eichung des Verstärkers auf den Normalschalldruck und die Kontrolle des Frequenzverhaltens ist für das Kondensatormikrophon als Empfänger mit guter Genauigkeit nach dem § 4,84 mit Hilfe einer dritten Elektrode durchzuführen. Bei Messungen über den gesamten Lautstärkebereich von 10 bis 100 Phon bildet man durch geeignete Verstärkerschaltungen mehrere Frequenzkurven, z. B. die von 30, 60 und 80 Phon nach, wobei die einzelnen Bereiche ohne Änderung der Empfindlichkeit umzuschalten sein müssen. Dieses Verfahren ist auch für eine laufende Registrierung verwendbar.

Eine Berücksichtigung der nichtlinearen Verzerrungen des Ohres beim Bau objektiver Lautstärkemesser hat bisher noch nicht Eingang gefunden.

§ 6 MESSUNG DER SCHALLAUSBREITUNGSGRÖSSEN

6,1 Schallgeschwindigkeit

6,11 *Allgemeines*

Als Schallgeschwindigkeit bezeichnet man die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen in dem betreffenden Medium. Auf Grund der Vorstellung, daß sich die Schallwelle als adiabatische Druckstörung fortpflanzt, erhält man für Gase und Flüssigkeiten die bekannte Beziehung:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\beta_{ad}\,\varrho}} = \sqrt{\frac{\varkappa}{\beta_{is}\,\varrho}}, \qquad (6/1)$$

wenn β_{ad} und β_{is} die adiabatische bzw. isothermische Kompressibilität des Mediums, $\varkappa = c_p/c_v$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen und ϱ dessen Dichte sind. Aus der Messung der Schallgeschwindigkeit läßt sich mit Hilfe der aus Gleichung (6/1) abzuleitenden Beziehung

$$v = \sqrt{\frac{R\,T}{M}\,\varkappa}, \qquad (6/2)$$

worin R die Gaskonstante, T die absolute Temperatur und M das Molekulargewicht bedeuten, das Verhältnis $\varkappa$ bestimmen. Gleichung (6/1) gilt jedoch nur bis zu solchen Frequenzen, deren Wellenlänge größer als die freie Weglänge der Moleküle bei Gasen bzw. größer als der mittlere Molekülabstand bei Flüssigkeiten ist. Ist die Wellenlänge von der Größe des Molekularabstandes, was bei hohen Ultraschallfrequenzen der Fall sein kann, so tritt in einem charakteristischen Frequenzbereich anomale Dispersion und eine Absorption im Medium auf, wie das in Abb. 262 schematisch dargestellt ist. Diese erstmalig von Pierce (*120*) an Kohlensäure gefundene Er-

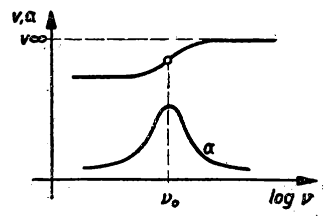


Abb. 262. Anomale Dispersion der Schallgeschwindigkeit und Absorption.

scheinung macht sich durch eine mit der Frequenz anwachsende Vergrößerung der Schallgeschwindigkeit im Bereich einer bestimmten Resonanzfrequenz ν_0 bemerkbar. Gleichzeitig zeigt sich ein symmetrisch zu ν_0 liegendes Maximum der Schallabsorption. Die Resonanzstelle ist für jedes Schallmedium eine charakteristische Größe, die allerdings von den Zustandsgrößen abhängt, aber ein Maß für die Relaxationszeit darstellt, aus der sich wichtige Größen wie Stoßzahl und andere entnehmen lassen.

Bei den festen Körpern ist der Vorgang der Schallausbreitung insofern komplizierter, als wegen des Auftretens von Schubspannungen nicht nur Longitudinalschwingungen, sondern auch Transversalschwingungen möglich sind. Bezeichnet man den Elastizitätsmodul mit E, die Poissonsche Zahl mit μ und die Dichte mit ϱ, so gilt für die beiden Schallgeschwindigkeiten bei unendlich ausgedehntem Medium

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\varrho} \frac{1-\mu}{(1+\mu)\,(1-2\,\mu)}}, \tag{6/3}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{E}{\varrho} \frac{1}{2\,(1+\mu)}}. \tag{6/4}$$

Sind longitudinale und transversale Geschwindigkeit aus Messungen bekannt, lassen sich daraus sehr genau die elastischen Konstanten ermitteln (siehe 1. Teil, § 11,24). Die Longitudinalgeschwindigkeit mißt man bekanntlich durch die Eigenschwingungszahl eines an den Schwingungsknoten gelagerten Stabes und erhält

$$v_l = 2\,l\,\nu = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}, \tag{6/5}$$

wenn l die Stablänge zwischen zwei Knoten ist. Diese Beziehung gilt streng nur für dünne Stäbe in bezug auf die Stablänge. Für dicke Stäbe wird nach Rayleigh der Einfluß der Querdehnung durch die Beziehung

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\varrho} \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}} \tag{6/6}$$

berücksichtigt, wobei $\varepsilon = \left(\frac{\pi\,n\,r}{2\,l}\right)^2 \left(\frac{E}{2\,\mu} - 1\right)$, r der Stabradius und n die Ordnungszahl der Schwingung ist. Bei hohen Oberschwingungen treten weitere, durch die Gleichung (6/6) nicht erfaßte Abweichungen auf, deren theoretische Deutung durch Giebe und Blechschmidt (*44*) gegeben wurde. Es treten in diesem Fall Kopplungsschwingungen zwischen den normalen Längsschwingungen und radialen Dehnungsschwingungen auf, die durch Shear und Focke (*131*) ausgezeichnet experimentell bestätigt wurden.

Das oben Gesagte zeigt, daß bei der Absolutbestimmung der Schallgeschwindigkeit im allgemeinen Korrektionen erforderlich sind, um die endliche Dicke zu berücksichtigen und diese nur bei dünnen Stäben ohne Einfluß sind.

6,12 *Stabschwingungen* (*5, 115*)

Die im § 6,11 gebrachten Beziehungen (6/5) und (6/6) gestatten, aus den Stabdimensionen und der Frequenz der Longitudinalschwingungen die Schallgeschwindigkeit zu berechnen. Bei Stäben aus magnetostriktiven Materialien ist die Frequenz des Erregerstromes beim Eintreten der Resonanz mit elektrischen Methoden sehr genau

zu messen. Nichtmagnetische Stoffe in Stabform lassen sich elektrostatisch erregen, indem man auf ein Stabende eine dünne Aluminiumscheibe setzt, der man in geringem Abstand eine zweite, feste Belegung gegenüberstellt und an diesen Luftkondensator eine Wechselspannung legt. Im Resonanzfall, der bei einer evakuierten Versuchsanlage besonders scharf festgestellt werden kann, wird die Leistungsentnahme am Sender ein Minimum, und gleichzeitig wird die Frequenz abgelesen. Der Einfluß der zusätzlichen Belastung durch die meist an beiden Stabenden angebrachten Scheiben wird rechnerisch berücksichtigt.

Für fast alle festen Stoffe ist die Methode mit der KUNDTschen Röhre (Abb. 263) bequem anwendbar. Diese besteht aus einer waagerecht liegenden Glasröhre R, die an einem Ende durch den Reflektorkolben K abgeschlossen ist. Das andere Ende wird durch eine am eingespannten Stab S befestigte leichte Scheibe G aus Kork, Glimmer oder Aluminium zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Im Falle der Resonanz erhält man für die Ordnunszahl n der Luftschwingung die Beziehung

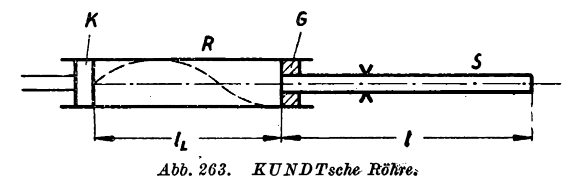


Abb. 263. KUNDTsche Röhre.

$$l_L = (2\,n + 1)\frac{\lambda_L}{4} = (2\,n + 1)\frac{v_L}{4\,\nu}, \tag{6/7}$$

wenn λ_L und v_L die Wellenlänge bzw. die bekannte Schallgeschwindigkeit der Luft in der Röhre sind. Die noch unbekannte Schwingungszahl ν läßt sich bei hohen Frequenzen aus dem Abstand der mit feinem Pulver nachzuweisenden Schwingungsknoten bestimmen. Für exakte Messungen wird der Kolben K durch ein schallhartes Mikrophon ersetzt und der Abstand l_L der Resonanzstellen aus den Maximalausschlägen festgestellt. Eine andere Methode besteht darin, die Größe der halben Wellenlänge $\lambda_L/2$ mit einem empfindlichen, die stehende Schallwelle in R nicht störenden Schallempfänger, z. B. Hitzdrahtempfänger, der verschiebbar in dem geschlitzten Rohr angeordnet ist, zu messen. Ist v_F die gesuchte Schallgeschwindigkeit im Stabmaterial, so gilt

$$v_F = v_L\frac{\lambda_F}{\lambda_L} = v_L\frac{2\,l}{\lambda_L}, \tag{6/8}$$

wobei für die Schallgeschwindigkeit in Luft abhängig von der Temperatur t (° C) $v_L = 331\,(1 + 0{,}00367\,t)^{1/2}$ gesetzt werden kann.

6,13 *Laufzeitmessung* (*67, 88*)

Läßt sich die Laufzeit $\Delta\,t$ eines Schallimpulses, die dieser zum Durchlaufen der Meßlänge l in dem zu untersuchenden Stoff benötigt, messen, so erhält man daraus die Schallgeschwindigkeit zu

$$v = \frac{l}{\Delta t}. \tag{6/9}$$

Die praktische Ausführung gestaltet sich insofern schwierig, als das Schallsignal an den Stabenden reflektiert und mehrfach durch den Empfänger aufgenommen wird. Bei periodischer Erregung überdecken sich dann die gesuchten Empfangsimpulse mit

den Mehrfachreflexionen in unübersichtlicher Weise. Ein eindeutiges Meßergebnis bekommt man nur, wenn die Registriervorrichtung nach dem ersten empfangenen Zeichen automatisch abgeschaltet wird, ehe die erste Reflexion den Empfänger erreicht.

Die von Jakob (*71*) für die Erfüllung dieser Ansprüche angegebene Meßanordnung ist schematisch in Abb. 264 dargestellt. Ein mit konstanter Gleichspannung geladener Kondensator C_1 wird durch eine an das Gitter des Gasentladungsrohres T_1 gelegte Kippspannung von 50 Hz aperiodisch über die Spule S eines kleinen Magneto-

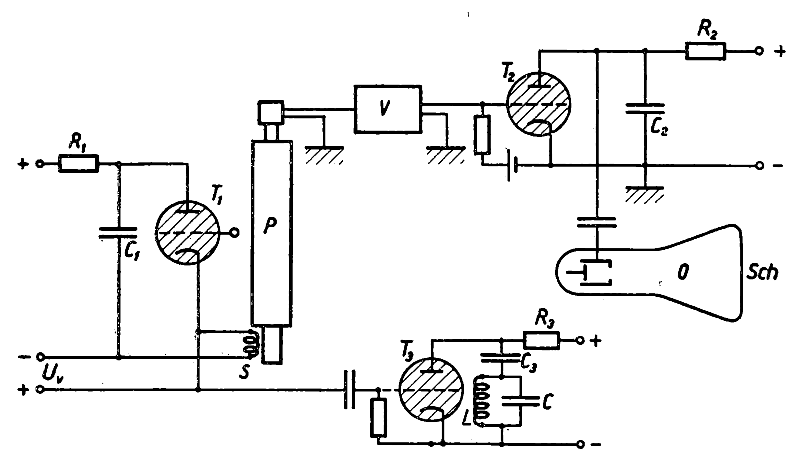


Abb. 264. Messung der Laufzeit nach JACOB.

striktionsschwingers entladen. Dieser ist durch die Spannung U_v derartig vormagnetisiert, daß bei der Entladung über T_1 eine Längsdehnung stattfindet und eine kurze, harte Kompressionswelle durch den zu untersuchenden Stab P gesandt wird. Als schallharter Empfänger dient ein Piezokristall, dessen Eingangsimpuls durch den Verstärker V so sehr verstärkt wird, daß dieser zum Zünden eines zweiten Thyratrons T_2 ausreicht. Dadurch entlädt sich der über einen Widerstand R_2 aufgeladene Kondensator C_2 und bewirkt, daß der Strahlstrom des als Anzeigegerät dienenden Elektronenstrahloszillographen O beim Eintreffen des ersten Empfangsimpulses gesperrt wird. Gleichzeitig mit dem Senderimpuls wird die dritte Gastriode T_3 gezündet, wodurch der über den Widerstand R_3 aufgeladene Kondensator C_3 sich über den Schwingungskreis LC entlädt und diesen in seiner Eigenfrequenz ($\nu_0 = 3000$ Hz) anstößt. Die Kapazität C liegt an den Ablenkplatten von O, während die Induktivität L durch die magnetischen Ablenkspulen der Röhre gebildet wird, woraus bei richtiger Bemessung von L und C eine gleich große, aufeinander senkrecht stehende Strahlablenkung resultiert, deren Komponenten um 90° in der Phase verschoben sind. Wegen der Dämpfung des Schwingungskreises nehmen die Schwingungsamplituden logarithmisch ab und beschreiben somit auf dem Leuchtschirm Sch eine logarithmische Spirale, die eine aufgerollte Zeitachse darstellt und den Vorteil einer großen Ablesegenauigkeit besitzt. Durch Vergleich mit einem Meßsender lassen sich die Schwingkreisfrequenz ν_0 und damit der Zeitmaßstab festlegen. Beträgt der gesamte Laufwinkel

einschließlich mehrmaliger Umläufe $\alpha°$, so ergibt sich für eine Meßlänge l der Probe P die gesuchte Schallgeschwindigkeit zu

$$v_F = \frac{l}{\Delta t} = l\frac{360\, \nu_0}{\alpha},$$

ohne Berücksichtigung der RAYLEIGHschen Korrektur (§ 6,11).

Dieses Meßverfahren eignet sich grundsätzlich auch für Messungen in Flüssigkeiten und Gasen, wenn ein schallabsorbierendes Rohr als Meßgefäß verwendet wird.

Ein anderes Verfahren, das von GERDIEN und SCHAAFFS (*42*) angegeben wurde, ist in Abb. 265 dargestellt. Die Meßprobe P der Länge l wird durch zwei Schneidenpaare gehaltert und besitzt plangeschliffene Enden. Durch isolierende Überwurfmuttern werden zwei planparallele Piezoquarze Q_1 und Q_2 zwischen die Endflächen von P und zwei Stäben E_1 und E_2 gleichen Durchmessers gepreßt. Wird nun ein freies Ende der Anordnung angeschlagen, so läuft eine Schallwelle durch die Meßstrecke und erzeugt in den Quarzen Q_1 und Q_2 scharfe elektrische Spannungsimpulse, die zeitlich um die Laufzeit Δt verschoben sind. Mit Hilfe bekannter Verfahren für die elektrische Kurzzeitmessung (siehe 1. Teil, § 3,6) kann Δt gemessen und aus der Meßlänge l die Schallgeschwindigkeit errechnet werden. Wird das Schallsignal periodisch ausgesandt, so läßt sich mit einem der obigen Methode ähnlichen Verfahren auch ein stehendes Bild auf dem Oszillographenschirm erzielen. Bei der Untersuchung fester Körper kann dieser als Stab oder auch bei großen Meßlängen als Wendel verwendet werden, wodurch sich eine vergrößerte Meßgenauigkeit erzielen läßt. Auch als Kurzzeitnormal kann eine solche Anordnung dienen.

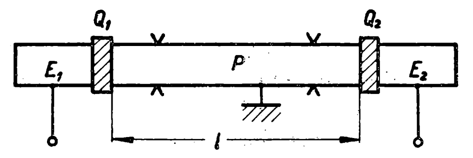


Abb. 265. Laufzeitmessung nach GERDIEN und SCHAAFFS.

Ein weiteres von HUNTINGTON (*68*) angegebenes Verfahren, mit dem vor allem Ausbreitungsgeschwindigkeit und Dämpfung in Einkristallen bestimmt wurden, verwendet den Sendequarz auch als Empfänger der an der Probe reflektierten Impulse. Der Quarz wird dabei auf ein Ende der mit sehr genau parallel geschliffenen Flächen versehenen Meßprobe gepreßt, wobei zur Vermeidung einer zusätzlichen Dämpfung zwischen Probe und Quarz eine dünne, blasenfreie Schicht aus Paraffin oder noch besser Phenylsalizilat aufgetragen wurde. In Abb. 266 ist die grundsätzliche Meßanordnung dargestellt. Der Quarz Q, der auf die angegebene Weise auf die Probe M aufgesetzt wird, wird von dem impulsgesteuerten 10-MHz-Generator G mit Rechteckimpulsen von veränderlicher Impulsdauer (0,75–2,5 μs) betrieben. Der 5-stufige 10-MHz-Verstärker V, der noch Rechteckimpulse von 10^{-7} s Dauer unverzerrt verstärkt, nimmt das direkte Signal und die Echos auf. Auf dem Schirm des Oszillographen O, dessen lineare Zeitablenkung durch quarzstabilisierte Eichmarken kontrolliert wird, erscheinen Senderimpuls und Echo in zeitlicher Auflösung und können

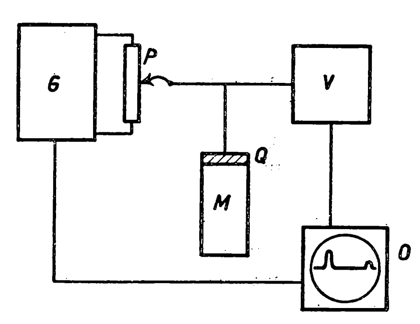


Abb. 266. Impulsmessung nach HUNTINGTON.

auf 10^{-7} s genau abgelesen werden. Das Verhältnis der Amplitude des Senderimpulses zu der des reflektierten Signals ist ein Maß für die Schallabsorption in der Meßprobe und kann mit dem im Sendereingang liegenden, in Dezibel geeichten Potentiometer P genau bestimmt werden. Mit dieser Methode wurden für eine Reihe von Alkali-Halogenid-Einkristallen die akustischen Konstanten für verschiedene Orientierung bestimmt.

6,14 *Akustisches Interferometer* (*152*)

Wie bereits erwähnt, ist es im Ultraschallbereich möglich, den als Schallsender dienenden Quarz selbst als Schallempfänger zu verwenden, wenn man die Schallwelle auf diesen zurückfallen läßt. Ist parallel zum Schwingquarz eine Reflektorplatte angeordnet, so hängt die Schwingungsphase der Teilchen des Schallmediums an der schallabstrahlenden Fläche vom Abstand Sender–Reflektor ab. Beträgt die Phasenverschiebung zwischen ausgesandtem und reflektiertem Strahl am Quarz 180°, so wird eine maximale Rückwirkung auf den Sender zu erwarten sein, d. h. die Spannung am Quarz, der Hochfrequenzstrom oder der Anodengleichstrom durchläuft ein Minimum. Dieses Verfahren wurde zuerst von Pierce (*120*) für die Messung der Schallgeschwindigkeit in Gasen angewendet; eine dabei erhaltene Meßreihe, bei der der Anodenstrom I des Quarzgenerators abhängig vom Abstand d zwischen Reflektor und Quarz gemessen wurde, zeigt die Abb. 267.

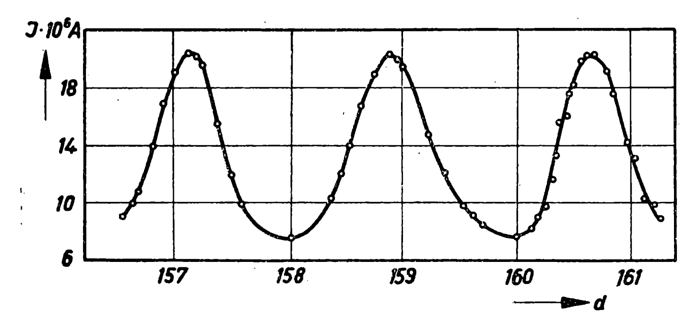


Abb. 267. Schallinterferenzen am Senderquarz.

Die hierfür entwickelte Meßanordnung bezeichnet man in Analogie zur prinzipiell gleichen Methode der Wellenlängenbestimmung optischer Schwingungen als akustisches Interferometer. Die gebräuchliche Ausführung eines Ultraschallinterferometers ist in Abb. 268 dargestellt. In einem zylindrischen Messingtopf T befindet sich der Piezoquarz Q, der durch die Feder F leicht gegen die den eigentlichen Meßraum abschließende Bronzemembran M gedrückt wird. Dadurch wird gleichzeitig vermieden, daß der Meßquarz mit der zu untersuchenden Flüssigkeit in Berührung kommt. Die Reflektorplatte R kann mit Hilfe der Mikrometerschraube S stetig und meßbar verschoben werden, wobei folgende konstruktive Gesichtspunkte von Bedeutung sind: 1. die Reflektorplatte soll ohne toten Gang verschoben werden können; 2. der Sendequarz und der Reflektor müssen in jeder gegenseitigen Entfernung zueinander parallel liegen, um scharfe Interferenzmaxima zu erhalten; 3. die Mikrometerschraube S muß eine konstante Ganghöhe besitzen. Die Forderungen 1 und 2 werden bei der dargestellten Anordnung dadurch erfüllt, daß der Reflektor durch einen eingeschliffenen Kolben mit Geradführung bewegt und durch eine Schraubenfeder L gegen die Mikrometerschraube gepreßt wird. Die Hochfrequenzspannung wird dem Quarz durch das Isolierrohr J zugeführt. Die gesamte Anordnung wird zur Konstanthaltung der Temperatur in ein Flüssigkeitsbad gesetzt. Ähnliche Ausführungsformen sind von

HUBBARD (*65*), KLEIN und HERSHBERGER (*77*) und anderen (*16*, *69*), speziell für die Messung von Schallgeschwindigkeiten bei sehr tiefen Temperaturen von LIEPMANN (*91*), und bei hohen Temperaturen von TELFAIR u. PIELEMEIER (*138*) beschrieben worden.

Für die genaue Messung der Schallgeschwindigkeit in Gasen bedarf es einiger Abänderungen, da die Anlage evakuierbar sein muß (*17*). Häufig wird die Frage der Reflektorverschiebung durch eine Konstruktion nach Abb. 269 gelöst, wobei die Reflektor-

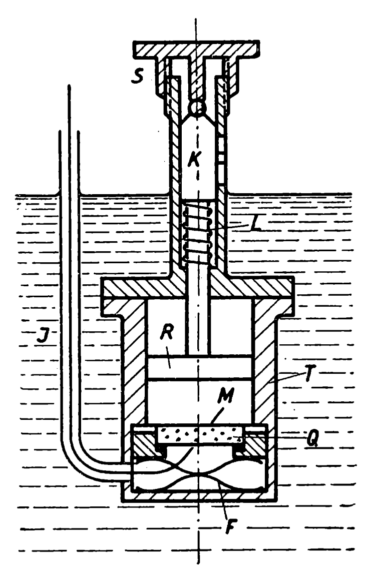




Abb. 268. Akustisches Interferometer.

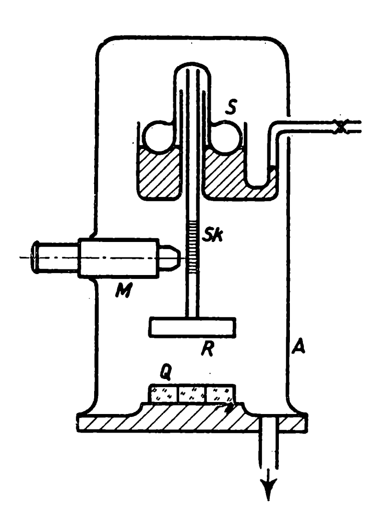


Abb. 269. Interferometer für Gasmessungen.

platte R an einem Glasschwimmer S hängt, der auf einem mit Quecksilber gefüllten Ringgefäß schwimmt. Durch Heben und Senken eines daran angeschlossenen Vorratsgefäßes läßt sich der Abstand Reflektor–Quarz Q bequem verändern und genau mittels Skala Sk und Ablesemikroskop M bestimmen. Diese Anordnung ist luftdicht in einem Rezipienten A untergebracht (*78*). Ein Gasinterferometer für tiefe Temperaturen, das in einem DEWAR-Gefäß untergebracht ist, wurde von EUCKEN und BECKER angegeben (*29*).

6,15 *Methode nach DEBYE-SEARS*

1932 haben DEBYE und SEARS (*26*) und unabhängig davon LUCAS und BIQUARD (*93*) nachgewiesen, daß an Schallwellen, die durchsichtige Flüssigkeiten durchlaufen, eine der Beugung des Lichtes an einem gewöhnlichen Strichgitter ähnliche Beugungserscheinung auftritt. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender elastischer Verdichtungsebenen in der Flüssigkeit, also die Schallwellenlänge Λ, entspricht der Gitterkonstanten. Durchstrahlt man daher mit einer in der Abb. 270 dargestellten Anordnung den Flüssigkeitstrog T, in dem der Sendequarz Q eine intensive Schallwelle sehr hoher Frequenz erzeugt, mit parallelem Licht, so erscheinen auf dem Schirm S nicht

nur ein helles Bild des Spaltes Sp, sondern bei monochromatischem Licht sehr scharfe Beugungsbilder. Bezeichnet man mit Λ die Schallwellenlänge in der Flüssigkeit, mit λ die Lichtwellenlänge und ist φ_k der Beugungswinkel für das Beugungsbild k-ter Ordnung, so ergibt sich

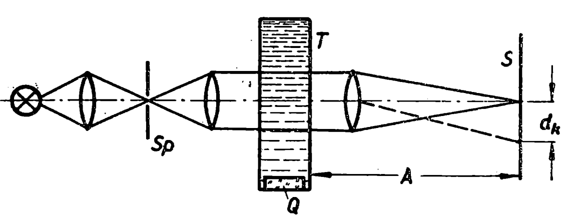


Abb. 270. DEBYE-SEARS-Methode der Schallbeugung.

$$\sin \varphi_k = k \frac{\lambda}{\Lambda}, \qquad (6/10)$$

oder für kleine Beugungswinkel

$$d_k = k A \frac{\lambda}{\Lambda}, \qquad (6/11)$$

worin d_k der Abstand des k-ten Beugungsbildes vom Mittelstreifen und A die Entfernung Schirm–Trog bedeuten. Da meist die Beugungsbilder bis zu sehr hoher Ordnungszahl ausgemessen werden können, läßt sich die Schallwellenlänge sehr genau ermitteln. Ist ferner die Schallfrequenz ν des Quarzes bekannt, so ergibt sich aus

$$v = k A \lambda \frac{\nu}{d_k} \qquad (6/12)$$

die gesuchte Schallgeschwindigkeit v. Es wird jedoch darauf hingewiesen, daß die große beobachtete Intensität der Beugungsstreifen hoher Ordnung, die eine sehr genaue Bestimmung von d_k erlaubt, nicht aus der BRAGGschen Interferenzbedingung zu folgern ist. Diese führt zwar zu den richtigen Beugungswinkeln, würde aber einen viel steileren Abfall der gebeugten Intensität mit zunehmender Ordnungszahl ergeben. Eine umfassende Theorie des DEBYE-SEARS-Verfahrens wurde von NAGANDRA NATH (*112*) und ESTERMANN und WANNIER (*28*) gegeben, bei der die Lichtausbreitung in einem Medium mit räumlich und zeitlich veränderlichem Brechungsindex berechnet wurde.

ZWETKOW und MARININ (*154*) beobachten unmittelbar die über dem Schwingquarz in einer durchsichtigen Flüssigkeit hervorgerufene Änderung des Brechungskoeffizienten bei stroboskopischer Beleuchtung und können daraus die Schallgeschwindigkeit berechnen.

Ein Hauptvorteil dieser Verfahren besteht darin, daß bei genügend hoher Schallfrequenz nur geringe Mengen der zu untersuchenden Substanz für die Messung der Schallgeschwindigkeit erforderlich sind.

6,2 Messung der Schallabsorption (*80, 117*)

6,21 *Definition*

Durchläuft eine ebene Schallwelle der Intensität I_0 ein Medium von der Dicke x, so nimmt die Intensität nach dieser Strecke auf den Wert

$$I_x = I_0 \, e^{2\alpha x} \qquad (6/13)$$

ab, wenn α der Absorptionskoeffizient der Schallamplitude ist. Die Intensität nimmt also nach einem Exponentialgesetz ab. Die Größe des Absorptionskoeffizienten hängt im einzelnen vom Auftreten irreversibler Umwandlungen von akustischer Energie in Wärmeenergie ab und kann für Flüssigkeiten und Gase theoretisch quantitativ an-

gegeben werden. Die Absorption im Festkörper hängt eng mit der inneren Dämpfung (§ 11,8, I. Teil) zusammen. Für die technisch außerordentlich wichtigen porösen Schallschluckstoffe, deren Wirksamkeit von der Größe und dem Volumenanteil der Gashohlräume abhängt, läßt sich nur ein empirischer Zusammenhang zwischen Absorption und Raumgewicht angeben.

6,22 *Schallabsorption in Flüssigkeiten* (*66, 70, 116*)

Von den oben für die Absorption genannten irreversiblen Prozessen spielt bei den Flüssigkeiten die innere Reibung eine große Rolle. Nach STOKES beträgt der Reibungsanteil der Schallabsorption

$$\alpha_r = \frac{8}{3}\frac{\pi^2 \nu^2 \eta}{v^3 \varrho}, \tag{6/14}$$

wenn η der Reibungskoeffizient, ν die Schallfrequenz und ϱ die Dichte bedeuten. Da sowohl η als auch ϱ und die Schallgeschwindigkeit v temperaturabhängig sind, wird die relative Änderung von α_r mit der Temperatur

$$\frac{d\,\alpha_r}{\alpha_r} = \frac{d\,\eta}{\eta} - \frac{d\varrho}{\varrho} - 3\frac{d\,v}{v}, \tag{6/15}$$

was für die meisten Flüssigkeiten wegen des großen Temperaturkoeffizienten von η recht bedeutend ist.

Als weiterer für die Schallabsorption maßgebender Energieaustausch ist die Wärmeleitung zu betrachten. Diese bewirkt den Ausgleich der Temperatur der Schalldruckbäuche mit den umgebenden Flüssigkeitsteilchen und berechnet sich nach KIRCHHOFF zu

$$\alpha_l = \frac{2\pi^2 \nu^2}{v^3 \varrho}\frac{\varkappa - 1}{c_p} K. \tag{6/16}$$

K bedeutet darin die Wärmeleitzahl und $\varkappa = c_p/c_v$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen. Damit erhält man für den gesamten Absorptionskoeffizienten

$$\alpha = \alpha_r + \alpha_l = \frac{2\pi^2 \nu^2}{v^3 \varrho}\left(\frac{4}{3}\eta + \frac{\varkappa - 1}{c_p} K\right). \tag{6/17}$$

Aus Gleichung (6/17) geht hervor, daß beide Anteile eine quadratische Funktion der Frequenz sind. In Tabelle XXIII sind für verschiedene Flüssigkeiten die von BIQUARD (*14*) berechneten Werte von α/ν^2 angegeben.

Flüssigkeit	$\alpha_r/\nu^2 \cdot 10^{17}$	$\alpha_l/\nu^2 \cdot 10^{17}$	$\alpha/\nu^2 \cdot 10^{17}$	α/ν^2 gemessen
Azeton	6,54	0,5	7,04	31,6
Äther	8,48	0,49	8,97	53,3
Benzol	8,36	0,3	8,66	91,7
Chloroform	10,045	0,057	10,1	474
Äthylazetat	7,95	0,31	8,26	77,4
Methylazetat	6,34	0,44	6,78	109
Meta-Xylol	8,13	0,24	8,37	74,3
Toluol	7,56	0,28	7,84	85,3
Wasser	8,5	0,0064	8,5	25,3

Tabelle XXIII

Man sieht daraus, daß der Wärmeleitungsanteil weniger als 10% der Gesamtabsorption ausmacht. Für Wasser ergibt sich z. B. für 100 kHz der Wert $\alpha = 8{,}5 \cdot 10^{-7}$, d. h. die Strecke $\frac{1}{2\alpha}$, nach deren Durchlaufen die Schallintensität auf den e-ten Teil abgenommen hat, beträgt theoretisch 5,8 km. Die in der letzten Spalte der Tabelle zum Vergleich aufgeführten experimentell erhaltenen Werte sind durchweg um ein beträchtliches größer als die berechneten. Diese im allgemeinen noch ungeklärten Abweichungen scheinen darauf hinzuweisen, daß für die Umsetzung der Schallenergie außer den erwähnten Vorgängen noch andere Erscheinungen eine bedeutende Rolle spielen, wie etwa die Anregung bestimmter Molekülfrequenzen.

Nach dem von BIQUARD (*14*) angegebenen Verfahren zur Messung der Schallabsorption in Flüssigkeiten bedient man sich des Schallstrahlungsdruckes. Nach Gleichung (5/5) ist der Schallstrahlungsdruck S der Schallintensität I proportional, so daß an Stelle von Gleichung (6/13) die Beziehung

$$S_x = S_0\, e^{-2\alpha x} \tag{6/17}$$

tritt. Logarithmiert man (6/17), so bekommt man $ln\, S_x = const - 2\,\alpha\, x$, woraus man den gesuchten Absorptionskoeffizienten entnehmen kann. Zu diesem Zweck mißt man S in einer fortlaufenden Schallwelle in der zu untersuchenden Flüssigkeit bei verschiedenen Entfernungen x vom Schallsender. Den Schallstrahlungsdruck mißt man mit dem in Abb. 260 dargestellten Schallradiometer, dessen Flügel etwas schräg gegen die Schallwelle geneigt wird, um Interferenzen mit der ankommenden Welle zu vermeiden. Eine Störungsquelle stellt der vom Senderquarz ausgehende Schallgleichstrom dar. Diesen kann man jedoch eliminieren, wenn dicht vor und hinter dem Radiometer eine dünne Folie aus Kollodium oder Aluminium gespannt wird, die nur die Wechselamplitude hindurchläßt.

Auch bei Verwendung kleiner Radiometerflügel wirken diese auf die Schallausbreitung störend. BIQUARD (*15*) hat nun versucht, die Absorption auf optischem Wege zu bestimmen. Bei der DEBYE-SEARS-Methode zeigte es sich nämlich, daß mit zunehmender Schallintensität die gebeugte Intensität nach den Streifen höherer Ordnung abwandert, d. h. die Intensität des Nullstreifens abnimmt. Trifft man nun die Anordnung nach Abb. 270 so, daß an Stelle des Schirmes S eine Blende angebracht wird, die nur den Nullstreifen hindurchläßt, und stellt dahinter eine Photozelle auf, so gilt die Beziehung:

$$1 - \frac{i}{i_0} = k\, I_0\, e^{-2\alpha x}, \tag{6/18}$$

wenn i_0 und i die eingestrahlte bzw. abgebeugte Lichtintensität, k eine Apparatekonstante und I_0 die Schallintensität am Schallsender bedeuten. Aus den bei verschiedenen Abständen x ermittelten Ausschlägen δ bzw. δ_0 des an der Photozelle angeschlossenen Meßinstrumentes läßt sich aus

$$ln\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right) = const - 2\,\alpha\, x \tag{6/18a}$$

die gesuchte Größe α bestimmen. Messungen nach diesem Verfahren sind an verschiedenen Flüssigkeiten von WYSS (*151*), BAZULIN (*9*) und BAUMGART (*8*) u. a. (*59*) durchgeführt worden.

6,23 *Schallabsorption in Gasen* (*18, 25, 124, 137, 153*)

Nach der klassischen Theorie ist die Schallabsorption in Gasen ähnlich wie bei Flüssigkeiten auf die Energiedissipation durch Reibung und Wärmeleitung zurückzuführen; es gelten also die entsprechenden Beziehungen aus Gleichung (6/14) und (6/16). Für Luft erhält man daraus für α/ν^2 den Wert $1{,}45 \cdot 10^{-13}$ ($\text{cm}^{-1}\ \text{s}^{-2}$), der also um den Faktor 1700 größer als von Wasser ist. Im Vergleich zu den Flüssigkeiten, bei denen der Wärmeleitungsanteil nur eine geringe Rolle spielt, sind bei den Gasen der Einfluß von Wärmeleitung und innerer Reibung von derselben Größenordnung. In der Tabelle XXIV sind für einige Gase die berechneten und gemessenen Werte des Schallabsorptionskoeffizienten angegeben.

Gas	Frequenz (kHz)	$\alpha/\nu^2 \cdot 10^{13}$ (gemessen)	$\alpha/\nu^2 \cdot 10^{13}$ (berechnet)
Luft	132—415	2,94—3,99	1,45
	1158—1408	1,67—1,99	1,45
Sauerstoff	655—1219	3,47—1,90	1,78
Kohlensäure	64	277	1,60
	99	540	1,60
	178	240	1,60
	612	46,5	1,60
Argon	612	0	2,0

Tabelle XXIV

Es ist daraus ersichtlich, daß für Luft und Sauerstoff die theoretischen mit den experimentell gefundenen Werten etwa übereinstimmen und auch die Größe α/ν^2 ungefähr von der Frequenz unabhängig ist, daß das für CO_2 aber nicht zutrifft. Wie bereits auf S. 307 erwähnt, haben wir beim CO_2 das typische Verhalten anomaler Schalldispersion vor uns, die von einem Maximum der Schallabsorption begleitet wird. Diese bei mehratomigen Gasen auftretende Erscheinung beruht darauf, daß bei plötzlicher adiabatischer Kompression im Druckbauch sich zwar Translations- und Rotationsenergie sofort anpassen, daß die oszillatorische Energie jedoch eine bestimmte Einstelldauer benötigt, wodurch Druck und Dichte phasenverschoben werden. Beim Durchlaufen eines Kompressionszykels wird daher eine Arbeit geleistet, die irreversibel in Wärme umgesetzt und der Schallenergie entzogen wird. Nach KNESER (*78*) ergibt sich die Beziehung

$$\frac{\alpha}{\nu^2} = \pi \frac{R\, c_{vs}}{c_{vt}\,(R + c_{vs})} \cdot \frac{1/\tau\, \omega}{\dfrac{1}{\tau^2} + \omega^2}, \qquad (6/19)$$

worin R die Gaskonstante, c_{vs} und c_{vt} die spezifischen Wärmen der oszillatorischen bzw. translatorischen Freiheitsgrade und τ die Lebensdauer des Schallquants, also die Einstelldauer der Schwingungswärme bedeuten.

Auch eine bei Nachhallmessungen unliebsame Fehlerquelle, nämlich der offensichtliche Einfluß der Luftfeuchtigkeit auf die Nachhallzeit bei hohen Frequenzen, konnte durch KNESER (*79*) auf die Anregung von Molekülschwingungen der Luft-

moleküle zurückgeführt werden. Dem Wasserdampf kommt hierbei nur eine katalytische Bedeutung insofern zu, als durch ihn offenbar die Relaxationszeit τ herabgesetzt wird. In Abb. 271 ist die Abhängigkeit der Dämpfung vom relativen Feuchtigkeitsgehalt bei verschiedenen Frequenzen dargestellt. Zwischen 10 und 20% relativer Feuchtigkeit tritt ein Absorptionsmaximum auf, das sich mit zunehmender Frequenz nach höheren Feuchtewerten verschiebt.

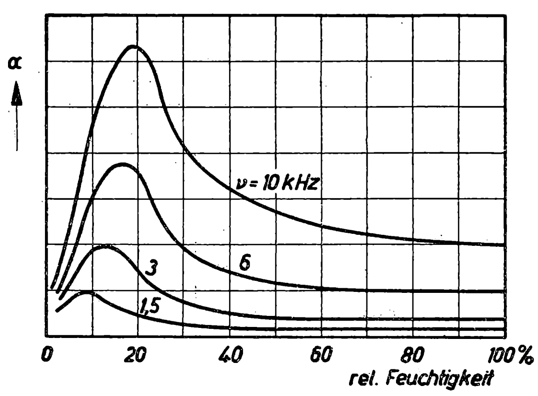


Abb. 271. Absorption von feuchter Luft.

Die Messung der Schallabsorption in Gasen kann man nach ABELLO (*1*) in der Weise durchführen, daß man zwischen einen Quarzsender und einen darauf abgestimmten piezoelektrischen Empfänger ein Absorptionsrohr mit dem zu untersuchenden Gas bringt und die Abnahme der Schallintensität bei verschiedenen durchstrahlten Dicken mißt. PIELEMEIER (*119*) benutzte das Ultraschallinterferometer (§ 6,14) und bestimmte aus der Größe der Rückwirkung auf den Schallquarz den Absorptionskoeffizienten. Diese entspricht nämlich einer Änderung der mechanischen Impedanz und läßt sich durch elektrische Mittel - Veränderung einer parallel zum Quarz geschalteten Kapazität - kompensieren.

Für Tonfrequenzen wird die Gasabsorption nach KNUDSEN (*81*) aus der Nachhallzeit des Schalles in einer abgeschlossenen Kammer bestimmt. Aus den Abklingkurven kann man mit der Beziehung (5/6) die Größe α sehr genau messen.

6,24 *Schallabsorption in Festkörpern*

Der Absorptionskoeffizient a eines festen Körpers steht bekanntlich mit dem Reflexionskoeffizienten r in der Beziehung

$$a + r = 1. \tag{6/20}$$

a bezeichnet man in diesem Falle als Schallschluckzahl, die durch die Gleichung (1/22) definiert ist. Mit $z_1 + i\, z_2 = \mathfrak{z}$ erhält man dann

$$a = 1 - \left| \frac{\mathfrak{z} - \varrho\, c}{\mathfrak{z} + \varrho\, c} \right|^2, \tag{6/21}$$

worin $c\,\varrho$ den Wellenwiderstand von Luft und $\mathfrak{z}$ den spezifischen akustischen Scheinwiderstand des Materials bedeuten. Man erhält eine übersichtliche Darstellung des Schluckgrades (Abb. 272), wenn man in der komplexen $\mathfrak{z}$-Ebene, in der $z_1/c\,\varrho$ und $i\,z_2/c\,\varrho$ die Koordinaten sind, die Gleichung (6/21) abbildet. Jeder Punkt der Ebene bedeutet einen bestimmten akustischen Widerstand nach Größe und Phasenlage. Die Kurven konstanten Schluckgrades werden nach (6/21) Kreise, deren Mittelpunkte auf der reellen Achse liegen, die Kurven konstanter Phasensprünge werden Kreise um Punkte auf der imaginären Achse. Ist aus Messungen der Vektor $\mathfrak{z}$ bekannt, läßt sich aus der Darstellung der Abb. 272 der Schallabsorptionskoeffizient a entnehmen.

Bei Hörfrequenzen ist die Bestimmung der Schallschluckzahl aus Nachhallmessungen üblich. Zu diesem Zweck wird in dem sog. Nachhallraum, der ein geschlossener Raum mit sehr gut reflektierenden Wänden darstellt, vor und nach dem Einbringen des absorbierenden Stoffes die Nachhallzeit t, d. h. die Zeit, in der die Schallenergie auf den 10^6-ten Teil des Anfangswertes abgeklungen ist, gemessen. Ist V das Gesamtvolumen des Nachhallraumes und F die Größe der absorbierenden Fläche, so wird nach (5/6) der Schallschluckgrad

$$a = \frac{0{,}161\, V}{F}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_0}\right), \quad (6/22)$$

wenn $t_0 = 0{,}161\ V/A$ die Nachhallzeit des leeren Raumes ist.

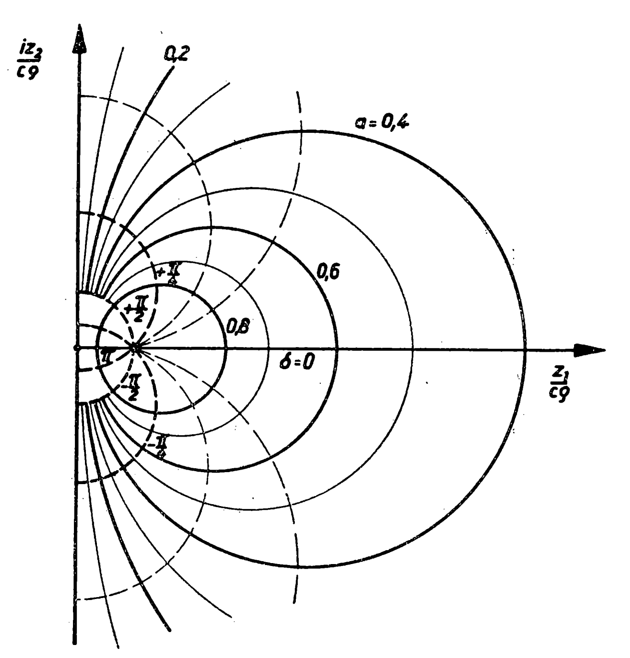


Abb. 272. Schluckgradkreisdiagramm in der z-Ebene.

Die Beziehung (6/22) ist nach Messungen von SABINE sehr gut bestätigt worden. Als Schallsender dient meist ein kurzzeitig eingeschalteter Lautsprecher, der zur Vermeidung störender Interferenzen am Empfangsort mit einem gewobbelten Tonfrequenzgenerator betrieben wird, oder eine Knallpistole, aus deren Klangspektrum durch ein akustisches Filter ein schmaler Frequenzbereich ausgesondert wird. Trägt man die mit einem Mikrophon aufgenommene Schallintensität in logarithmischem Maßstab über der Zeit auf, so ist der Neigungswinkel der sich ergebenden Geraden der Nachhallzeit proportional. Eine ideale Vergleichseinheit für die Schallabsorption stellt nach SABINE eine Aussparung im Hallraum, ein „Fenster" dar, dessen Absorptionskoeffizient mit 0,9 bzw. 1 angenommen werden kann, je nachdem die Wellenlänge größer oder kleiner als die Fensterabmessungen ist.

Für physikalische Messungen, für die oft nur kleine Materialmengen zur Verfügung stehen, eignet sich besonders das KUNDTsche Rohr in der in Abb. 273 gezeigten Form. An einem Ende des zylindrischen Rohres R befindet sich der Schallsender S (Quarz, Lautsprecher), der ebene Wellen aussendet. Das andere Rohrende ist mit einem Metallkolben K verschlossen, vor dem die zu untersuchende Materialprobe P befestigt ist. In diesem allgemeinen Fall der

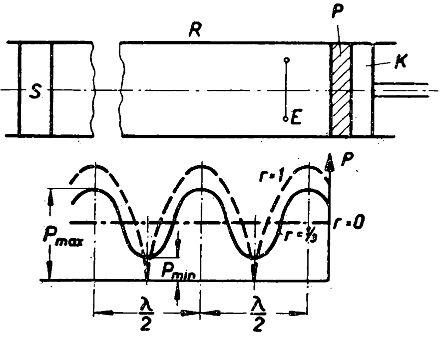


Abb. 273. Messung des Schallschluckgrades im KUNDTschen Rohr.

Schallausbreitung bilden sich stehende Wellen aus (§ 1,33), deren zeitlich gemittelter Schalldruck $\bar{p}$ längs der Rohrachse eine periodische Funktion des Abstandes x von der reflektierenden Schicht ist. Bedeutet r wieder den Reflexionskoeffizienten für die Schallintensität, so gilt

$$p = A\,(e^{-ikx} + \sqrt{r}\,e^{i(kx+\delta)})\,, \tag{6/23}$$

wenn A die ankommende Druckamplitude und δ der Phasensprung an der Reflexionsstelle sind. Verschiebt man daher den Druckempfänger E in der X-Richtung, so findet man an den Stellen $-(k\,x + \delta/2) = n\,\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Schalldruckmaxima von der Größe

$$\bar{p}_{\max} = A\,(1 + \sqrt{r}) \tag{6/24}$$

und an den dazwischenliegenden Stellen $-(k\,x + \delta/2) = \frac{\pi}{2}(2\,n + 1)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Schalldruckminima von der Größe

$$p_{\min} = A\,(1 - \sqrt{r})\,. \tag{6/25}$$

Indem man mit dem verschiebbaren Empfänger nacheinander die Maxima und Minima abtastet und den Quotienten

$$\frac{\bar{p}_{\min}}{\bar{p}_{\max}} = \mu = \frac{1 - \sqrt{r}}{1 + \sqrt{r}} \tag{6/26}$$

bildet, bekommt man daraus wegen (6/20) den Schallschluckgrad zu

$$a = 1 - r = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)}\,. \tag{6/27}$$

Ebenso kann man aus den Extremwerten der Schallschnelle v, die um $\lambda/4$ gegenüber dem Schalldruck verschoben sind, a bestimmen.

6,3 Messung akustischer Widerstände (*96, 130*)

6,31 *Definition und Berechnung einfacher akustischer Widerstände* (*52*)

Unter einem akustischen Widerstand der Größe $\mathfrak{Z}$ versteht man, wie bereits im § 1,1 definiert, das Verhältnis von Schalldruck zu Schallschnelle, also

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{v}} = \mathfrak{Z}\,,$$

eines die Ausbreitung einer Schallwelle behindernden Widerstandes. Die daraus abzuleitende CGS-Einheit g cm^{-4} s^{-1} wird auch *akustisches Ohm* genannt.

Auf Grund der Kontinuitätsbeziehung und der BERNOULLIschen Gleichung (§ 8,42, I. Teil) lassen sich in besonders einfachen Fällen die akustischen Widerstände theoretisch ableiten. So erhält man für die plötzliche Verengung einer Rohrleitung der Querschnittsfläche F_1 auf F_2 den reellen Widerstand

$$\mathfrak{z} = \frac{F_1}{F_2}\,c\,\varrho_0\,, \tag{6/28}$$

wenn $c\,\varrho_0$ der Schallwellenwiderstand im Rohrbereich der Fläche F_2 ist. Damit wird nach (6/27) der Schallschluckgrad einer solchen Anordnung

$$a = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2}{F_1}\right)}. \qquad (6/29)$$

Ist in einem zylindrischen Rohr von der Fläche F_1 ein kurzes Rohrstück von der Weite F_2 und der Länge L eingesetzt (Abb. 274), wobei $L < \lambda$ sein soll, so erhält man hierfür

$$\mathfrak{Z} = i\,\omega\,\frac{\varrho L}{F_2}. \qquad (6/30)$$

Abb. 274.
Akustische Induktivität.

Das kurze Rohrstück wirkt also wie eine akustische Induktivität oder eine vor F_2 geschaltete träge Masse.

Umgekehrt verhält sich ein abgeschlossenes kurzes Rohrstück (Abb. 275) vom Volumen V wie eine elastische Feder oder eine elektrische Kapazität mit dem akustischen Widerstand

$$\mathfrak{Z} = \frac{c^2\,\varrho_0}{i\,\omega\,V}. \qquad (6/31)$$

Beim Hintereinanderschalten der beiden in Abb. 274 und 275 dargestellten Widerstände erhält man einen Resonanzkreis („Resonator") mit der Eigenfrequenz

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c^2 F_2}{L V}}. \qquad (6/32)$$

Abb. 275.
Akustische Kapazität.

(Mit Gebilden dieser Art hat Helmholtz seine berühmten Versuche der Klanganalyse durchgeführt.)

6,32 *Stehende Rohrwellen*

Ist $\mathfrak{Z}_{ak}$ der gesuchte akustische Widerstand und $c\,\varrho$ der Wellenwiderstand des schalleitenden Mediums, so wird eine Schallwelle an diesem bekanntlich mit dem Reflexionsfaktor

$$R\,e^{i\delta} = \left|\frac{\mathfrak{Z}_{ak} - c\,\varrho}{\mathfrak{Z}_{ak} + c\,\varrho}\right| \qquad (6/33)$$

zurückgeworfen. Daraus ergibt sich, daß mit Hilfe der im § 6,24 beschriebenen Rohrmethode aus dem Reflexionsfaktor $R = \sqrt{r}$ und dem Phasenwinkel δ an der Reflexionsstelle aus

$$\mathfrak{Z}_{ak} = c\,\varrho\,\frac{1 + R\,e^{i\delta}}{1 - R\,e^{i\delta}} \qquad (6/34)$$

der gesuchte Widerstand bestimmt werden kann. Mit $\mathfrak{Z}_{ak} = z_1 + i\,z_2$ ergibt sich daraus

$$z_1 + i\,z_2 = c\,\varrho\,\frac{1 - R^2 + i\,2\,R\sin\delta}{1 + R^2 - 2\,R\cos\delta}. \qquad (6/34\,a)$$

6,33 *Messung durch Rückwirkung auf den Schallsender*

Dieses Verfahren beruht darauf, daß der elektrische Scheinwiderstand eines elektroakustischen Wandlers, z.B. eines Telephons, in einem Rohr von der Rückwirkung des zu messenden akustischen Widerstandes abhängt und ein Maß für diesen darstellt. Der gesamte Scheinwiderstand berechnet sich zu

$$Z_{\text{ges}} = Z_{\text{el}} + \frac{M^2}{Z_m}, \qquad (6/35)$$

worin Z_{el} der eigentliche elektrische Scheinwiderstand, M die komplexe elektrodynamische Kopplungskonstante und Z_m der mechanische Scheinwiderstand der Membrane infolge der Rückwirkung des akustischen Widerstandes sind. Zur Messung von Z_{ges} bzw. Z_{el} bedient man sich einer Induktivitätsmeßbrücke (Abb. 276), die aus dem Festwiderstand R_1, den veränderlichen Widerständen R_2 und R_3 und der Normalinduktivität L besteht. Als vierter Brückenzweig ist der Schallsender T (Telephon) hinzugeschaltet, dessen Scheinwiderstand im Rohr O abhängig von der Meßprobe P gemessen werden soll. Die von einem Tonfrequenzgenerator gespeiste Brücke wird mit Hilfe des in den Diagonalzweig geschalteten Nullinstrumentes J abgeglichen und Z_{ges} abhängig von der Frequenz bestimmt. Z_{el} wird dadurch gemessen, daß man den Schallsender festbremst, d. h. die Membrane des Telephons festhält und damit Z_m in Gleichung (6/35) unendlich macht. Durch vektorielle Subtraktion der Größen Z_{ges} und Z_{el} erhält man M^2/Z_m. Im Resonanzfall wird

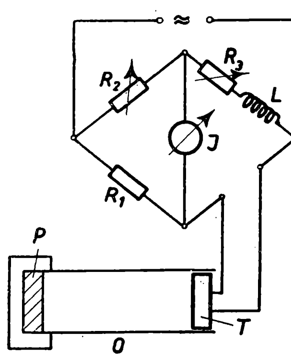


Abb. 276. Messung des Scheinwiderstandes eines Schallsenders.

$$|Z_m|_{\text{res}} = R_m + z\,F, \qquad (6/36)$$

wenn R_m der Wirkwiderstand der Membran und $z\,F$ der akustische Widerstand der Fläche F ist. Die Größe M läßt sich aus Vergleichsmessungen ermitteln. Genauere Einzelheiten dieser von KENNELLY und KUROKAWA vorgeschlagenen Methode sind der Arbeit von KOSTEN und ZWIKKER (*85*) zu entnehmen.

Ein etwas abweichendes Verfahren wird von BERANEK (*10*) beschrieben, bei dem in einem Kristallmikrophon unmittelbar an der Membran des Schallgebers der Schalldruck abhängig von der Entfernung des Abschlußkolbens in einem Stahlrohr gemessen wird. Die Meßprobe befindet sich vor dem Reflektorkolben und wird von der Rohrwelle senkrecht getroffen. Ändert man die Rohrlänge durch Verschieben des Kolbens stetig bei festgehaltener Frequenz, so erhält man für den Schalldruck Resonanzkurven. Aus solchen Meßkurven mit und ohne Meßprobe im Rohr läßt sich deren akustischer Widerstand bestimmen.

6,34 *Die SCHUSTERsche Brücke (129)*

Die SCHUSTERsche Brücke stellt eine Differentialbrücke dar, in der komplexe Widerstände durch rein akustische Kompensation bestimmt werden können. Wie die schematische Darstellung in Abb. 277 zeigt, enthält das lange Rohr T in der Mitte einen elektromagnetischen Membransender S, der völlig symmetrisch gebaut ist und nach beiden Seiten mit gleicher Stärke, jedoch mit 180° Phasenverschiebung strahlt. Das Mikrophon M bzw. ein an dieser Stelle angeschlossener Hörschlauch in der Mitte des

in gleicher Entfernung von S angesetzten Nebenschlusses N, wird also eine vollkommene Auslöschung der Schallwellen anzeigen, wenn beide akustischen Zweige gleich belastet sind. Das ist nur dann der Fall, wenn beiderseits der gleiche Amplituden- und Phasensprung zwischen hin- und rückeilender Welle vorhanden ist. In der rechten Rohrhälfte ist der zu bestimmende akustische Widerstand P im Abstand a_x von S angebracht. In der linken Rohrhälfte befindet sich der veränderliche Vergleichswiderstand, der aus einer Filzscheibe F und dem dahinter angebrachten gegen F verschiebbaren Metallkolben K besteht. Durch Abstimmen der Luftsäule zwischen K und F auf Resonanz läßt sich ein beliebig hoher Widerstand einstellen. Der Phasenwinkel des Vergleichswiderstandes wird durch gleichzeitiges Verschieben von K auf F innerhalb T eingestellt. SCHUSTER gelang es, Schluckgrade zwischen 3 und 99,9% zu messen. Der Kompensationswiderstand muß bei verschiedenen Frequenzen mit Hilfe der Rohrmethode (§ 6,32) geeicht werden.

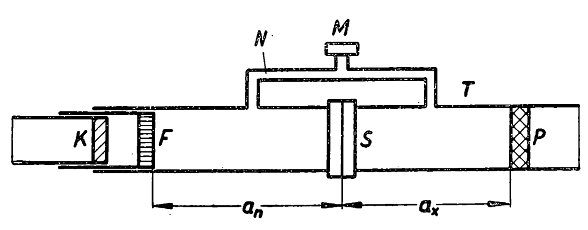


Abb. 277. SCHUSTERsche Brücke.

6,4 **Schalldämmung** (*12, 25*)

6,41 *Allgemeines*

Für die praktische Lärmbekämpfung in geschlossenen Räumen spielt außer der durch Gleichung (6/21) gegebenen Absorption eines schallschluckenden Stoffes auch dessen dynamisches Verhalten eine große Rolle. Eine poröse, gut schallabsorbierende Wand wird eine geringe Dämmwirkung zeigen, wenn sie als Membran mitschwingen kann. Ist M die Masse der mitschwingenden Wand und Z der reelle Schallwiderstand, so ergibt sich hierfür der komplexe Gesamtwiderstand W zu

$$W = i\,\omega\,M + Z \qquad (6/37)$$

und hieraus nach (6/21) der Schallschluckgrad

$$a = \frac{4\,Z^2}{4\,Z^2 + \omega^2\,M^2} \approx \left(\frac{2\,Z}{\omega\,M}\right)^2. \qquad (6/38)$$

Bezeichnet man die auf die Wand treffende Schallstärke mit I_1, die von der Rückseite abgestrahlte mit I_2, so wird die schalldämmende Wirkung durch die sog. *Schalldämmzahl D* festgelegt und in Dezibel gemessen. Sie wird definiert durch

$$D = 10 \log \frac{I_1}{I_2}, \qquad (6/39)$$

und wird mit Gleichung (6/38)

$$D = 20 \log \left(\frac{\omega\,M}{2\,Z}\right). \qquad (6/40)$$

Daraus ist zu schließen, daß die Schalldämmung um so wirksamer ist, je höher Frequenz und Wandmasse je Flächeneinheit sind, was durch die Erfahrung bestätigt wird. Der Einfluß der Wandeinspannung und der inneren Reibungsdämpfung ist hierbei nicht berücksichtigt.

6,42 *Meßmethoden* (*53*)

Nach MEYER läßt sich die Schalldämmung einer beschallten Wand aus den Bewegungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsamplituden der Wand mit Hilfe eines Kapazitätsverfahrens (§ 2,52, I. Teil) bestimmen.

Für Reihenuntersuchungen technischer Art benutzt man die in Abb. 278 dargestellte Versuchsanordnung. Zwei Räume I und II sind durch die zu untersuchende Dämmwand W getrennt. In I ist eine Schallquelle konstanter Leistung und gewobbelter Frequenz (zur Vermeidung stehender Wellen) aufgestellt. Im Höhrraum II wird die Verminderung der Schallintensität festgestellt. Unter der Voraussetzung, daß sich beide Räume wie ULBRICHTsche Kugeln verhalten, folgt unter Beachtung von § 4,1 für die Schalldämmzahl D

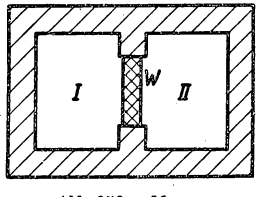


Abb. 278. Messung der Schalldämmung.

$$D = L_{\mathrm{I}} - L_{\mathrm{II}} + L_F + L_A\,, \qquad (6/41)$$

worin L_{I} und L_{II} die in I und II gemessenen Lautstärken sind. $L_F = 10 \log F$ berücksichtigt den Unterschied des Schalldurchflusses durch die Wandfläche F und $L_A = 10 \log A$ den Unterschied der Schallabsorption in Raum II gegenüber einem Raum, der ein offenes Fenster von der Größe 1 m² Fläche besitzt. Beide Korrektionsglieder verschwinden für $F = 1$ m², und man erhält dann die Schalldämmzahl D aus der Differenz der in I und II gemessenen Lautstärken (siehe § 5,7).

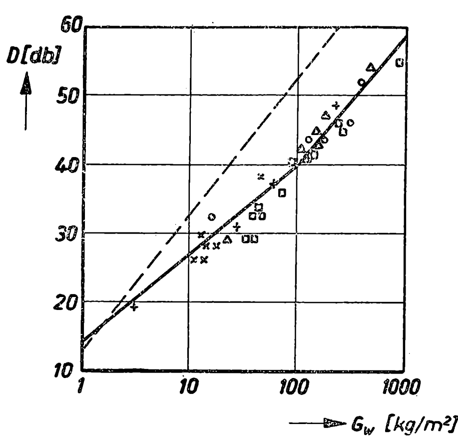


Abb. 279. Schalldämmzahl und Wandgewicht.

In der Abb. 279 ist nach Messungen verschiedener Forscher die Schalldämmzahl D abhängig vom Wandgewicht G_w für verschiedene Frequenzen aufgetragen. Dazu ist punktiert die nach der einfachen Massentheorie zu erwartende Gerade [Gleichung (6/40)] eingetragen. Man sieht daraus, daß die experimentell gefundene Dämmzahl kleiner als die theoretisch zu erwartende ist und erklärt diesen Umstand durch die Biegungssteifigkeit der Wandplatten, die zur Trägheitswirkung gegenphasig ist.

§ 7 KLANGANALYSE

7,1 Grundsätzliches

Ein beliebiger akustischer Vorgang ist definiert, wenn die zeitliche Abhängigkeit der Amplitude des schwingenden Teilchens, seine Geschwindigkeit oder Druckamplitude im Medium bekannt ist. Bezeichnet man mit ξ die betrachtete akustische Größe, so läßt sich die Schwingungsform durch den FOURIER-Ansatz

$$\xi\,(t) = \xi_0 + \sum_1^n \xi_n \sin\,(n\,\omega\,t + \varphi_n) \qquad (7/1)$$

darstellen. Dieser mit Klang bezeichnete Gehöreindruck läßt sich entsprechend für den Schalldruck durch

$$p\,(t) = p_0 + \sum_1^n p_n \sin\,(n\,\omega\,t + \varphi_n) \qquad (7/2)$$

ausdrücken. Da das Ohr bekanntlich die Phasenwinkel φ_n zwischen den einzelnen Teilschwingungen nicht wahrnimmt, kann man zum Zweck der Klanganalyse auf φ_n verzichten.

Im Gegensatz hierzu werden Geräusche durch ein kontinuierliches Klangspektrum dargestellt und entsprechen in der mathematischen Beschreibung einem FOURIER-Integral.

Aufgabe der Klanganalyse ist es, die Teilkomponenten eines beliebigen Schalles nach Amplitude und Frequenz (Tonhöhe) zu bestimmen. Hierzu ist bei den meisten zu beschreibenden Verfahren eine bestimmte Zeit erforderlich, da die Analysiergeschwindigkeit von der Einstellzeit des Registrierinstrumentes und der Zahl der Tonfilter abhängt. Die unmittelbare, sofort ablesbare Analyse des mit dem Mikrophon aufgenommenen Klanges ist nur mit dem im § 7,4 beschriebenen Tonfrequenz-Spektrometer oder ähnlichen Apparaten möglich. Bei allen anderen Verfahren muß der Schall reproduzierbar einige Zeit vorliegen, wozu die im folgenden Kapitel kurz zu besprechenden Schallaufzeichnungsverfahren dienen.

7,2 **Schallaufzeichnung** (*90, 105*)

Die Verfahren der Schallaufzeichnung lassen sich in mechanische, elektrische und optische unterteilen.

7,21 *Schallplatte* (*35*)

Dieses zur Zeit noch am meisten verbreitete Schallaufnahmeverfahren hat gegenüber der elektromagnetischen und optischen Methode den Vorteil der Einfachheit. Zur Schallaufnahme für physikalische Zwecke verwendet man eine ebene Platte mit einem Überzug aus hartem Wachs, in dem die Tonspur auf einer engen Spirale geschnitten wird. Fast allgemein wird die sog. Seitenschrift angewandt, bei der die seitlichen Ablenkungen der Rille in einem bestimmten Zusammenhang mit dem vom Mikrophon aufgenommenen Schalldruck stehen. Der Schreiber besteht aus einem Weicheisenanker, der von einer wechselstromdurchflossenen Spule umgeben ist und sich zwischen den Polen eines Permanentmagneten befindet. An der Spitze trägt der Anker den kleinen Schreibsaphir, der die Rillen in die Wachsplatte eingräbt. Die Platte wird durch einen Synchronmotor mit 78 U/min angetrieben, wobei der Schreiber durch eine mechanische Vorrichtung über die Plattenfläche geführt wird. Gute Plattenschreiber sind so konstruiert, daß ihr Frequenzgang zwischen 200 und 6000 Hz nicht merklich ist.

Die Anlage zur Wiedergabe verwandelt die Rillenauslenkungen der Schallplatte wieder in Schall, was mechanisch (Sprechdose), für Meßzwecke jedoch besser durch einen elektrischen Tonabnehmer geschehen kann. Dieser besteht entweder aus einer dem Plattenschreiber ähnlichen elektromagnetischen Vorrichtung oder neuerdings aus einem Piezokristall (Seignettesalz), auf den die Auslenkungen der Wiedergabenadel in Druckschwankungen übertragen werden. Die dadurch hervorgerufenen Wechselladungen werden verstärkt einem Lautsprecher zugeführt.

Der Frequenzbereich beträgt bei diesem Verfahren ungefähr 100–5000 Hz; der Lautstärkeumfang ist als Amplitudenverhältnis ausgedrückt etwa 1 : 100, was 40 Phon entspricht.

Die ursprünglich von EDISON angewandte Tiefenschrift ist durch FREDERICK (*38*) neuerdings wieder für hochwertige Tonwiedergaben herangezogen worden. Dieses Verfahren besitzt gegenüber der Seitenschrift den Vorteil der Platzersparnis, da die Rillen enger geschrieben werden können. Durch besonders durchgebildete Schneide- und Wiedergabegeräte wird außerdem das Nadelgeräusch stark gemindert, der Übertragungsbereich auf 10000 Hz und der Lautstärkeumfang auf 60 Phon gesteigert.

7,23 *Optische Schallaufzeichnung* (*Tonfilm*) (*90*)

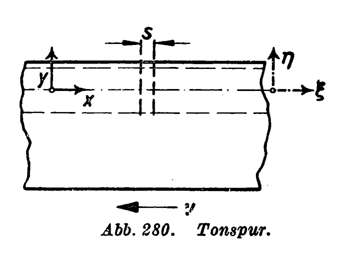


Abb. 280. Tonspur.

Bei der optischen Schallaufzeichnung wird die akustische Größe, z. B. der Schalldruck, in die Beleuchtungsstärke eines schmalen Spaltes umgewandelt, durch den ein mit konstanter Geschwindigkeit vorbeigezogener Filmstreifen belichtet wird. Gibt man der Tonspur die „filmfesten" Koordinaten x, y (Abb. 280), deren X-Achse mit der ξ-Achse des raumfesten ξ, η-Koordinatensystems zusammenfällt, so wird die Beleuchtungsstärke des Spaltbildes gegeben durch

$$E = E_0 \Phi(\xi, \eta, t), \qquad (7/3)$$

wobei E_0 die maximale Beleuchtungsstärke sein soll. Nach Art der Funktion Φ unterscheidet man die verschiedenen Aufzeichnungsarten des Tonfilms: Sprossen- und Zackenschrift. Von Sprossenschrift wird gesprochen, wenn, wie in Abb. 281a, das Spaltbild von η unabhängig ist, also Φ durch

$$\Phi(\xi, \eta, t) = \Phi(\xi, t) \qquad (7/4)$$

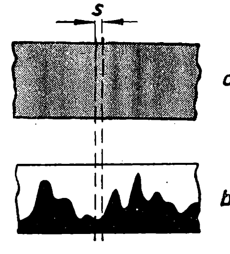


Abb. 281 a u. b. Sprossen- und Zackenschrift.

darstellbar ist. Der Spalt von der Breite s wird bei diesem Intensitätsverfahren gleichmäßig ausgeleuchtet, die Flächenhelligkeit ist über die Spaltbreite konstant und ändert sich nur mit ξ. Demgegenüber ist bei der Zackenschrift (Abb. 281 b) Φ von ξ und η abhängig, und zwar in der Art, daß E für $\eta < \eta_1$ Null und für $\eta > \eta_1$ gleich E_0 wird (Amplitudenverfahren). Von der Wahl der Spaltbreite s, die ihrerseits dem auf den Film fallenden Lichtstrom proportional ist, hängen die linearen Verzerrungen, d. h. der Gehalt an Oberwellen bei der Wiedergabe wesentlich ab. Man macht deshalb den Spalt nicht über 20 μ breit.

Für die Tonaufnahme werden entweder elektrisch unmittelbar gesteuerte Lichtquellen oder solche konstanter Intensität benutzt, deren Lichtstrom durch ein sog. Lichtrelais im Takte der Schalldruckschwankungen gesteuert wird. Zur ersten Art gehören Gasentladungslampen, deren positive Säule durch eine Kapillare zu hoher Leuchtdicke konzentriert wird und bis zu hohen Tonfrequenzen modulierbar ist. Die *Ultrafrequenzlampe* ist eine Punktlichtlampe mit kleiner Kathode, deren Leuchtdichte etwa 80 sb (Stilb) beträgt, und benötigt bei 400 V Brennspannung eine Aussteuerleistung von 10 W. Der Leuchtfleck eines *Kathodenstrahloszillographen* läßt sich zusammen mit einem nachleuchtfreien Leuchtschirm ebenfalls zur Intensitäts- und Amplitudenmodulation verwenden, liefert aber nur eine Leuchtdichte von 50 sb.

Die Aufzeichenverfahren mit Lichtrelais haben den großen Vorteil, daß der Spalt mit fast beliebiger Helligkeit zu beleuchten ist.

Sehr verbreitet ist für die Aufzeichnung der Sprossenschrift die *Kerr-Zelle*, die zwischen zwei Polarisationsfiltern oder -prismen in den optischen Strahlengang gesetzt wird und bis zu den höchsten Frequenzen völlig trägheitslos arbeitet. Für eine ausreichende Durchmodulation des Filmes ist eine Steuerspannung von einigen hundert Volt bei einer Steuerleistung von etwa 0,5 W erforderlich.

Die von Wente entwickelte *Lichtschleuse* zeichnet sich durch einfachen Aufbau, große Lichtstärke und geringe Steuerleistung (10 mW) aus. Sie besteht aus zwei dünnen Aluminiumdrähten, die zwischen den Polen eines starken Permanentmagneten gespannt sind und einen Spalt von 50 μ und 5 mm Länge begrenzen. Die Spaltbreite ist dem durchfließenden Tonfrequenzstrom proportional. Im Vergleich zur Kerr-Zelle ist die relativ geringe Eigenfrequenz von etwa 7 kHz nachteilig.

Zum Aufzeichnen der Zackenschrift werden neben dem Kathodenstrahloszillographen Schleifenoszillographensysteme hoher Eigenfrequenz benutzt, die eine Steuerleistung von etwa 40 mW benötigen.

Bei der Wiedergabe wird das Spaltbild des Tonstreifens durch eine starke Niedervoltdrahtlampe mit Kondensor beleuchtet und auf eine Photozelle geworfen. Besonders geeignet haben sich gasgefüllte Alkalizellen und für den Schmalfilm neuerdings nach Fassbender (*31*) Kadmiumsulfit-Einkristallzellen, deren große Lichtempfindlichkeit zusammen mit einem kleinen Innenwiderstand nur eine geringe Verstärkung erfordert. Die an diesen Photozellen unmittelbar abnehmbare Steuerspannung beträgt etwa 1 Volt.

7,24 *Magnetische Aufzeichenverfahren* (*Magnetophon*) (*64, 95, 108, 122*)

Die Güte der Schallaufzeichnung durch das Magnetophon wird hinsichtlich Frequenzumfang, Dynamik und Freiheit von linearen und nichtlinearen Verzerrungen von keinem anderen Verfahren erreicht. Als Tonträger dient für die Aufzeichnung der akustischen Vorgänge ein 6,5 mm breites und etwa 50 μ starkes Filmband, das aus Azetylzellulose, Triazetat oder Zellit besteht, in das pulverförmiges Eisenoxyd (Fe_2O_3 und Fe_3O_4) mit einer Korngröße von $< 1\,\mu$ eingebettet ist. Auch Stahldraht von 0,1 mm Durchmesser wird verwendet. Die Aufzeichnung und Abtastung geschieht mit in Ringform ausgebildeten Magnetisierungsköpfen (Abb. 282), dem Lösch-, dem Sprech- und dem Hörkopf, wobei das mit einer konstanten Geschwindigkeit von 0,4–0,8 m/s vorbeibewegte Filmband einseitig an den drei Ringköpfen anliegt. Diese drei Köpfe besitzen an der Berührungsfläche einen Spalt von der Breite s, die beim Löschkopf 400 μ, beim Sprechkopf 50 μ und beim Hörkopf 20 μ beträgt. Durch das am Spalt des zunächst durchlaufenden Löschkopfes wirkende magnetische Streufeld von 40 kHz wird das Filmband völlig entmagnetisiert. Am Sprechkopf wirkt ein hochfrequentes Streufeld von 100 kHz, das durch den Sprechstrom moduliert wird und dem Filmband eine dem Sprechstrom proportionale remanente Magnetisierung aufprägt. Diese longitudinale Magnetisierung induziert beim Vorbeilaufen am Spalt des Hörkopfes in dessen Wicklung eine modulierte Wechselspannung, die verstärkt und gleichgerichtet dem Lautsprecher zugeführt wird.

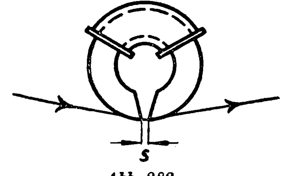


Abb. 282. Ringkopf des Magnetophons.

Der Lautstärkeumfang des Magnetophons beträgt bei einem sehr kleinen Störpegel ungefähr 80 Phon. Gerade für physikalische Messungen eignet sich dieses Verfahren besonders, da Aufnahme und Wiedergabe unmittelbar nacheinander gemacht werden können und das bereits bespielte Band beliebig oft verwendet werden kann.

7,3 **Auswertung der Klangkurven** (*84, 141*)

Durch unmittelbare Aufzeichnung des Schalldruckes mittels Mikrophon, Verstärker und Oszillograph auf ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegtes Filmband oder Wiedergabe eines Tonfilm- oder Magnetophon-Streifens in derselben Art, erhält man die zeitliche Abhängigkeit der akustischen Größe. Zum Zwecke der Klanganalyse läßt sich aus der gewonnenen Aufzeichnung mit Hilfe bekannter mathematischer und graphischer Rechenverfahren zur Bestimmung von FOURIER-Koeffizienten (ZIPPERER, MEURER) oder mit dem FOURIER-Analysator nach MADER der Gehalt an sinusförmigen Teilschwingungen ermitteln.

Nach SCHOUTEN (*128*) wird das in Intensitäts- oder Amplitudenschrift aufgezeichnete Tonfilmband bei monochromatischem Licht als optisches Gitter verwendet und aus Ordnungszahl, Lage und Intensität der Interferenzmaxima Stärke und Tonhöhe der harmonisch liegenden Obertöne ähnlich wie beim DEBYE-SEARS-Verfahren (§ 6,15) bestimmt.

Von SACIA (*125*) wird ein elektrischer Analysator angegeben, mit dem man auch einen zeitlich engbegrenzten akustischen Vorgang untersuchen kann. Man verfährt in der Weise, daß man die Schallaufnahme des Vorgangs in Form eines einseitig geschwärzten Oszillogramms, Tonfilmstreifens oder Magnetophonbandes zu einem endlosen Band zusammenklebt und mit regelbarer und bekannter Geschwindigkeit am elektrischen Wiedergabegerät vorbeilaufen läßt. Die der akustischen Größe proportionale Spannung an der Photozelle bzw. dem Hörkopf wird einem Resonanzverstärker der festen Frequenz ν_0 zugeführt und an einem Röhrenvoltmeter am Verstärkerausgang abgelesen. Ist die Transportgeschwindigkeit des Tonstreifens für den n-ten Oberton v_n, erhält man einen Maximalausschlag A_n des Instrumentes für die Frequenzen ν_n, bei denen die Beziehung

$$\nu_0 = \nu_n \frac{v_n}{v_1} \tag{7/5}$$

erfüllt ist, wobei v_1 die Bandgeschwindigkeit des Grundtons ist. Da ν_0 bekannt ist, lassen sich daraus ν_n und aus A_n/A_1, dem Verhältnis der Ausschläge, die FOURIER-Koeffizienten a_n ermitteln.

7,4 **Resonanzmethoden**

Verfahren, die selbsttätig Stärke und Frequenz der Teiltöne aufzuzeichnen gestatten, bezeichnet man als automatische Klanganalysatoren. Diese verwenden durchweg zur Heraussiebung der Teiltöne abgestimmte, meist elektrische Schwingungskreise. Dabei lassen sich drei Gruppen von Verfahren unterscheiden: 1. große Anzahl von fest abgestimmten Resonatoren; 2. nur ein, jedoch variabler Resonator, 3. fest abgestimmter Schwingungskreis, wobei durch Überlagerung die Teiltonfrequenz auf dessen Eigenfrequenz transformiert wird (Suchtonverfahren).

7,41 *Tonfrequenzspektrometer* (*133*)

Die erste Gruppe verwendet eine Anzahl elektrischer Schwingungskreise (Bandfilter), die alle parallelgeschaltet an die zu analysierende Tonfrequenzspannung gelegt und deren Amplituden nacheinander gemessen werden. Für viele akustische Untersuchungen bietet ein umschaltbares Sieb mit einem Durchlaßbereich von einer Oktave ein ausreichendes Hilfsmittel (*19*). Eine solche Siebschaltung hat den Vorteil, daß noch keine störenden Einschwingvorgänge auftreten. Im Prinzip besteht das umschaltbare Oktavsieb, wie in Abb. 283 gezeigt ist, aus drei gleichzeitig auf acht verschiedene Werte umschaltbare Induktivitäten L_1 bis L_3 und den drei Festkapazitäten C_1 bis C_3. Der mit diesem Sieb und einer zusätzlichen Halboktavschaltung überdeckbare Frequenzbereich erstreckt sich von 35 bis 12800 Hz. Die Klanganalyse wird in der Weise ausgeführt, daß an die mit „Eingang" bezeichneten Klemmen der Ausgang des Mikrophonverstärkers, an den Bandfilter-„Ausgang" das Röhrenvoltmeter gelegt und für jeden Frequenzbereich die Amplitude des Teiltonintervalles abgelesen wird. Für die automatische Klanganalyse ist das zeitlich aufeinanderfolgende Umschalten der Filterbereiche wenig geeignet, da die Einschwingvorgänge keine große Analysiergeschwindigkeit zulassen.

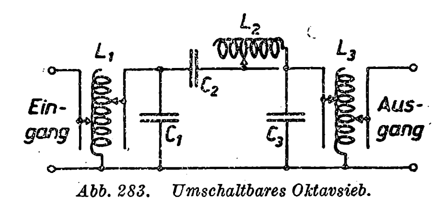


Abb. 283. Umschaltbares Oktavsieb.

Die Analysierzeit läßt sich wesentlich vermindern, wenn nicht nur ein Frequenzkanal, sondern deren sehr viele gleichzeitig verwendet werden. Hierdurch läßt sich die untere Grenze der Analysierzeit, nämlich die Einschwingzeit des schmalsten Kanals erreichen.

Beim SIEMENS-Tonfrequenzspektrometer (*39*) ist das Hörspektrum in 27 Bereiche unterteilt, von denen je drei auf eine Oktave kommen. Die Ausgangsspannungen der

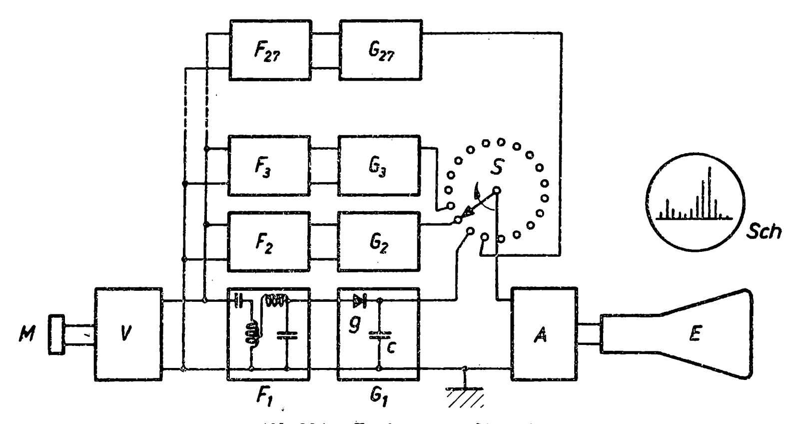


Abb. 284. Tonfrequenzspektrometer.

einzelnen Filter werden durch einen umlaufenden Schalter auf einer BRAUNschen Röhre in rascher Folge hintereinander angezeigt. Der grundsätzliche Aufbau des Gerätes ist in der Abb. 284 schematisch dargestellt. Das mit dem Mikrophon M aufgenommene Frequenzgemisch wird über den Vorverstärker V den parallelgeschalteten

Filtern $F_1 \div F_{27}$ zugeführt. Jedes Filter besteht, wie in F_1 im einzelnen gezeigt ist, aus zwei induktiv gekoppelten Resonanzkreisen. Die Ausgangsspannungen der einzelnen Filter gelangen in den Gleichrichterteilen $G_1 \div G_{27}$ über die Gleichrichter g zu den Speicherkondensatoren c, die auf die Spitzenspannung des Filterausgangs aufgeladen werden. Ein umlaufender Nockenschalter S tastet innerhalb $^1/_{20}$ s die 27 an den c liegenden Spannungen ab und führt sie einem Ausgangsverstärker A zu, der diese nochmals verstärkt. Die Ausgangsspannungen der einzelnen Filter werden nacheinander an die senkrechten Ablenkplatten des Elektronenstrahl-Oszillographen E gegeben. Mit dem umlaufenden Schalter ist ein zweiter Schalter gekuppelt, der die horizontale Ablenkung des Elektronenstrahls um jeweils einen konstanten Betrag bewirkt, so daß die Ausgangsspannungen der 27 Filter als senkrechte Linien nebeneinander auf einer gemeinsamen Grundlinie auf dem Schirm Sch des Oszillographen erscheinen. Da der Schalter mit 20 U/s umläuft, erblickt man ein stehendes Schirmbild. Durch Filmaufnahmen dieses Bildes lassen sich auch zeitlich rasch veränderliche Vorgänge erforschen.

7,42 *Veränderlicher Resonanzkreis*

Die zweite der oben genannten Gruppen verwendet einen einzigen Resonanzkreis, dessen Eigenfrequenz verändert und nacheinander auf die Teiltöne abgestimmt wird. Bezüglich der Analysiergeschwindigkeit gilt also für dieses Verfahren das im § 7,41 Gesagte. Garten und Kleinknecht verwenden einen mechanischen Resonator in Form einer Gummihülle mit zwei Öffnungen für den Schallein- und -ausgang. Durch eine die Gummiblase umgebende, mit Wasser gefüllte Glaskugel, deren Füllung verändert werden kann, läßt sich das Resonatorvolumen und daher die Eigenfrequenz im Verhältnis 1 : 10 variieren. Für quantitative Messungen sind eine Reihe von Korrekturen bezüglich der Resonatordämpfung, des Ein- und Ausschwingvorganges und der Eigenfrequenz anzubringen.

Viel besser eignet sich für die automatische Analyse dieser Art ein veränderlicher elektrischer Schwingungskreis. Dieses von Wegel und Moore (*147*) angegebene Verfahren verwendet einen Resonanzkreis, der aus vier gleichen, in Serie oder parallel zu schaltenden Eisenspulen und einem in kleinen Stufen veränderlichen Kondensator besteht. Bei einem Frequenzbereich von 20 bis 5000 Hz beträgt die Analysierdauer 5 min. Da die Eigendämpfung des Kreises sich ändert, wird vor diesen ein Entzerrer geschaltet, der so dimensioniert ist, daß bei gleicher Eingangsspannung für alle Frequenzen derselbe Ausschlag abgelesen wird.

7,5 **Suchtonverfahren** (*106*)

Das dritte Verfahren der automatischen Klanganalyse benutzt einen fest abgestimmten Resonanzkreis. Durch Frequenztransformation werden die Teiltonfrequenzen jeweils auf die des Resonanzkreises abgestimmt. In gewissem Sinne gehört damit auch das in § 7,3 beschriebene Analysierverfahren nach Sacia hierher.

7,51 *Suchtonverfahren mit Gegentaktgleichrichter*

Das von Grützmacher (*46*) angegebene Suchtonverfahren verwendet den Zusatz eines sinusförmigen, frequenzveränderlichen Tones zu dem zu analysierenden Klangspektrum. Dieser „Suchton“ liefert in der Nähe eines Teiltones Schwebungen,

deren Frequenz mit der Eigenfrequenz des fest abgestimmten Kreises zusammenfallen muß. Ist die Suchtonspannung frequenzunabhängig, so ist die am Resonanzkreis entstehende Spannung nach einer quadratischen Gleichrichtung der Teiltonspannung proportional.

Ein Röhrengleichrichter mit quadratischer Kennlinie, dessen Gitterspannung u_g sei, erhält daher am Anodenwiderstand die Spannung $U = C_1 u_g + C_2 u_g^2$, worin C_1 und C_2 Röhren- bzw. Schaltungskonstanten sind. Bezeichnet man die Suchtonspannung mit

$$u_s = U_s \sin \omega_s t, \tag{7/6}$$

die des Teiltones mit

$$u_t = U_t \sin \omega_t t, \tag{7/7}$$

so erhält man für die in einer Gegentaktschaltung an den Anoden liegenden Spannungen

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= C_1 (u_s + u_t) + C_2 (u_s + u_t)^2 \\ U_2 &= C_1 (-u_s + u_t) + C_2 (-u_s + u_t)^2 . \end{aligned}\right\} \tag{7/8}$$

Die zwischen den beiden Anoden der beiden Gleichrichterröhren liegende Gesamtspannung wird daher

$$\begin{aligned} U_1 - U_2 &= 2\, C_1 u_s + 4\, C_2 u_s u_t \\ &= 2\, C_1 U_s \sin \omega_s t - 2\, C_2 U_t U_s [\cos (\omega_t - \omega_s)\, t - \cos (\omega_t + \omega_s)\, t] . \end{aligned} \tag{7/9}$$

Da am Gleichrichterausgang ein auf die Differenzfrequenz $\omega_0 = \omega_t - \omega_s$ abgestimmter Resonanzkreis liegt, wird aus (7/9) nur der Anteil

$$U_1 - U_2 = 2\, C_2 U_t U_s \cos (\omega_t - \omega_s)\, t \tag{7/9a}$$

herausgesiebt, woraus bei bekanntem ω_s die Teiltonfrequenz ω_t und bei bekannter Suchspannung U_s die Teiltonintensität bestimmt werden kann.

Die praktische Ausführung der Methode ist halbschematisch in Abb. 285 dargestellt. Das vom Mikrophon M und dem Vorverstärker V gelieferte Frequenzgemisch

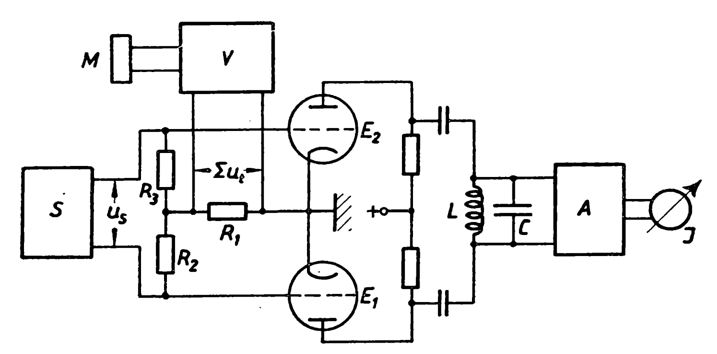


Abb. 285. Suchtonverfahren nach GRUETZMACHER

wird an den Widerstand R_1, der vom Überlagerungstonfrequenzsender S gelieferte Suchton an die Widerstandskombination $R_2 R_3$ des Gegentaktgleichrichters gelegt. Die Suchtonspannung U_s muß unabhängig von der Frequenz sein, die durch einen

Drehkondensator verändert werden kann. Die Differenzspannung $U_1 - U_2$ in Gleichung (7/9a) wird an eine niedrig abgestimmte (20 Hz) Drosselkette, die in der Zeichnung als einfacher Resonanzkreis LC dargestellt ist, gelegt. In dieser wird die Differenzfrequenz ω_0 herausgesiebt, die Resonanzspannung im Ausgangsverstärker A verstärkt und gleichgerichtet dem Anzeige- oder Registriergerät J zugeführt. Zur automatischen Klanganalyse kuppelt man den die Frequenz ω_s bestimmenden Drehkondensator mechanisch mit einer Registriertrommel und erhält auf dem Registrierstreifen für jede Teiltonfrequenz zwei um $2\,\omega_0$ versetzte Maxima, deren Höhe die Teiltonintensität angibt.

Nach Moore und Curtis (*111*) kann man die Suchtonfrequenz auch über den zu analysierenden Frequenzbereich, und zwar etwa oberhalb der höchsten vorkommenden Frequenz legen und einen hoch abgestimmten Resonanzkreis verwenden. Bei einem praktisch ausgeführten Gerät war der Suchton zwischen 11 und 16 kHz veränderlich. Als Filter wurde ein mit etwa 11 kHz longitudinal schwingender Stahlstab verwendet, der eine sehr scharfe Resonanzkurve besitzt. Bei dieser Anordnung erhält man beim Auffinden eines Teiltones jeweils nur ein Maximum am Anzeigeinstrument. Als kombiniertes Filter und Registrierinstrument läßt sich auch eine ungedämpft schwingende Oszillographenschleife gebrauchen.

Wie aus Gleichung (7/9) hervorgeht, besitzt nur eine Gegentaktschaltung mit rein quadratischer Kennlinie die wertvolle Eigenschaft, daß alle sich auf das Klanggemisch beziehenden Komponenten herausfallen. Bei der praktischen Durchführung müssen daher die beiden Elektronenröhren E_1 und E_2 sorgfältig ausgewählt und die Arbeitsbedingungen so lange variiert werden, bis bei der Analyse eines reinen Tones nur ein einziger Teilton angezeigt wird.

7,52 *Analyse mit dem Einfaden-Elektrometer*

Eine andere ebenfalls von Gruetzmacher (*47*) stammende Methode zur Verwirklichung der Beziehung (7/9) verwendet die in Abb. 286 dargestellte Schaltung. Teiltonspannung u_t und Suchspannung u_s werden ähnlich wie in Abb. 285 an die Widerstandskombination R_1 R_2 R_3 gelegt. Als Differentialinstrument dient das aus dem Schneidenpaar P_1 P_2 und dem Faden F bestehende Einfadenelektrometer. Da die auf F von P_1 und P_2 ausgeübten Kräfte quadratische Funktionen der zwischen P_1, P_2 und F wirkenden Spannungen sind, erhält man für den der Differenzspannung $U_1 - U_2$ proportionalen Fadenausschlag die der Gleichung (7/9) vollkommen entsprechende Beziehung. Die nur wenig gespannte Saite entspricht einem niedrig abgestimmten Resonanzkreis und reagiert nur auf den Differenzton $\omega_s - \omega_t$. Falls U_s für alle Frequenzen konstant ist, wird die Amplitude der Fadenschwingung der Teiltonspannung U_t proportional. Mit diesem Verfahren ist grundsätzlich keine Fehlanalyse möglich, da die Kennlinien rein quadratisch sind.

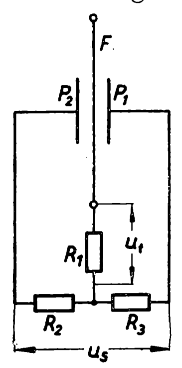


Abb. 286. Analysator mit dem Elektrometer.

7,53 *Mikrophon-Methode*

Nach einem Vorschlag von Meyer (*103*) kann zur Klanganalyse auch ein Kohlemikrophon mit der in Abb. 287 dargestellten Schaltung verwendet werden. Eine von

einem Ohmschen Widerstand R und dem Kohlemikrophon M gebildete Differentialbrücke wird über einen Differentialüberträger Ü mit der vom Suchtongenerator S gelieferten Wechselspannung gespeist. Der durch das Mikrophon fließende Suchstrom sei $I_s \sin \omega_s t$; der auf dieses auftreffende Teilton der Frequenz ω_t rufe die Widerstandsänderung $r \sin \omega_t t$ hervor. Von der an der Brückendiagonalen entstehenden Spannung $I_s r \sin \omega_s t \sin \omega_t t$ interessiert nur der Differenzton $I_s r \sin (\omega_t - \omega_s) t$. Verwendet man als Anzeigeinstrument ein auf den Differenzton abgestimmtes Vibrationsgalvanometer V, so ist der beobachtete Ausschlag bei konstantem Suchstrom dem Teiltonschalldruck proportional. Dieses Verfahren ist außerordentlich empfindlich und einfach und liefert mit einem hochwertigen Mikrophon (REISS-Mikrophon der Abb. 248) bei nicht zu großen Schallintensitäten eindeutige Werte.

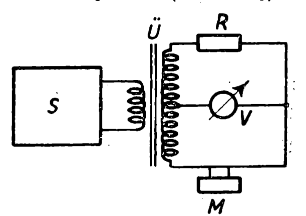


Abb. 287. *Mikrophon-Analysator.*

7,6 *Ultraschall-Plattenspektroskop* (*118*)

MEYER und THIENHAUS (*109*) entwickelten ein schallspektroskopisches Verfahren mit einem Beugungsgitter, in dem ein Klanggemisch spektral zerlegt werden konnte. Wegen der großen Wellenlänge des Hörschalles wurde dieser einer Trägerfrequenz im Ultraschallgebiet überlagert. Man erhält auf diese Weise Spektra ähnlich der beim Suchtonverfahren bei jedoch praktisch unbegrenzter Analysiergeschwindigkeit.

In Fortentwicklung dieses Gedankens hat MOHR (*110*) das Beugungsgitter durch eine Interferenzplatte ersetzt. Die von ihm benutzte Anordnung ist schematisch in Abb. 288 dargestellt. Die Interferenzplatte wird durch eine Luftschicht konstanter Dicke d dargestellt, die aus einer Mehrschichtenglasplatte G und der schalldurchlässigen Zelluloidfolie F von 50 μ Dicke besteht. Durch den Bändchenstrahler S, der ähnlich dem Bändchenmikrophon (Abb. 252) aufgebaut ist, wird in den Interferenzraum zwischen G und F die mit dem Hörschall modulierte Ultraschallwelle von etwa 50 kHz eingestrahlt. Die unter dem Winkel ϑ gegen die Plattennormale auf die Folie fallende Schallwelle wird zwischen G und F mehrmals reflektiert, wobei die von innen auf F kommenden Teilstrahlen zum Teil zurückgeworfen, zum Teil jedoch hindurchgelassen werden. Im Raum vor der Folie entsteht daher ein System parallel austretender Schallstrahlen 1, 2, 3, ..., deren Druckamplitude sich um den Schwächungsfaktor $e^{-\mu}$ und deren Phasenlage sich um die konstante Phasendifferenz α unterscheidet. Sollen sich die Teilstrahlen unter dem Austrittswinkel ϑ gegenseitig unterstützen, so muß bekanntlich $\alpha = 2\pi$ sein, d. h. für

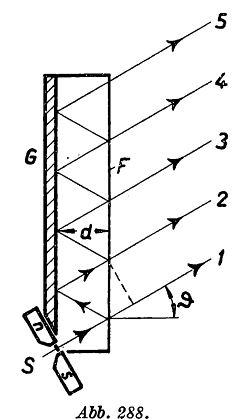


Abb. 288. *Ultraschall-Spektroskop.*

$$\cos \vartheta = \frac{2c}{d\nu} \tag{7/10}$$

erhält man die Interferenzmaxima erster Ordnung, wenn wir mit c die Schallgeschwindigkeit und mit ν die Schallfrequenz bezeichnen. Da sich die Schallfrequenz ν bei der Frequenzmodulation additiv aus der Trägerfrequenz ν_0 und der Teiltonfrequenz ν_t

zusammensetzt, erhält man für die Abhängigkeit der Interferenzmaxima vom Austrittswinkel ϑ aus (7/10)

$$\frac{\nu_t}{\nu_0} \approx \frac{1}{2} \vartheta^2, \qquad (7/11)$$

wenn der reinen Trägerfrequenz der Austrittswinkel $\vartheta = 0$ entspricht.

Die unter den verschiedenen Winkeln austretenden Schallwellen maximaler Intensität für die einzelnen Teiltöne werden bei der MOHRschen Anordnung durch einen schwenkbaren parabolischen Zylinderspiegel aus Messingblech auf ein Bändchenmikrophon mit Verstärker konzentriert. Eine Registriervorrichtung, z. B. ein Schallpegelschreiber, zeichnet die einzelnen Teiltonmaxima abhängig von ϑ, d. h. von ν_t auf.

Literaturhinweise (2. Teil: Akustik)

1. Abello, D. T., Phys. Rev. 31 (1928) 157, 1083
2. Ardenne, M. v., Funk 12 (1935) 665

3. Backhaus, H., Z. techn. Phys. 19 (1928) 491
4. Backhaus, H., Akust. Z. 1 (1936) 179
5. Bakanowski, A. E., und Lindsay, R. B., J. Acoust. Soc. Amer. 22 (1950) 14
6. Ballantine, St., Proc. Inst. Rad. Eng. N. Y. 21 (1933) 1399
7. Barkhausen, H., Z. techn. Phys. 7 (1926) 599. – Z. VDI 71 (1927) 1471
8. Baumgart, E., C. R. Acad. Sci. Paris 202 (1936) 203
9. Bazulin, P., Phys. Z. Sowj. 8 (1935) 354
10. Beranek, L. L., J. Acoust. Soc. Amer. 12 (1940) 3
11. Beranek, L. L., Acoustic Measurements, New York 1949
12. Berger, R., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. 17,3, Leipz. 1934
13. Bergmann, L., Der Ultraschall 3. Aufl. Berlin 1950
14. Biquard, P., C. R. Acad. Sci. Paris 193 (1931) 226. Diss. Paris 1935
15. Biquard, P., C. R. Acad. Sci. Paris 196 (1933) 257
16. Blank, J. M., J. Opt. Soc. Amer. 40 (1950) 345
17. Bömmel, H., Helv. Phys. Acta 16 (1943) 423
18. Bömmel, H., Helv. Phys. Acta 18 (1945) 3
19. Bosse, G., Funk u. Ton 2 (1948) 66
20. Buchmann, G., Funk u. Ton 1 (1947) 30
21. Bürch, W., Funk u. Ton 3 (1949) 187

22. Camp, L., und Wertz, F. D., J. Acoust. Soc. Amer. 21 (1949) 382
23. Cook, R. K., J. Res. Nat. Bur. Stand. 25 (1940) 489
24. Cook, R. K., J. Acoust. Soc. Amer. 12 (1941) 415
25. Cremer, L. D., Wiss. Grundlag. d. Raumakustik Bd. III, Leipz. 1950

26. Debye, P., und Sears, F. W., Proc. nat. Acad. Wash. 18 (1932) 410

27. Ernsthausen, W., Akust. Z. 4 (1939) 13
28. Estermann, R., und Wannier, G., Helv. Phys. Acta 7 (1936) 337, 520
29. Eucken, A., und Becker, R., Z. phys. Chem. 27 (1934) 219

30. Falkenhagen, H., Z. angew. Phys. 1 (1949) 304
31. Fassbender, J., Funk u. Ton 3 (1949) 261
32. Fischer, F. A., Frequenz 2 (1948) 181
33. Fischer, F. A., Arch. elektr. Übertr. 4 (1950) 189
34. Flanagan, J. L., Electronics 22 (1949) 93
35. Forstmann, A., ETZ 52 (1932) 1083, 1114, 1169
36. Fox, F. E., und Griffing, V., J. Acoust. Soc. Amer. 21 (1949) 352
37. Fox, F. E., und Rock, G. D., Proc. Inst. Rad. Eng. 30 (1942) 29

38. FREDERICK, H. A., J. Soc. Mot. Pict. Engr. 18 (1932) 141
39. FREYSTEDT, Z. techn. Phys. 16 (1935) 533

40. GEFFCKEN, W., und HEISIG, H., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. 8, Leipz. 1934
41. GEFFCKEN, W., und KEIBS, L., Ann. Phys. (5) 16 (1933) 404
42. GERDIEN, H., und SCHAAFFS, V., Frequenz 2 (1948) 49
43. GERLACH, E., Wiss. Veröff. Siem.-Konz. 3 (1923) 139
44. GIEBE, E., und BLECHSCHMIDT, E., Ann. Phys. 18 (1933) 417, 458
45. GRATH, J. W., und KURTZ, A. R., Rev. Scient. Instr. 13 (1942) 128
46. GRUETZMACHER, M., Elekt. Nachr.-Techn. 4 (1927) 533. – Z. techn. Phys. 10 (1929) 570
47. GRUETZMACHER, M., Z. techn. Phys. 10 (1929) 572
48. GRUETZMACHER, M., Z. techn. Phys. 17 (1936) 166
49. GRUETZMACHER, M., und JUST, P., Elektr. Nachr.-Techn. 8 (1931) 104
50. GÜTTNER, W., Z. angew. Phys. 2 (1950) 33

51. HAAR, G., Funk u. Ton 5 (1951) 17
52. HÄHNLE, Wiss. Veröff. Siem. 11 (1932) 1
53. HARRIS, C. M., J. Acoust. Soc. Amer. 20 (1948) 440
54. HARTMANN, C. A. Elektr. Nachr.-Techn. 8 (1931) 293
55. HARTMANN, J., Phil. Mag. (7) 11 (1931) 926. – J. Phys. Rad. (7) 7 (1936) 49
56. HECHT, H., D. elektroakust. Wandler, Leipz. 1941
57. HECHT, H., und FISCHER, F. A., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. 17,2, Leipz. 1934
58. HEEGNER, K., Z. Hochfrequ.-Tech. 29 (1927) 177
59. HEUSINGER, P. D., Naturwiss. 36 (1949) 279
60. HIEDEMANN, E., Grundl. u. Ergebn. d. Ultraschallforschg. Berl. 1939
61. HIPPEL, A. v., Ann. Phys. 75 (1924) 521; 76 (1925) 590
62. HOLLE, W., Funk u. Ton 5 (1951) 239
63. HOLTZMANN, M., Phys. Z. 26 (1925) 147
64. HORMANN, E., Elekt. Nachr.-Techn. 9 (1932) 338
65. HUBBARD, J. C., und LOOMIS, A. L., Phil. Mag. (7) 5 (1928) 1177
66. HÜTER, TH., und POHLMANN, R., Z. angew. Phys. 1 (1949) 405
67. HUGHES, D. S., PONDROM, W. L., und MIMS, R. L., Phys. Rev. (2) 75 (1949) 1552
68. HUNTINGTON, H. B., Phys. Rev. 72 (1947) 321

69. ITTERBEEK, A. van, und BOCK, A. de, Physica 14 (1949) 609
70. ITTERBEEK, A. van, und SLOOTMAKERS, P., Physica 15 (1949) 897

71. JACOB, W., Diss. Götting. 1938
72. JOHN, U., Arch. elektr. Übertr. 4 (1950) 139
73. JONKER, G. H., und VAN SANTEN, J. H., Philips techn. Rdsch. 11 (1949) 176

74. KALÄHNE, A., Hdbch. Phys. Bd. 8, Berl. 1927
75. KALUSCHE, H., ETZ 71 (1950) 523
76. KING, L. V., Proc. Roy. Soc. Lond. (A) 153 (1935) 1
77. KLEIN, E., und HERSHBERGER, D. W., Phys. Rev. 37 (1931) 760
78. KNESER, H. O., Ann. Phys. 11 (1931) 761, 777; 16 (1933) 337
79. KNESER, H. O., J. Acoust. Soc. Amer. 5 (1933) 122
80. KNESER, H. O., Ergeb. exakt. Naturwiss. 22. Bd. Berl. 1949
81. KNUDSEN, V. O., Phys. Rev. 43 (1933) 1051
82. KÖSTERS, H., Verh. Dtsch. Phys. Ges. (3) 21 (1940) 48
83. KOREN, H. W., J. Acoust. Soc. Amer. 21 (1949) 198
84. KOSCHEL, H., Fernmeldetech. Z. 1 (1948) 237
85. KOSTEN, C. W., und ZWIKKER, C., Akust. Z. 6 (1941) 124
86. KRÜGER, F., und CASPAR, H., Z. techn. Phys. 17 (1936) 416

87. LANGE, Hochfrequ. Techn. u. Elektroakust. 45 (1935) 118, 159
88. LENIHAN, J. M. A., Nature 152 (1943) 662
89. LICHTE, H., Z. techn. Phys. 2 (1921) 12
90. LICHTE, H., und NARATH, A., Phys. u. Techn. d. Tonfilms, Leipz. 1941
91. LIEPMANN, H. W., Helv. Phys. Acta 9 (1936) 507
92. LOTTERMOSER, Akust. Z. 2 (1937) 129
93. LUCAS, R., und BIQUARD, P., J. Phys. Rad. 3 (1932) 464. – Rev. d'Acoust. 3 (1934) 198
94. LÜBECK, E., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. 17,2, Leipz. 1934
95. LÜBECK, H., Akust. Z. 2 (1937) 273

96. MAWARDI, O. K., J. Acoust. Soc. Amer. 21 (1949) 84
97. MEISSNER, W., Z. Instrkd. 45 (1925) 149
98. MEIXNER, J., und FRITZE, U., Z. angew. Phys. 1 (1949) 535
99. MENGES, K., Akust. Z. 6 (1941) 90
100. MEYER, E., Hdbch. Phys. Bd. 8, Berl. 1927
101. MEYER, E., Elektr. Nachr. Techn. 4 (1927) 86
102. MEYER, E., Elektr. Nachr. Tech. 5 (1928) 338
103. MEYER, E., Elektr. Nachr. Tech. 5 (1928) 398
104. MEYER, E., Elektr. Nachr. Tech. 6 (1929) 17
105. MEYER, E., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. 17,2, Leipz. 1934
106. MEYER-EPPLER, W., Arch. elektr. Übertr. 4 (1950) 331
107. MEYER, E., und JUST, P., Z. techn. Phys. 10 (1929) 309
108. MEYER, E., und SCHÜLLER, E., Z. techn. Phys. 12 (1932) 593
109. MEYER, E., und THIENHAUS, E., Z. techn. Phys. 15 (1934) 63
110. MOHR, E., Akust. Z. 6 (1941) 209
111. MOORE, C. R., und CURTIS, A. S., Bell Syst. techn. J. 6 (1927) 217

112. NAGANDRA NATH, N. S., Proc. Ind. Acad. Sci. (A) 4 (1936) 262

113. OLSON, H. F., J. Acoust. Soc. Amer. 3 (1931) 56
114. OLSON, H. F., Elements of acoust. Engng. New York 1940
115. OVERTON, jr., W. C., J. chem. Phys. 18 (1950) 113

116. PELLAM, J. R., und SQUIRE, C. F., Phys. Rev. (2) 71 (1947) 477
117. PETERSEN, O., Phys. Z. 41 (1940) 29
118. PICHT, J., Ann. Phys. (6) 5 (1949) 117
119. PIELEMEIER, W. A., Phys. Rev. 34 (1929) 1184
120. PIERCE, G. W., Proc. Amer. Acad. Boston 60 (1925) 271
121. PIERCE, G. W., Proc. Amer. Acad. Boston 63 (1928) 1
122. PUHLMANN, W., Funk u. Ton 5 (1951) 65

123. RIEGGER, H., Wiss. Veröff. Siem. 3 (1924) 67

124. SABINE, H. J., J. Acoust. Soc. Amer. 22 (1950) 387
125. SACIA, C. F., J. Opt, Soc. Amer. 9 (1924) 487
126. SCHARZ, L., Akust. Z. 8 (1943) 91
127. SCHOCH, A., Erg. exakt. Naturwiss. Bd. 23, Berlin 1950
128. SCHOUTEN, Philips techn. Rdsch. 3 (1938) 310
129. SCHUSTER, K., Elektr. Nachr. Techn. 13 (1936) 164
130. SCHUSTER, K., Ergebn. exakt. Naturwiss. Bd. 21, Berl. 1945
131. SHEAR, S. K., und FOCKE, A. B., Phys. Rev. 57 (1940) 532
132. SIVIAN, L. J., Phil. Mag. 5 (1928) 615
133. SIVIAN, L. J., Bell Syst. techn. J. 8 (1929) 646
134. SÖRENSEN, Ch., Ann. Phys. 26 (1936) 121

135. STENZEL, H., Elektr. Nachr. Techn. 4 (1927) 239
136. STENZEÖ, H., Hdbch. Exp.-Phys. Bd. 8, Leipz. 1934
137. STEWART, E. S., Phys. Rev. 69 (1946) 632

138. TELFAIR, D., und PIELEMEIER, W. H., Rev. Sci. Inst. 13 (1942) 122
139. THIEDE, H., Funk u. Ton 5 (1951) 32
140. TISCHNER, A., Elektr. Nachr. Techn. 7 (1930) 192
141. TOMBS, D. M., Wireless Eng. 27 (1950) 197
142. TRENDELENBURG, F., Naturwiss. 41 (1931) 937
143. TRENDELENBURG, F., Einführung in d. Akustik, 2. Aufl., Berl. 1951

144. VOGT, H., T. techn. Phys., 12 (1931) 632

145. WATHEN-DUNN, W., J. Acoust. Soc. Amer. 21 (1949) 542
146. WEGEL, R. L., und LANGE, C. E., Phys. Rev. 23 (1924) 266
147. WEGEL, R. L., und MOORE, C. R., Bell Syst. techn. J. 3 (1924) 299
148. WILLARD, G. W., J. Acoust. Soc. Amer. 21 (1949) 360
149. WILLIAMS, A. O., J. Acoust. Soc. Amer. 23 (1951) 1
150. WOOD, A., Acoustics, Lond. 1940
151. WYSS, R., Helv. Phys. Acta 7 (1934) 406

152. ZARTMAN, I. F., Phys. Rev. (2) 71 (1947) 479
153. ZARTMAN, I. F., J. Acoust. Soc. Amer. 21 (1949) 171
154. ZWETKOW, K., und MARININ, W., Doklady Akad. Nauk USSR 68 (1949) 49

Sachregister